GENERALIZACION DEL CIRCULO DE MOHR Y DE LA ELIPSE DE LAME

por NICOLÁS KRIVOSHEIN
(Asunción, Paraguay)

SUMMARY. — It is shown that the graphic representation of the tensors (affinors, dyadics) by means of the Lamé's ellipse and Mohr's circle, used till now only for symmetrical tensors, is also applicable to the whole class of the tensors of the second range in two dimensions.

For the ellipse, the proof is done using the linear functional relation between two vectors, given by the tensor.

For the circle, it is the usual method of plotting an ellipse that gives the proof.

The ellipse of the general tensor is some bigger than that of the symmetrical tensor and is turned in the direction of the antisymmetrical component. His data are given by the expressions (5) and the plotting is shown in the fig. 4.

The circle of the general tensor has the same diameter as that of the symmetrical one, but his center do not lie on the nornal axis (as does the center of the Mohr's circle) but aside, in a distance equal to the antisymmetrical component.

Some applications to the Theory of Elasticity (total strain) are given.

For a threedimensional tensor, the generalisation of the ellipsoide is true and easy to proof. About the generalisation of the usual three-circle diagram, the Author means that it would be some difficult to obtain it.

El círculo de Mohr y la elipse de Lamé (o elipse de intensidad) que tan útiles son en las aplicaciones prácticas del cálculo tensorial, se han aplicado hasta ahora exclusivamente a los tensores simétricos (1). Mientras tanto es fácil demostrar que ambas figuras se construyen también para los tensores generales en dos dimensiones. La necesidad de una tal generalización es ur-

(1) Por lo menos en todos los textos que el autor ha visto se hace así. Véase por ejemplo: Prof. ENRIQUE BUTTY, *Introducción a la Física Matemtica*, Buenos Aires, 1931, tomo I, pp. 327-365; Dr. RICHARD GANS, *Introducción al Análisis Vectorial*, Editorial Labor, 1929, pp. 99-130; HÜTTE, *Manual del Ingeniero*, tomo I, 24 edición, versión castellana, pp. 161-162, 26ª edición, pp. 157-172; también diferentes textos de resistencia de materiales.

gente por tener los tensores generales varias aplicaciones, especialmente en la teoría de las deformaciones (2).

Sea

$$\Phi_s = \begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{vmatrix} \qquad (1)$$

un tensor simétrico duodimensional, referido a sus ejes principales (3).

Para él, como se sabe, se verifican las siguientes construcciones de las figuras arriba mencionadas: fig. 1, círculo de Mohr;

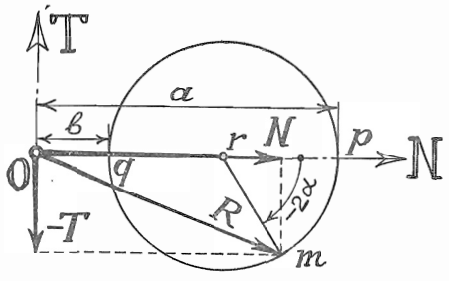

Fig. 1

fig. 2, elipse de Lamé. R es el vector resultante correspondiente a un versor n arbitrario (el vector N es paralelo a ese ver-

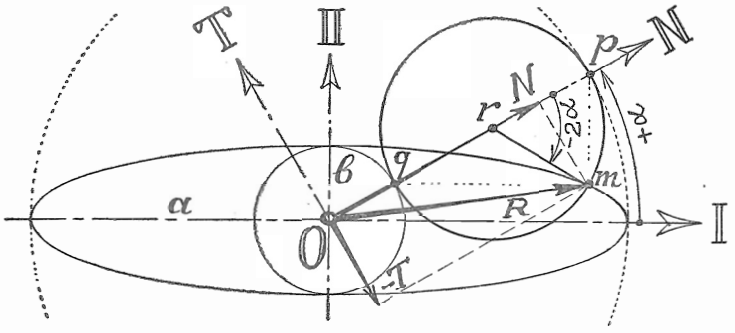

Fig. 2

(2) Véase, por ejemplo, la reciente publicación norteamericana CHARLES B. MORRIS, *Technique of Plywood*. En este libro, muy detallado, se hace uso del círculo de Mohr solamente para la deformación pura (que es un tensor simétrico), mientras que el giro se considera aparte.

(3) En las notaciones del Prof. Butty sería $a = a^{*}_{11}$; $b = a^{**}_{22}$.

sor). Su vértice m es el punto figurativo que recorre el círculo de Mohr en el sentido negativo dos veces mientras la elipse una vez en sentido positivo (cuando $ab > 0$, y en sentido negativo cuando $ab < 0$).

Siendo simétrico el tensor, son iguales los vectores Primero, Segundo y Resultante, de modo que es indiferente cuál de ellos consideramos. Cuando el tensor es un tensor general, se considera en las aplicaciones técnicas sea el vector Resultante (entonces el problema se reduce al de un tensor simétrico, por ejemplo la deformación pura); sea uno de los vectores Primero o Segundo (por ejemplo la deformación total). Cuál de los dos vectores viene a considerarse, depende del sistema de notaciones de los subíndices: si el primer subíndice corresponde a la componente del versor dado, y el segundo a la del vector, debe considerarse el vector Primero, en el caso contrario, el vector Segundo.

Ahora bien, sea

$$\Phi = \begin{vmatrix} a & -c \\ +c & b \end{vmatrix} \qquad (2)$$

un tensor general duodimensional referido a sus ejes principales, siendo a, b sus componentes normales principales, $\pm c$ la componente giratoria (4). Demostraremos a continuación que para este tensor también es posible construir un círculo análogo al de Mohr y una elipse análoga a la de Lamé y que el punto figurativo (m') de estas dos figuras será el vértice del vector (Primero o Segundo) correspondiente a un versor $\mathfrak{n}$ dado.

De antemano debemos suponer que los ejes principales de la nueva elipse no van a coincidir con los ejes principales del tensor, formando cada uno con su correspondiente un determinado ángulo. Por eso tomemos unos ejes auxiliares I', II' inclinados con respecto a I y II en un ángulo φ. Luego determinamos las coordenadas x, y del vértice m' del vector en el sistema $I'OII'$ (fig. 3). Más tarde impondremos la condición de que los ejes I' y II' sean principales de la elipse que surge como lugar de los puntos m'.

---

(4) En las notaciones del Prof. Butty, al considerar el vector Segundo, sería $-c = a^*_{12}$, $+c = a^*_{21}$. Para el vector Primero sería al revés, pero también tendrían que cambiarse las filas por columnas y viceversa.

Del mismo modo que para el tensor simétrico, designamos por α el ángulo entre el eje principal I y el eje N del versor n dado.

Para tener una demostración rigurosa de que el lugar de los puntos m' será una elipse debemos proceder como sigue:

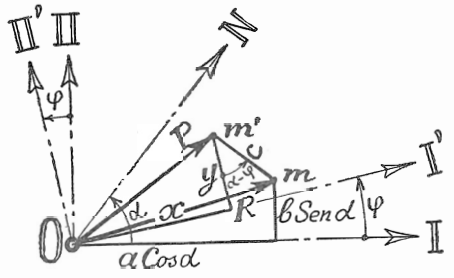

Fig. 3

1) Construir el vector (Primero o Segundo) Om' que se compone de tres vectores: de $a\cos\alpha$ y $b\,\mathrm{sen}\,\alpha$ que forman el vector resultante Om y del $c = mm'$ que es la componente giratoria o antisimétrica.

2) Tomar unos ejes I', II' arbitrarios, inclinados en φ con respecto a I, II.

3) Descomponer el vector Om' en sus componentes x e y paralelas a estos ejes.

4) Deducir las expresiones para x e y y ver si ellas representan la ecuación paramétrica de una elipse.

Dichas expresiones son

$$\begin{aligned} x &= a\cos\alpha\cos\varphi + b\ \mathrm{sen}\,\alpha\,\mathrm{sen}\,\varphi - c\,\mathrm{sen}\,(\alpha-\varphi) \\ y &= -a\cos\alpha\,\mathrm{sen}\,\varphi + b\,\mathrm{sen}\,\alpha\cos\varphi + c\cos(\alpha-\varphi) \end{aligned} \tag{3}$$

que se transforman en

$$\begin{aligned} x &= (a\cos\varphi + c\,\mathrm{sen}\,\varphi)\cos\alpha + (b\,\mathrm{sen}\,\varphi - c\cos\varphi)\,\mathrm{sen}\,\alpha \\ y &= (-a\,\mathrm{sen}\,\varphi + c\cos\varphi)\cos\alpha + (b\cos\varphi + c\,\mathrm{sen}\,\varphi)\,\mathrm{sen}\,\alpha \end{aligned} \tag{3'}$$

es decir, en funciones *lineales* de $\cos\alpha$ y $\mathrm{sen}\,\alpha$, resultando ser x, y coordenadas de los puntos de una elipse.

Para hallar ahora los semiejes A y B de esta elipse, e

imponer la condición de que I' y II' sean las direcciones de sus ejes principales, hace falta introducir un argumento accesorio $\alpha + \vartheta$. Las coordenadas se expresarán entonces así

$$\begin{aligned} x &= A \cos(\alpha + \vartheta) = A \cos\vartheta \cos\alpha - A \operatorname{sen}\vartheta \operatorname{sen}\alpha \\ y &= B \operatorname{sen}(\alpha + \vartheta) = B \cos\vartheta \operatorname{sen}\alpha + B \cos\alpha \operatorname{sen}\vartheta . \end{aligned} \tag{4}$$

Igualando los coeficientes de (3′) y de (4) se obtienen cuatro ecuaciones de las cuales se hallará

$$\vartheta = \alpha$$

$$\operatorname{tg} 2\vartheta = \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2c}{a+b}$$

$$A, B = \frac{\sqrt{(a+b)^2+4c^2} \pm (a-b)}{2} \tag{5}$$

El argumento accesorio $\alpha + \vartheta$ se mide desde el eje I', y siendo éste inclinado en φ con respecto a I, resulta que el nuevo radio (paralelo al eje N' en la fig. 4) que sirve para trazar la nueva elipse, debe inclinarse en $\varphi + \vartheta = 2\varphi$ con respecto al viejo radio (paralelo a N).

En la fig. 4 se ve el trazado de la elipse de los vectores

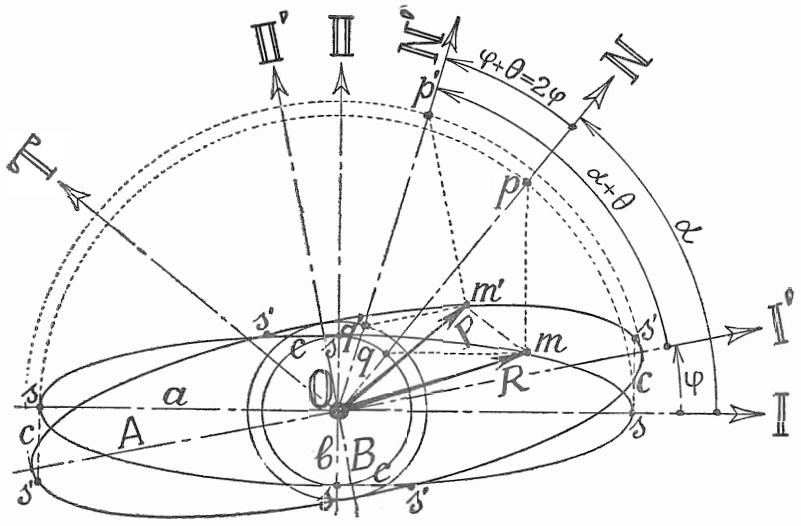

Fig. 4

resultantes o elipse de Lamé (semiejes a, b, radio N que coincide con el versor dado $\mathfrak{n}$, punto figurativo m) y la de los vectores Primero o Segundo (semiejes A, B, radio N', punto figurativo m').

Nótese también que los 4 segmentos ss' perpendiculares a los ejes I y II y el segmento mm' perpendicular a N, son todos iguales a la componente giratoria c.

Veamos ahora cómo se modifica el círculo de Mohr pasando de un tensor simétrico a un tensor general.

En el tensor simétrico, el segmento pq (figs. 2 y 4) era el diámetro de dicho círculo (fig. 1) y el triángulo pmq estaba inscrito en él. En el tensor general, es el segmento $p'q'$ (fig. 4) que debe formar el diámetro del círculo, *siendo siempre* N (no N') *y* T *los ejes a que se refiere.* El triángulo inscrito será ahora $p'm'q'$.

Para determinar las coordenadas del centro del círculo en el sistema NOT (fig. 5) se deduce, de la tercera de las (5)

$$\frac{A+B}{2}=\frac{\sqrt{(a+b)^2+4c^2}}{2}. \tag{6}$$

Comparando ésta con la segunda de las (5) se ve que los lados del triángulo rectángulo $Ot'r'$ (fig. 5) serán:

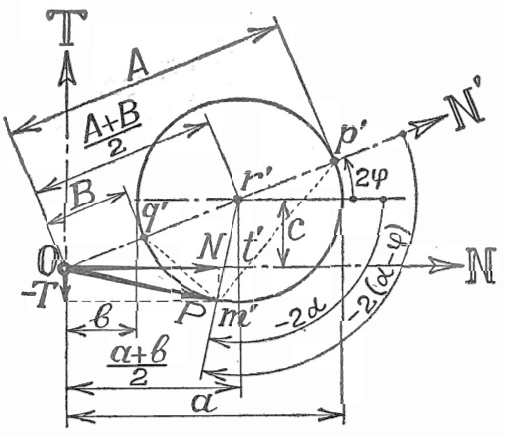

Fig. 5

$$Ot'=\frac{a+b}{2},\quad t'r'=c,\quad Or'=\frac{A+B}{2}=\frac{\sqrt{(a+b)^2+4c^2}}{2} \tag{7}$$

es decir, que el punto t' coincide con el centro del círculo de Mohr y que *el centro r' del nuevo círculo está encima del de Mohr a una altura c* (o abajo, si $c<0$).

De la tercera de las (5) se deduce también que

$$A-B=a-b$$

es decir, que *los diámetros de ambos círculos son iguales.*

A continuación consideraremos algunas aplicaciones prácticas de lo arriba expuesto.

Cabe recordar que en la teoría de las deformaciones el vector resultante representa el desplazamiento debido a la *deformación pura,* es decir, desplazamiento *relativo,* con respecto a un sistema móvil ligado a los ejes principales de deformación, mientras que el vector Primero o Segundo representa el desplazamiento debido a la *deformación total* (incluso el giro), es decir, desplazamiento *absoluto.*

De las dos figuras, especialmente el círculo del tensor general puede ser muy útil para la resolución de problemas prácticos. Su uso es igual que el del círculo de Mohr. Por ejemplo, en el caso de deformaciones, la abscisa del punto figurativo representa el alargamiento ε de un radio vector n, y la ordenada, su ángulo absoluto de giro γ (fig. 6). Los puntos u y v de

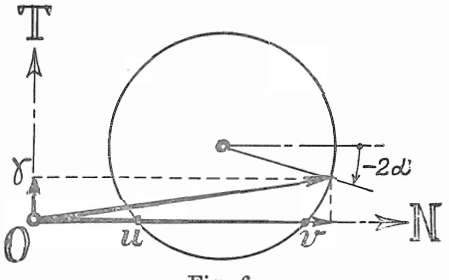

Fig. 6

intersección del círculo con el eje N, corresponden a dos direcciones para las cuales se anula el giro. Cuando el círculo se coloca enteramente a un lado del eje N, esto significa que el giro del elemento entero prevalece en toda parte sobre los giros producidos por la deformación pura, de manera que no hay radios vectores que giren en sentido opuesto.

Un caso muy corriente es el de desplazamiento simple (fig. 7). Este caso, aunque muy sencillo, presenta ciertas dificultades

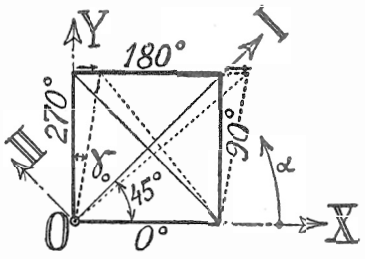

Fig. 7

didácticas para su explicación, especialmente en la parte donde se dice que la oblicuidad máxima de los radios vectores en el elemento es igual a *la mitad* del ángulo γ_0 de deslizamiento.

Por medio del círculo de deformación total esto se demuestra inmediatamente. De la fig. 7 se encuentran dos puntos del círculo: 1) Para 0° y 180° es $\gamma = 0$ (el segmento no gira), punto m'_1 en la fig. 8. 2) Para 90° y 270° es $\gamma = \gamma_0$, punto m'_2 en la fig. 8. Por estos dos puntos se traza el círculo de deformaciones totales (en línea llena) (5).

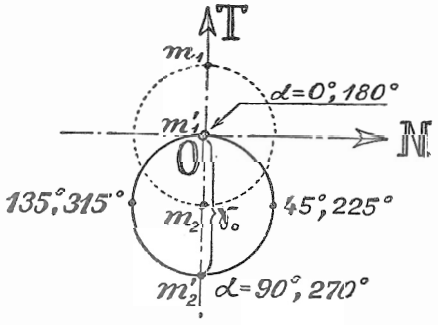

Fig. 8

Para ver el efecto de la deformación pura, hay que eliminar el efecto del giro, es decir, mover el círculo a la posición indi-

(5) Nótese que los ángulos α se cuentan aquí a partir del eje X y no del eje principal I como hacíamos antes. Este eje tiene una inclinación de 45° en la fig. 7, siendo para él $-2\alpha = -90°$ en la fig. 8 (punto 45°).

cada con línea punteada en la fig. 8 (círculo de Mohr). Sus ordenadas extremas (puntos m_1, m_2) son $\pm\frac{\gamma_0}{2}$ con lo que se cumple la explicación.

Pasemos ahora a decir unas pocas palabras sobre la misma generalización a los tensores *tridimensionales*.

Basándonos en el hecho de que los vectores Primero y Segundo de un tensor general (no solamente del simétrico) son funciones lineales del versor dado, sería fácil demostrar que el lugar de los vértices de cada uno de estos vectores representa un elipsoide, generalizándose de esta manera el concepto del elipsoide de Lamé.

En lo que se refiere al concepto de diagrama de tres círculos que suministra las componentes normal y tangencial del vector Resultante, parece ser difícil hallar una generalización del mismo, al menos que se encuentre una hábil maniobra para salvar las dos siguientes dificultades:

1) Que el eje de giro no coincide (en el caso general) con ninguno de los ejes principales del tensor, de manera que tendríamos que colocar los tres círculos a diferentes alturas (que corresponden a las componentes del giro), destruyéndose todo el diagrama.

2) Que las ordenadas del diagrama representan los *módulos* de las componentes tangenciales, no pudiendo estos sumarse *algebraicamente* con las componentes giratorias (la suma debe ser *vectorial*).

San Bernardino (Paraguay), Febrero de 1944.

VARIA

18. — Es admirable como pudo Poincaré en su corta vida escribir más de 30 volúmenes y cerca de 500 memorias dispersas en las revistas del mundo entero. Sólo conozco a Berthelot cuya producción sea comparable con la suya. He vivido muy cerca de estos dos grandes hombres y lo que más me ha sorprendido es la prodigiosa actividad de sus espíritus y la rapidez de sus concepciones.

He visto a Poincaré en la Sorbona, en la Academia y en el Bureau des longitudes y dondequiera que se le proponía resolver alguna dificultad su respuesta partía con la rapidez de una flecha. Cuando escribía una memoria la redactaba de un tirón, apenas sin correcciones y sin volver sobre lo ya escrito. — *Darboux.*