DETERMINACION DEL VOLUMEN DE UN SOLIDO

por Sergio Sispánov

Sea P un punto elíptico de una superficie S. Consideremos la superficie S_1 simétrica de S respecto del plano tangente en P. La superficie paralela exterior a S_1 a distancia h suficientemente pequeña determinaré con S un volumen $V(h)$. Demostrar que

$$\lim_{h=0} \frac{V(h)}{h^2} = \frac{\pi}{2} \sqrt{R_1 R_2}.$$

Hagamos girar S_1 un ángulo $\frac{\pi}{2}$ alrededor de la normal en el punto P y consideremos análogamente el volumen $V_1(h)$ limitado por S y la superficie paralela a distancia h a la superficie S_1 después del giro mencionado. Demostrar que

$$\lim_{h=0} \frac{V_1(h)}{h^2} = \pi \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}.$$

R_1 y R_2 son los radios principales de curvatura de la superficie dada S en el punto P.

Estos dos teoremas enunciados por nuestro estimado colega Dr. Luis A. Santaló (v. IX, p. 15, tema 44), son casos particulares de una proposición más general que se deduce de la fórmula para el volumen de un sólido de dimensiones finitas, suponiendo que las superficies que lo limitan se acercan una a la otra. Encontremos, primero, el volumen de dicho sólido.

Sea $PXYZ$ un sistema de coordenadas cartesianas. Atribuyamos al eje PZ la dirección opuesta, hagamos girar, luego, el sistema un cierto ángulo α alrededor del eje PZ y por último, traslădémoslo a lo largo del mismo eje en una distancia h. Sea $P_1(0;0;h)$ el origen del nuevo sistema $P_1X_1Y_1Z_1$, referido al sistema primitivo.

Consideremos un paraboloide elíptico S con la ecuación

$$2z = \frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q}$$

en el sistema antiguo $PXYZ$ y un paraboloide elíptico S_1 cuya ecuación en el sistema nuevo $P_1X_1Y_1Z_1$ sea

$$2z_1 = \frac{x_1{}^2}{p} + \frac{y_1{}^2}{q}.$$

Si se introducen coordinadas polares, las ecuaciones respectivas toman la forma

$$z = \frac{r^2}{2}\left[\frac{\cos^2\varphi}{p} + \frac{\operatorname{sen}^2\varphi}{q}\right] \quad \text{y} \quad z_1 = \frac{r^2}{2}\left[\frac{\cos^2(\varphi-\alpha)}{p} + \frac{\operatorname{sen}^2(\varphi-\alpha)}{q}\right].$$

El segmento ζ de la aplicada correspondiente a un punto $M\,(r\cos\varphi\,;\,r\operatorname{sen}\varphi)$ del plano XPY y comprendido entre las superficies S y S_1 se encontrará por la fórmula

$$\zeta = h - z - z_1 = h - \frac{r^2}{2}F(\varphi)$$

en donde

$$F(\varphi) = a\cos^2\varphi + 2b\cos\varphi\operatorname{sen}\varphi + c\operatorname{sen}^2\varphi,$$

siendo

$$a = \frac{1+\cos^2\alpha}{p} + \frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{q}$$

$$b = \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha \qquad (1)$$

$$c = \frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{p} + \frac{1+\cos^2\alpha}{q}$$

El volumen V_a determinado por las mismas superficies se expresará mediante la integral

$$V_a = \int_0^{2\pi} \int_0^{r_\varphi} \zeta r \, dr \, d\varphi = \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} r_\varphi{}^2 \left[2h - \frac{r^2{}_\varphi}{2} F(\varphi)\right] d\varphi$$

en la cual el límite superior r_φ verifica a la ecuación

$$\zeta = h - \frac{r^2{}_\varphi}{2} F(\varphi) = 0,$$

y por consiguiente

$$V_\alpha = h^2 \int_0^{\pi} \frac{d\varphi}{F(\varphi)} .$$

Pero

$$\int_0^{\pi} \frac{d\varphi}{F(\varphi)} = \frac{\pi}{\sqrt{\Delta}},$$

siendo

$$\Delta = ac - b^2.$$

Teniendo en cuenta las relaciones (1) hallamos

$$\Delta = \left(\frac{1}{p^2} + \frac{1}{q^2}\right) \operatorname{sen}^2 \alpha + \frac{2}{pq} (1 + \cos^2 \alpha).$$

De manera que

$$V_\alpha = \frac{\pi p q h^2}{\sqrt{4pq + (p-q)^2 \operatorname{sen}^2 \alpha}} = \frac{\pi p q h^2}{\sqrt{(p+q)^2 - (p-q)^2 \cos^2 \alpha}}$$

Apliquemos ahora estos resultados *relativos a un sólido de tamaño finito, limitado por dos paraboloides,* al volumen infinitamente pequeño comprendido entre dos superficies infinitamente cercanas que figuran en el enunciado del problema.

Prescindiendo de los infinitamente pequeños de órdenes superiores se pueden reemplazar dichas superficies por paraboloides elípticos de parámetros $p = R_1$ y $q = R_1$, lo que nos conduce a las siguientes expresiones generales:

$$\lim_{h=0} \frac{V_\alpha(h)}{h^2} =$$
$$= \frac{\pi R_1 R_2}{\sqrt{4R_1 R_2 + (R_1 - R_2)^2 \operatorname{sen}^2 \alpha}} = \frac{\pi R_1 R_2}{\sqrt{(R_1 + R_2)^2 - (R_1 - R_2)^2 \cos^2 \alpha}} .$$

Haciendo en ellas $\alpha = 0$ y $\alpha = \frac{\pi}{2}$ llegamos a los casos particulares indicados en los teoremas del Prof. Santaló.

En conclusión, hagamos constar que la curva alabeada de intersección de los paraboloides S y S_1 se halla sobre el cilindro elíptico

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = 2h.$$

Asunción, Paraguay.