TEMAS RESUELTOS

48. *Sea C un conjunto de puntos del plano, de medida M. Siendo A, B dos cualesquiera de sus puntos, se supone que la distancia entre ellos no es nunca de la forma $\sqrt{a^2+b^2}$, siendo a, b números enteros cualesquiera (no nulos a la vez). En estas condiciones, demostrar que es $M \leqq 1$.*

L. A. Santaló

Solución — Supongamos el plano dividido en mallas M_i, mediante el reticulado determinado por las rectas paralelas a los ejes de coordenadas enteras; convengamos que a cada malla pertenecen los lados contiguos a su vértice inferior izquierdo y solamente este vértice. Descompongamos el conjunto dado C en la infinidad numerable de conjuntos sin puntos comunes dos a dos C_i, obtenidos por las secciones $C_i = C \,.\, M_i$; alguno o muchos C_i pueden ser vacíos. Pongamos en pila todas las mallas M_i trasladándolas sobre una de ellas, por ejemplo sobre la M_0 de vértice en el origen; sean C'_i los conjuntos congruentes transformados de los C_i. Por la hipótesis hecha en el tema, dichos conjuntos C'_i no podrán tener puntos comunes dos a dos; sea R el conjunto complementario $(R = M_0 - \Sigma C'_i)$ de la suma de la infinidad numerable de C'_i. Como M_0 tiene medida 1 y la medida es *completamente aditiva* (es decir, goza de la propiedad de aditividad infinita) la conclusión del tema queda demostrada.

Es curioso observar que dicha conclusión no se cumple para un concepto de medida que no gozara de dicha aditividad completa; así por ejemplo, reduciéndonos al caso de la recta, supongamos que C está compuesto de los puntos racionales del segmento $[0, 1)$ y de los irracionales del $[1, 2)$ y adoptemos como medida la extensión exterior de Jordan (que ni tan sólo es finitamente aditiva); es fácil ver que dicho conjunto C cumple la hipótesis del tema y tiene extensión exterior igual a 2 (pero medida boreliana 1).

Pedro Pi Calleja

San Juan, mayo de 1944.