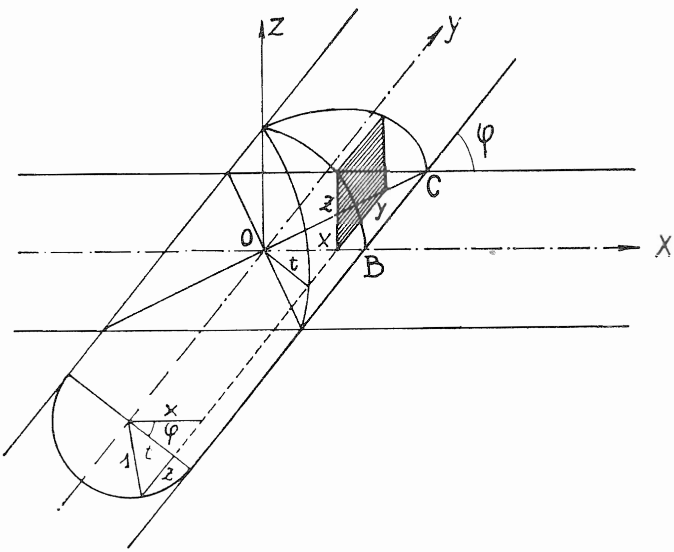
CUESTIONES ELEMENTALES RESUELTAS

16. *Dos cilindros circulares rectos, del mismo radio* $r=1$ *y de alturas ilimitadas en ambas direcciones, están colocados de modo que sus ejes se cortan bajo un ángulo* φ. *Determinar, para* $0<\varphi\leqq 90^{\circ}$, *el volumen* $V(\varphi)$ *de la «penetración» o sea del conjunto de los puntos que pertenecen a ambos cilindros a la vez.*



Solución. Calcularemos primeramente la parte de volumen correspondiente a la base OBC. Consideremos un rectángulo (ver figura) de altura Z y de base $Y=X$, por ser OBC isósceles (para una X cualquiera tiene la ordenada $Y=X$).

Teniendo en cuenta que $t=X\operatorname{sen}\varphi$ y que $Z=\sqrt{1-t^2}$ en el triángulo rectángulo de hipotenusa igual a $r=1$ y catetos Z y t, se tiene:

$$Z=\sqrt{1-X^2\operatorname{sen}^2\varphi}.$$

Por lo tanto el área de dicho rectángulo es: $a(X)=X\,.\,Z=\sqrt{1-X^2\operatorname{sen}^2\varphi}.$

Obtendremos el volumen correspondiente a la base OBC con sólo sumar todos los prismas infinitesimales de base rectangular y alturas $dX \,.\, \text{sen}\,\varphi$; llevando al límite se tiene:

$$V_{OBC} = \int_0^{\text{cosec}\,\varphi} X \sqrt{1 - X^2 \,\text{sen}^2\,\varphi}\, dX \,.\, \text{sen}\,\varphi\,;$$

se ve fácilmente que el límite superior es $\text{cosec}\,\varphi$, abscisa del punto B.

Por otra parte, el rombo diametral común a ambos cilindros queda dividido por los ejes de éstos y las diagonales de aquél en ocho triángulos, y en éstos los prismas infinitesimales tienen las mismas bases, correspondientes a generatrices en los dos cilindros de igual altura, y las mismas alturas infinitesimales; se ha de integrar entre los mismos límites 0 y $\text{cosec}\,\varphi$.

Por lo tanto, el volumen total buscado será:

$$V(\varphi) = 16 \int_0^{\text{cosec}\,\varphi} \alpha(X) \,.\, \text{sen}\,\varphi\, dX = 16 \int_0^1 \sqrt{1 - t^2}\, \frac{t}{\text{sen}\,\varphi}\, \text{sen}\,\varphi\, \frac{dt}{\text{sen}\,\varphi} =$$

$$= \frac{16}{\text{sen}\,\varphi} \int_0^1 t \,.\, \sqrt{1 - t^2}\, dt = \frac{16}{3\,\text{sen}\,\varphi}$$

en donde para $\varphi = 90^\circ$; $V = \dfrac{16}{3}$; y para $\varphi \to 0^\circ$ el volumen tiende a ser tan grande como se quiera.

Generalizando para el caso de un radio r cualquiera queda:

$$V(\varphi) = \frac{16\, r^3}{3\,\text{sen}\,\varphi}\,.$$

Milton Agustín Quiroga