

NUCLEO DE FISICA

INFORMES Y COMUNICACIONES DE SUS DOS PRIMERAS REUNIONES

1ª Reunión. Córdoba, Observatorio Astronómico. Noviembre 1943

Preside: Dr. ENRIQUE GÁVIOLA

SESION DEL 27 DE NOVIEMBRE DE 1943

Informes:

C. MOSSIN KOTIN (Buenos Aires). *El problema de intensidad en la teoría de la difusión de los rayos X.*

En este trabajo, introducción de uno experimental, se hace un análisis de todos los factores conocidos que influyen en la intensidad de reflexión de los rayos X mediante cristales. Un examen detenido de los métodos experimentales y en particular del método Debye-Scherrer-Hull, evidencia discrepancias entre los resultados teóricos y experimentales. Las experiencias con elementos que pertenecen cristalográficamente al sistema exagonal (realizadas por primera vez entre nosotros) lo prueban. Estas diferencias hacen entrever nuevas posibilidades teóricas y experimentales; en este último sentido está orientado el presente trabajo.

Discusión. - B. Levi (Rosario) observa que, a pesar de las dificultades que se tienen en poder asegurar detalles estructurales submicroscópicos de la materia, le parece que poco se pueda esperar de los intentos de descripción fenomenológica como choques, reflexiones, refracciones, etc., si en esos detalles no se entra por lo menos en forma de hipótesis. Para explicar el valor de tal observación presenta un resultado obtenido recientemente y que va a aparecer en el próximo número del Boletín del Instituto Matemático de Rosario «*Mathematicae Notae*» a propósito de la experiencia de Mariotte sobre el choque de las bolas. Resulta del cálculo que la explicación que se da de costumbre a esa experiencia la cual considera el choque en forma global y tal que, de ser cierta, debería aplicarse a cualquier sistema de

masas iguales en contacto, es del todo insostenible, porque en el caso de masas cilíndricas iguales el cálculo deja presumir una divergencia apreciable mientras se llega a una confirmación matemática satisfactoria de la conocida experiencia cuando se tiene en cuenta la forma esférica de las superficies de contacto.

Comunicaciones :

E. GAVIOLA (Córdoba). *El fenómeno cometario.*

Se ha supuesto, hasta ahora, que los cometas son enjambres de meteoros o nubes de polvo y gas de un diámetro conjunto muchas veces mayor que el de la tierra. Las partículas meteóricas tendrían, en cambio, diámetros del orden de la longitud de onda de la luz visible. El supuesto se basaba en los hechos siguientes:

1º. Nunca ha sido observado un ocultamiento o eclipse de una estrella por un cometa, ni siquiera la absorción parcial de su luz;

2º. Un cometa no proyecta sombra visible sobre el sol;

3º. Siendo la masa de un cometa del orden 10^{-7} (tierra = unidad) y el volumen por lo menos 10^3 , la densidad media de la cabeza resulta del orden 10^{-10} ;

4º. En las mismas órbitas cometarias se observan enjambres meteóricos.

El supuesto en boga es dinámicamente insostenible: un enjambre meteórico se distribuiría sobre toda la órbita en poco tiempo, por imperio de la tercera ley de Keplero.

Si suponemos que un cometa es un cuerpo sólido de unos 10 kilómetros de diámetro (orden de magnitud) y que al calentarse por acercamiento al sol se desgasa (como los electrodos de las lámparas de radio) emitiendo las componentes volátiles en forma pacífica primero y en forma de erupciones violentas, con acompañamiento de nubes de polvo, después, pueden interpretarse sin dificultad todos los hechos conocidos.

Eclipses cometarios de estrellas no han sido observados porque duran un tiempo del orden de magnitud de un segundo y pueden verse sólo desde una franja de 10 km. de ancho, siendo imposible predecir la posición de la franja.

La sombra de un cometa sobre el sol es invisible porque un buen telescopio, en condiciones de buena visibilidad, resuelve apenas un segundo de arco y un cometa proyecta una sombra del orden de un quincuagésimo de segundo.

El diámetro observado de lo que se llama cabeza o núcleo en la literatura, es el diámetro de la atmósfera de gas y polvo producida por el desgasamiento. El núcleo sólido mismo es prácticamente invisible por su pequeña sección. Los enjambres meteóricos observados en las órbitas de algunos cometas son o congénitos con el cometa o producidos por las erupciones cometarias y distribuidos por la tercera ley de Keplero.

R. PLATZECK (Córdoba). *Teoría de los errores de sistemas ópticos.*

Se generaliza la teoría de los sistemas ópticos centrados desarrollada por Seidel y Schwarzschild para el tercer orden y por Kohlschütter para el quinto, obteniéndose sucesivamente los errores de un orden cualquiera.

SESION DEL 28 DE NOVIEMBRE DE 1943

Informes :

G. BECK (Córdoba). *Polarización de rayos neutrónicos.*

Informe sobre los trabajos hechos para la polarización magnética de neutrones, para la determinación experimental del momento magnético del neutrón y para el estudio de la depolarización de neutrones en substancias ferromagnéticas no saturadas. (Trabajos de F. Bloch, etc.).

G. BECK (Córdoba). *El estado actual de la teoría del mesotrón.*

Informe sobre las tentativas hechas para conseguir una descripción teórica del comportamiento de los mesotrones.

Comunicaciones :

J. BOBONE (Córdoba). *Cálculo de la precesión de los equinoccios para estrellas circumpolares.*

Es bien conocida la dificultad que presentan las posiciones de estrellas circumpolares para ser llevadas de un equinoccio a

otro. Ello puede subsanarse, sustituyendo sus posiciones normalmente dadas en coordenadas esféricas (α y δ), por los cosenos directores de las mismas, ligados por las relaciones sencillas:

$$\lambda = \cos \delta \cdot \cos \alpha$$

$$\mu = \cos \delta \cdot \sin \alpha$$

$$\nu = \sin \delta.$$

El efecto producido por la precesión de los equinoccios sobre estas coordenadas, es fácilmente desarrollable en serie de Fourier respecto al tiempo. Para obtener una exactitud más que suficiente, no será necesario tener en cuenta nada más que los términos de tercer orden.

Si bien el método precedente puede ser aplicado a cualquier posición celeste, es sólo práctico en astros muy circumpolares (entre 84 grados y el polo).

2ª Reunión. Buenos Aires. Instituto de Física. Abril 1944

Preside: Dr. TEÓFILO ISNARDI

SESION DEL 12 DE ABRIL DE 1944

Informes:

G. BECK (Córdoba). *Trabajos nuevos sobre la teoría del campo.*

Informe sobre los últimos trabajos de P. Dirac, M. Born y H. W. Peng, W. Heisenberg y E. Stueckelberg, discutiendo las dificultades fundamentales de la teoría cuántica de los campos.

Comunicaciones:

E. GALLONI (Buenos Aires). *Sobre la estructura cristalina del Pt_3O_4 .*

Se han aplicado los fenómenos de difracción de rayos X al estudio de un óxido de platino, deduciendo la fórmula química y estructura cristalina.

La cantidad de óxido de que se disponía, formada sobre un alambre de platino en condiciones no del todo conocidas, era tan pequeña que no podía recurrirse a ningún tipo de análisis químico.

Un diagrama tipo Debye-Scherrer indicó que se trataba de una estructura de cubos centrados de arista $a=6,22 \text{ \AA}$.

Con microfotómetro se determinó la intensidad de las distintas reflexiones del diagrama; y admitiendo la fórmula:

$$I = p \cdot F_{hkl}^2 \cdot f(\vartheta) \cdot A \cdot e^{-2M} \quad (1)$$

en la cual es:

p = multiplicidad del plano hkl

F_{hkl} = factor de estructura

A = factor de absorción

e^{-2M} = factor de temperatura

$$f(\vartheta) = \frac{1 + \cos^2 2\vartheta}{\sin^2 \vartheta \cos \vartheta};$$

se calcularon los factores F_{hkl} .

Se sabe que F_{hkl} , o factor de estructura, mide la relación que existe entre la amplitud de la onda difractada por la celda elemental en una cierta dirección y la que tendría una onda difractada por un único electrón colocado en el origen.

Los valores numéricos del factor de absorción y del de temperatura se tomaron del trabajo de F. C. Blake, Rev. Mod. Phys. 5, 169, 1933. Pero de la fórmula (1) se deducen los valores de F_{hkl} con una indeterminación en cuanto al signo. Para salvarla hicimos la siguiente consideración: tratándose de una malla formada por átomos pesados, de Pt , cuyo número atómico es 195 y otros livianos, de oxígeno cuyo número atómico es 16, es evidente que la contribución de los átomos pesados será preponderante sobre la de los livianos. De modo que buscando una distribución de átomos de platino que dé una repartición de intensidades próxima a la que se ha obtenido experimentalmente, el agregado de los átomos de oxígeno sólo producirá pequeñas alteraciones que no modificarán sustancialmente las intensidades.

Ensayadas todas las distribuciones posibles de átomos de platino se encontró que sólo una resultaba aceptable y las res-

tantes se alejaban notablemente de la distribución de intensidades buscada (el número total de posibilidades de ubicación de los átomos no es muy grande por las condiciones de simetría que deben satisfacerse).

Hallada en distribución satisfactoria de los átomos de platino se calcularon los factores de estructura correspondientes a las diversas reflexiones observadas y se colocaron los signos obtenidos a los valores observados.

Teniendo ahora los F_{hkl} en valor y signo, aplicamos el método de las series de Fourier para hallar la proyección de la densidad electrónica en la malla sobre el plano [100]. Para ello se toman los F_{hko} . Los máximos hallados nos dieron la ubicación de los átomos de platino en los lugares previstos y la de los átomos de oxígeno. Resultó de este análisis que en cada cubo elemental debe haber un átomo de platino en los puntos de coordenadas $\frac{1}{2} 00, 0 \frac{1}{2} 0, 00 \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \frac{1}{2} 0, \frac{1}{2} 0 \frac{1}{2}, 0 \frac{1}{2} \frac{1}{2}$, es decir, en los puntos medios de las aristas y en los centros de las caras; y un átomo de oxígeno en los puntos de coordenadas $\frac{1}{4} \frac{1}{4} \frac{1}{4}, \frac{1}{4} \frac{1}{4} \frac{3}{4}, \frac{1}{4} \frac{3}{4} \frac{1}{4}, \frac{3}{4} \frac{1}{4} \frac{1}{4}, \frac{1}{4} \frac{3}{4} \frac{3}{4}, \frac{3}{4} \frac{1}{4} \frac{3}{4}, \frac{3}{4} \frac{3}{4} \frac{1}{4}$; es decir, en los puntos $\frac{1}{4}$ y $\frac{3}{4}$ de cada diagonal. Hay, por lo tanto, en cada celda elemental, seis átomos de platino y ocho de oxígeno. La fórmula química será pues Pt_3O_4 y la densidad teórica resulta 8,8 g/cm³. El problema consiste entonces en tratar de preparar este óxido por vía química y verificar si la densidad y la estructura cristalina concuerdan con estos resultados.

En la comunicación del Dr. Rodolfo H. Busch pueden verse los resultados alcanzados hasta ahora.

Nota: Más detalles sobre este trabajo pueden consultarse en Galloni y Roffo - The Crystalline Structure of Pt_3O_4 , J. Chem. Phys. 9, 957, 1941.

R. H. BUSCH y J. T. D'ALESSIO (Buenos Aires). *Sobre los óxidos de Platino.*

Determinada la estructura cristalina atribuída al Pt_3O_4 nos

propusimos verificar la existencia de dicho óxido y su obtención en cantidad suficiente como para verificar su estructura y demás propiedades físicas y químicas.

En 1877 Jörgensen (J. prakt. Chem., 124, 16n. F., 344. 1877) describió el método de preparación de un óxido de fórmula Pt_3O_4 . Posteriormente Wöhler y colaboradores (p. ej. Zs. f. Elektrochem. 15, 129, 1909), encontraron que las sustancias obtenidas eran mezclas, de modo que no se conocía ningún óxido de la composición buscada.

Comenzamos ensayando el método de preparación de Jörgensen, obteniendo efectivamente mezclas de óxidos. Decidimos disminuir gradualmente la temperatura de preparación, obteniendo óxidos de mayor contenido de oxígeno.

Partiendo de éstos determinamos las curvas de tensión de oxígeno para ir pasando sucesivamente a los compuestos menos oxigenados obteniéndolos al estado de pureza. Ya Wöhler (l. c.) había intentado obtener estas curvas de equilibrio, llegando a la conclusión de que no existían, porque se forman soluciones sólidas entre los diversos óxidos.

La dificultad para seguir este camino reside fundamentalmente en la obtención del PtO_2 anhidro, pues habitualmente se obtienen hidratos, de los cuales el más conocido es el $PtO_2 \cdot 4H_2O$ que generalmente se obtiene al estado de gran subdivisión, lo cual dificulta la purificación.

Para la obtención de las curvas de equilibrio utilizamos un aparato que consta de una ampollita (conteniendo la sustancia) conectada a un tubo en U con P_2O_5 comunicado con un manómetro, y con la bomba de vacío. La ampolla puede introducirse en un horno cuya temperatura determinamos con un pirómetro.

La primera parte de las curvas que se obtienen es muy complicada y debe procederse lentamente a la deshidratación de la sustancia, cuyo progreso se observa por el estado del P_2O_5 . Procediendo con mucho cuidado se logra llegar a una curva que es la primera que puede reproducirse. Comienza alrededor de $150^\circ C$ y corresponde a la descomposición de PtO_2 en Pt_2O_3 y O_2 . La curva siguiente comienza alrededor de 300° y corresponde a la descomposición del Pt_2O_3 en Pt_3O_4 y O_2 . Este método conduce entonces a la preparación del óxido buscado, y nos ha permitido comprobar que su diagrama de rayos X

coincide con el del óxido de Galloni. Sin embargo algunas de nuestras experiencias nos condujeron a óxidos con los cuales no se obtiene diagrama, sin que hasta ahora estemos en condiciones de explicar este comportamiento. El Pt_3O_4 comienza a descomponerse a unos 400° y la presión alcanza el valor de una atmósfera a unos 500° .

En nuestras experiencias no hemos observado la formación de PtO , porque la descomposición del Pt_3O_4 conduce directamente a Pt . El PtO fué preparado por Wöhler pero de acuerdo a nuestras experiencias parece probable que no exista como fase estable de la descomposición del PtO_2 .

R. PLATZECK (Córdoba). *Un nuevo método de fotometría.*

Consiste en un procedimiento que permite hacer comparaciones entre las estrellas y objetos celestes extensos caracterizados por una repartición de intensidades no uniforme, como cometas, cúmulos estelares, nebulosas, etc. En lugar de hacer observaciones en el plano focal o en sus inmediaciones se estudian las imágenes de la pupila de salida del instrumento. La escala se obtiene de alguna estrella brillante haciendo uso de un instrumento múltiple que permite obtener simultáneamente una serie conveniente de puntos. El dispositivo es también adecuado para la fotometría de precisión de las estrellas brillantes.

SESION DEL 13 DE ABRIL DE 1944

Comunicaciones:

E. GAVIOLA (Córdoba). *Modelos físicos de Novae.*

Los modelos físicos de Novae construídos hasta el presente tienen el grave inconveniente de poseer simetría central. La observación muestra que la materia emitida a grandes velocidades por las Novae lo es en forma asimétrica. Las nebulosas producidas por Nova Persei o por Nova Cancri son, no sólo asimétricas, sino de estructura complicada.

Las velocidades de emisión de materia son del orden de 1000 km/seg. Tales velocidades no pueden ser de origen térmico. La máxima velocidad de desplazamiento térmico obtenible a una temperatura dada es la velocidad molecular. Para que un átomo

de oxígeno alcance la velocidad indicada haría falta una temperatura inicial del orden de 10^9 grados Kelvin, muy superior a todo lo que se ha supuesto hasta ahora en astronomía e inconsistente con los modelos estelares.

Para explicar el aumento en brillo de 10^4 de una Nova, acompañado de disminución de la temperatura efectiva de los gases emitidos, es necesario suponer que la superficie radiante aumenta 10^8 veces y el volumen 10^{12} veces. Si el aumento de volumen es adiabático, para obtener una temperatura final de 6000° K hay que suponer una temperatura inicial de 10^{11} hasta 10^{12} grados Kelvin, lo que es absurdo.

La emisión no puede ser, pues, explicada por erupciones volcánicas a fuente térmica.

Las velocidades radiales de los distintos espectros de absorción que aparecen sucesivamente en los procesos Novae, si bien diferentes para distintos objetos, siguen una cierta secuencia ordenada que recuerda a las familias radioactivas.

(Ningún proceso radioactivo conocido es capaz de emitir moléculas o átomos a 3000 km/seg. Estamos, pues, en presencia de descomposición o fisión radioactiva de núcleos más pesados que el uranio, presentes en las estrellas. Los productos directos e indirectos de esta descomposición parecen ser, a más de electrones, protones y helio, átomos de oxígeno, nitrógeno, etc.

VELOCIDADES RADIALES DE ESPECTROS DE ABSORCION

<i>Nova</i>		<i>Pre-Max.</i>	<i>Principal</i>	<i>difuso Reforzado</i>	<i>Orión</i>	<i>Nitrógeno</i>
Persei	1901	— 700	— 1270	— 3400	— 3650	— 3700
Geminorum	1912	— 450	— 800	— 1370	— 1650	— 1850
Aquilae	1918	— 1300	— 1450	— 2200	— 2700	— 2700
Cygni	1920	— 400	— 700	— 1370	— 2500	— 2500
Pictoris	1925	— 70	— 285	— 750	— 1300	— 1450
Hereulis	1934	— 176	— 315	— 760	{ — 450 — 1000	
Lacertae	1936	— 1300	— 1500	— 3250		— 3500

El proceso Nova sería, pues, una o más erupciones volcánicas producidas por descomposición de núcleos más pesados que el uranio. La rotación de la estrella unida a las erupciones producen las formas caprichosas de las nebulosas observadas.

G. KNIE (Buenos Aires). *Anillos algebraicos en la teoría del spin.*

Las tres componentes del spin 1: σ_1 , σ_2 , σ_3 consideradas como números hipercomplejos, determinan anillos algebraicos. El carácter de anillo se puede reconocer cómodamente en un subanillo abeliano que tiene como base σ_1^2 , σ_2^2 , σ_3^2 . Siendo $\sqrt{2}$ la longitud del vector del spin, no hay más que 3 diferentes productos, cualquiera que sea el número de factores:

$$\sigma_2^2 \sigma_1^2 = \sigma_1^2 \sigma_2^2 = 1 - \sigma_3^2$$

$$\sigma_2^2 \sigma_3^2 = \sigma_3^2 \sigma_2^2 = 1 - \sigma_1^2$$

$$\sigma_1^2 \sigma_3^2 = \sigma_3^2 \sigma_1^2 = 1 - \sigma_2^2$$

Todos los demás productos se reducen a éstos o se anulan debido a

$$\sigma_1^2 \sigma_2^2 \sigma_3^2 = 0 \quad \text{y a} \quad \sigma_1^4 = \sigma_1^2 \quad \text{etc.}$$

Hay tres representaciones unidimensionales,

$$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = 1; \quad \sigma_3^2 = 0$$

y dos que se obtienen por intercambio de los índices.

R. PLATZECK (Córdoba). *Teoría general de los errores ópticos.*

Se presenta una modificación de la teoría de R. A. Sampson, la que se limita al tercer orden, con lo que se consigue generalizarla para errores de cualquier orden. A continuación se expone el procedimiento general para calcular los errores de todos los órdenes de un sistema centrado, a partir de cualquiera de las teorías basadas en la noción de función característica o «Eikonal». Como ejemplo se desarrolla la teoría general a partir de la función «Eikonal» angular (Hamilton-Schwarzschild)

con el objeto de mostrar en detalle la teoría de eliminación de variables introducida.

J. T. D'ALESSIO (Buenos Aires). *Sobre la medición de la tensión superficial de los líquidos.*

Se ha hecho un estudio crítico de los diversos métodos estáticos de medición de la tensión superficial de los líquidos; y en particular de los métodos llamados «de ruptura», que son convenientes cuando se requiere gran número de determinaciones.

El método del tensiómetro de Du Nöuy sólo da valores aceptables cuando se aplican los factores empíricos de corrección de Harkins y Jordan (J. Am. Chem. Soc. 52, 1751, 1930).

Lenard y colaboradores (Ann. d. Phys. 74, 38, 1924) han propuesto utilizar un estribo recto. Este cuerpo de arranque tiene ventajas sobre el anillo porque sus dimensiones están mejor definidas y su teoría, más simple, ha sido bien desarrollada.

Los procedimientos que se han propuesto para formar la lámina líquida y medir la fuerza P de ruptura (P máximo) o no son adecuados o requieren instalaciones complicadas.

En el presente trabajo se propone un método de ruptura en el cual se utiliza el estribo de Lenard y una balanza analítica del tipo «cadena» («chainomatic») de construcción especial, a la que se ha adaptado un dispositivo simple para elevar la cruz, sugerido por el Dr. Teófilo Isnardi.

La formación de la lámina líquida es muy satisfactoria y resulta fácil la medición de P . Se completa la instalación con un termóstato fijo y una ampolla adaptada para renovar la superficie del líquido en examen.

La temperatura se determina directamente en éste.

Se ha determinado la tensión superficial del benzol utilizando un estribo construido siguiendo las indicaciones de Lenard, obteniéndose para este líquido a 15,3° C, 28,48 dina/cm., que sólo difiere en 1 % del valor 28,51 dina/cm. calculado para esta temperatura a partir del valor patrón a 20° C dado por las Int. Crit. Tables.

El error probable del patrón es del mismo orden, de modo que la concordancia es muy satisfactoria. Las diferencias entre

determinaciones reiteradas son menores aún; estudiando los errores sistemáticos (control de la caja de pesas, exactitud de la balanza, temperatura, etc.) podría mejorarse aún la precisión.

Los resultados experimentales se obtuvieron aplicando la fórmula reducida de Lenard:

$$\alpha = \alpha' - r \left(\sqrt{2\alpha's} - \frac{2\alpha'}{l} \right) + r^2 \left[\left(1 + \frac{\pi}{4} \right) s - \frac{3}{l} \sqrt{2\alpha's} \right]$$

en la cual es

s : peso específico del líquido

l y r : long. y radio del alambre de medición

$$\alpha' = \frac{P}{2l}.$$

Se han efectuado también determinaciones de la tensión superficial del benzol con la instalación descrita, pero usando el anillo de un tensiómetro y aplicando los factores de corrección de Harkins y Jordan, se ha obtenido la máxima precisión alcanzable.

Se ha verificado experimentalmente la función $P=f(h)$; (h =altura) que propone Lenard; comprobando la existencia y midiendo el segundo máximo de $P=f(h)$ previsto por la teoría (Bull. Nat. Res. Council, 69, 56, 1929) y que es motivo de discusión.

Los valores de la tensión superficial del agua, obtenidos a partir del primero y del segundo máximo de P son concordantes.

M. BUNGE (Buenos Aires). *Una nueva representación de los tipos de fuerzas nucleares.*

Se introducen operadores que, formalmente, son idénticos a los utilizados en la teoría de Dirac del electrón relativista, y que permiten dar cuenta de los 4 estados cuánticos del nucleón en la aproximación no-relativista. Con esta nueva notación se excluye el uso explícito del «spin isotópico», el cual es sinteti-

zado con el spin ordinario en una sola variable tetravalente, el operador del «carácter». Mediante estos nuevos operadores se forman los distintos potenciales escalares no-relativistas teóricamente posibles, guiándose por criterios de simetría y de permanencia. Luego se aplican los mismos al problema del deuterón, y finalmente se discuten las ventajas y limitaciones de la representación introducida.

VARIA

17. *Sobre el problema de Alhazen.* Ibn al-Haytam, entre los latinos Alhazen, es uno de los grandes sabios árabes. Ingeniero, físico y astrónomo, floreció hacia el primer tercio del siglo XI, sobresaliendo especialmente por su *Optica* que puede considerarse como un puente natural, entre las antiguas de Euclides y Ptolomeo y las medievales de R. Bacon y Witelo. En ella figura el conocido “problema de Alhazen” que, físicamente, consiste en determinar la posición de la imagen de un objeto A visto desde B sobre un espejo cilíndrico, o, geométricamente, en lo siguiente: Dada una circunferencia de centro O y dos puntos A y B exteriores, determinar sobre la circunferencia los puntos M tales que la recta OM biseque el ángulo AMB. Es un problema de cuarto grado que Alhazen resolvió geométricamente mediante la intersección de una circunferencia con una hipérbola. En efecto, y el lector puede comprobarlo fácilmente, los puntos M se obtienen como intersección de la circunferencia de centro O con la hipérbola equilátera de asíntotas paralelas a las bisectrices del ángulo AOB y cuyo centro es el punto medio del segmento A'B' siendo A' y B' los inversos de A y B respecto de la circunferencia. Es fácil además comprobar que siempre hay uno y solo un punto M que satisfaga al problema óptico y está situado en el semiángulo de AOB cuyo lado contiene aquél de los dos puntos A y B más próximo a O.