PROBLEMAS MIXTOS DE DIRICHLET

por J. Rey Pastor

En diversas cuestiones de Física se presentan problemas del tipo siguiente: Conocidos en uno o varios arcos del contorno c los valores de una función u, armónica en el recinto que limita c; y los valores de la conjugada v en los arcos restantes, determinar ambas funciones en todo el recinto, o sea la función analítica $f(z) = u + iv$. Este problema está incluído en otro más general; determinar u y v conocida una expresión lineal $au + bv$, de coeficientes variables, o bien constantes, pero distintos en diferentes arcos de c.

Las soluciones conocidas (cuya bibliografía nos ha facilitado gentilmente un distinguido colega) son muy complicadas por no haber reducido previamente el primer problema a su caso más simple; y nos proponemos mostrar brevemente que con tan elementalísimo artificio éste y otros problemas mixtos quedan incluídos en el clásico de Dirichlet. La única dificultad será la inherente a éste, sobre el comportamiento de la función en los puntos de discontinuidad infinita sobre el contorno; y también las delicadas condiciones de unicidad. Estas dos cuestiones no han sido resueltas todavía con generalidad; pero cuanto de ellas se sabe en el problema de Dirichlet es aplicable al problema mixto, que no es sino un caso particular de él.

El problema primero quedará resuelto apenas obtengamos solución para este otro, caso el más sencillo de aquél, por ser dos los arcos y constante una de las funciones:

I) *Determinar en el recinto simplemente conexo de contorno* $c = \alpha + \beta$ *funciones armónicas conjugadas* u, v, *regulares en el interior, con las condiciones siguientes de contorno*:

$$\begin{array}{lll} en\ \alpha: & u = U & \text{(función integrable del arco)} \\ en\ \beta: & v = 0. & \end{array}$$

Más general: Sean U_r los valores conocidos de u en los arcos α_r; V_r los valores conocidos de v en los arcos complementarios β_r, que componen conjuntamente el contorno c. Suponiendo resuelto el problema I, basta determinar en el recinto los $2n$ pares de funciones armónicas $(u_r, v_r), (u'_r, v'_r)$ por las siguientes condiciones de contorno:

$$
\begin{array}{llllll}
 & \alpha_1 & \alpha_2 \quad \alpha_n & & \beta_1 & \beta_2 \quad \beta_n \\
\left\{\begin{array}{l} u_1 = U_1, \\ u_2 = 0, \\ \dots\dots\dots \\ u_n = 0, \end{array}\right. & & \begin{array}{l} 0, \dots\dots 0 \\ U_2 \dots\dots 0 \\ \dots\dots\dots\dots \\ 0, \dots\dots U_n \end{array} & & \begin{array}{l} v_1 = 0, \\ v_2 = 0, \\ \dots\dots\dots \\ v_n = 0, \end{array} & \begin{array}{l} 0, \dots\dots 0 \\ 0, \dots\dots 0 \\ \dots\dots\dots\dots \\ 0, \dots\dots 0 \end{array}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{llll}
\left\{\begin{array}{l} u'_1 = 0, \\ u'_2 = 0, \\ \dots\dots\dots \\ u'_n = 0, \end{array}\right. & \begin{array}{l} 0, \dots\dots 0 \\ 0, \dots\dots 0 \\ \dots\dots\dots\dots \\ 0, \dots\dots 0 \end{array} & \begin{array}{l} v'_1 = V_1, \\ v'_2 = 0, \\ \dots\dots\dots \\ v'_n = 0, \end{array} & \begin{array}{l} 0, \dots\dots 0 \\ V_2 \dots\dots 0 \\ \dots\dots\dots\dots \\ 0, \dots\dots V_n. \end{array}
\end{array}
$$

Las funciones armónicas $u = \Sigma(u_r + u'_r), v = \Sigma(v_r + v'_r)$, son conjugadas y toman los valores prefijados en los respectivos arcos.

Método I. El problema I es en esencia equivalente al de Dirichlet. Suponiendo que el recinto es el primer cuadrante, siendo β el semi-eje $+x$, α el semi-eje $+y$, si se aplica la simetría respecto del eje x se tiene el semiplano $x \geqq 0$, donde la función buscada $f(z)$ toma valores conjugados en puntos conjugados; y como se conocen los valores $u = U$ en el semi-eje $+y$, y los mismos en el $-y$, la fórmula clásica que resuelve el problema de Dirichlet en el semiplano da la solución buscada:

[1] $$f(z) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} U(t) \frac{tz+i}{t+iz} \frac{dt}{1+t^2}$$

integral que se reduce al intervalo $(0, \infty)$ agrupando los elementos simétricos, donde U tiene igual valor; pero esta reducción no ofrece ventaja.

Si $U(t)$ es continua, esta solución es única si se impone la condición de regularidad en todo el dominio, admitiendo discontinuidad en algún punto del contorno.

Como la diferencia de dos soluciones $u = u_1 - u_2$, $v = v_1 - v_2$ cumple la condición $u = 0$ en α, $v = 0$ en β, el problema queda totalmente resuelto sumando a la solución dada por la fórmula anterior, la solución general de este segundo problema, que designaremos por $\omega(z)$.

Por ejemplo, el caso más sencillo del problema mixto, después de este caso homogéneo, es aquél en que se dan los valores constantes:

$$u = a \text{ en } \alpha, \quad v = b \text{ en } \beta$$

y la solución general es:

$$f(z) = a + bi + \omega(z)$$

Funciones regulares en el interior del cuadrante y contínuas en el contorno, que cumplen la doble condición $u = 0$ en α, $v = 0$ en β, son, por ejemplo: $z, z^3, z^5, \ldots\ldots z\sqrt{1+z^4}$, ... y cualquier combinación lineal de ellas. La solución general $\omega(z)$ está dada por toda función que transforme los semiejes $+x$, $+y$ en conjuntos situados en los ejes x, y respectivamente, algunos de cuyos segmentos pueden estar recorridos cualquier número de veces en uno y otro sentido. Tales recintos se pueden formar conectando convenientemente hojas en cualquier número a lo largo de segmentos de los ejes x, y. La transformación conforme en semiplano se efectúa fácilmente mediante la fórmula de Schwarz-Christoffel, la cual resuelve el problema general.

También es inmediata la solución del problema I suponiendo que el recinto dado sea semi-circular. Si β es el diámetro, donde $v = 0$, y α la semi-circunferencia superior, donde debe ser $u = U(t)$, la función buscada $w = f(z)$ transforma el semicírculo en un recinto simple o múltiple, con un segmento rectilíneo de contorno en el eje x, homólogo del diámetro, por ser en éste $v = 0$. Por el principio de simetría, al semi-círculo simétrico corresponde el recinto simétrico en la prolongación analítica; y como u toma valores iguales en puntos simétricos de ambas circunferencias la función queda determinada por la integral (*):

$$[2] \qquad f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U(t)\,\frac{\tau+z}{\tau-z}\,dt \qquad (\tau = e^{ti})$$

Cualquiera que sea el recinto simplemente conexo de contorno $c = \alpha + \beta$, basta trasformarlo en cuadrante cartesiano o en semi-círculo, según sea más cómodo, y la solución que llamaremos inicial queda expresada por las fórmulas anteriores. Para formar las soluciones singulares será preferible la reducción a semiplano o cuadrante.

Ejemplo 1: Problema mixto en el semiplano $y \gtreqless 0$. Si en la semirrecta α $(x \leqq 0)$ se da U como valor de u, y en la β $(x \gtreqless 0)$ es $v = 0$, basta sustituir $\sqrt{z}$ en vez de z en la fórmula [1].

(*) Véase por ej. nuestro *Resumen de la Teoría de funciones analíticas y sus aplicaciones Físicas.* Buenos Aires, 1917, pág. 91.

Ejemplo 2: Problema mixto en el círculo. En diversos problemas de Mecánica de Fluidos se presenta el problema mixto en que se da U en la semicircunferencia superior y $v = 0$ en la inferior. Basta sustituir en la fórmula [1] $\sqrt{i(1+z):(1-z)}$ en vez de z.

Si en vez de la semicircunferencia superior el arco α es el de amplitud $0 \leq t \leq \alpha$, la sustitución será $\sqrt{(z-q):(z-1)}/\sqrt[4]{q}$, donde $q = e^{\alpha i}$

Ejemplo 3: En el problema del movimiento de un fluido perpendicularmente a una lámina $-1 \leq x < 1, y = 0$, se conoce una función en una cara y la conjugada en la otra. Basta efectuar en [1] la sustitución de z por $\sqrt[4]{(1-z):(1+z)}$ y lo mismo en $\omega(z)$ para obtener las soluciones singulares.

Norma general: Es inútil escribir desarrolladamente, como hacen los autores, las complicadas fórmulas que a veces producen las sustituciones; y la razón es obvia: actuando z como parámetro, sería absurdo arrastrar ese peso muerto en el cálculo de la integral, cuando éste pueda hacerse explícitamente por métodos elementales; y en el caso general en que tal no acontezca, su cálculo en cada punto z se hará por métodos numéricos o gráficos para el *valor transformado* de z, utilizando los dispositivos especiales ya existentes para las integrales de los tipos [1] y [2] por su extraordinaria importancia. En todo caso huelgan las imponentes fórmulas obtenidas por los autores con artificios innecesarios.

Método II. El problema mixto I aquí tratado es un caso particular del llamado «tercer problema de contorno». Basta observar que la condición $v = \text{const.}$ en el arco β equivale a la anulación de la derivada v_s, o sea $u_n = 0$.

Basta, pues, aplicar los métodos conocidos para este tercer problema de contorno, que no tienen ventaja sobre el arriba expuesto.

Método III. De las fórmulas usuales en la teoría del potencial se deduce inmediatamente la expresión:

$$u(z) = \frac{1}{2\pi}\int_C [u\,(\frac{\cos rn}{r} + w_n) - u_n\,(w - \mathrm{l}r)]\,ds,$$

siendo r la distancia al punto interior z desde el punto variable sobre el contorno y w una función armónica cualquiera. Elegida ésta de modo que en α valga $\mathrm{l}r$, y en β sea $w_n = -(\cos rn):r$ resulta una fórmula muy simple, quedando reducido el problema a otro más sencillo, de solución inmediata en el círculo unidad.

Diversos problemas mixtos. Veamos cómo se resuelven fácilmente los diversos casos que pueden presentarse, según sea el dato conocido en cada uno de los arcos.

Datos: v y v_n. Como $v_n = u_s$, esto equivale a conocer v en un arco y por integración u en el otro, luego queda reducido al problema I.

Datos: u_s y v_s. Integrando, se conocen u y v en los respectivos arcos, luego también se reduce al problema I.

Datos: u_n y v_n. Estos equivale a conocer v_s y u_s respectivamente, luego se pasa al caso anterior, y de éste al I.

Datos: u y u_n. Conocido $v_s = u_n$ se deduce v, luego se pasa al problema I.

Merece especial mención el caso $v = 0$, $v_n = \text{const.}$ o sea: u función lineal de la longitud del arco, mientras v es nulo en el otro arco. La resolución es inmediata adoptando un recinto adecuado y reduciendo a él por transformación conforme cualquier otro.

Tales recintos sencillos son: la zona $0 \leqq y \leqq \pi$, en la cual la función $y - \pi$ cumple las condiciones impuestas, siendo ésta la única solución regular. O también se puede adoptar el primer octante formado por el semi-eje x, y la bisectriz del primer cuadrante, recinto en el cual la función $y - x$ se anula en dicha bisectriz, mientras vale 1 su derivada normal sobre el otro lado del ángulo.

Problema mixto lineal. Llamamos así al análogo al tratado en los cursos de Análisis, donde se consideran relaciones lineales entre los valores de la función u y de su derivada normal u_n. Mucho más sencillo es el problema siguiente, que se presenta en las aplicaciones, y parece no haber sido tratado: determinar las funciones conjugadas u y v en el recinto, conocida sobre el contorno una expresión lineal:

$$AU - BV = W$$

donde U y V son los valores de u y v en cada punto de c; y A, B, W son funciones cualesquiera (en general discontinuas) sobre este contorno.

Para la resolución supongamos que las funciones armónicas a y b definidas por los valores de contorno A y B son conjugadas, pues basta dividirlas en caso contrario por un factor conveniente, función del contorno. Resulta, pues, analítica la función $\gamma(z)=a+ib$; y llamando $w(z)$ a la función analítica cuya parte real vale W en c, la función buscada es

$$f(z)=u+iv=w(z)/\gamma(z).$$

El cálculo de ese factor de homogeneidad equivale a determinar la función conocido su argumento, problema bien conocido, pero en los casos simples el factor salta a la vista.

Ejemplo 1: En el cuadrante cartesiano sea α el semieje $+y$; β el semieje $+x$, y los coeficientes de la ecuación sean:

$$\text{en } \alpha: \quad A=1,\ B=0,\ W=U$$
$$\text{en } \beta: \quad A=0,\ B=1,\ W=0$$

Basta dividir en α por y, en β por x, y resulta: $\gamma(z)=a+ib=i/z$. La función U/y determina su conjugada por una integral curvilínea y queda resuelto el problema. Por ejemplo, si $U=y$ resulta $w(z)=-\frac{2i}{\pi}\, lz$, luego $f(z)=-\frac{2}{\pi} z.\, lz$.

Este método para resolver el problema I, incluido en el problema lineal como caso más sencillo, puede convenir sobre los expuestos antes.

Ejemplo 2: Sean los coeficientes siguientes sobre el contorno del primer octante:

$$\text{en } \alpha\ (y=x,\ x \gtreqless 0) \qquad A=1,\ B=1,\ W=1+2x^2$$
$$\text{en } \beta\ (y=0,\ x \gtreqless 0) \qquad A=1,\ B=0,\ W=1+x^2$$

Dividiendo en α por $2x$, en β por x, salta a la vista que $\gamma(z)=1/z$. Después de esa división es:

$$W=x+\frac{1}{2x} \text{ en } \alpha, \qquad W=x+\frac{1}{x} \text{ en } \beta,$$

luego W es la parte real de la función analítica $z+\frac{1}{z}$ y dividiendo por $\gamma(z)$ resulta $f(z)=1+z^2$.

Nota. — Es obvio que la ecuación puede proponerse en la forma $AV+BU=W$ y entonces es W la componente imaginaria del producto $(A+iB)(U+iV)$ debiendo determinarse su parte real. Así, en el caso $W=0$ el problema se reduce a determinar todas las funciones analíticas que son reales en el contorno, problema bien conocido; pero en los casos más sencillos no será preciso recurrir al método general.

Tal sucede, por ej., si los coeficientes A,B,W son constantes en cada arco, pues en el ángulo definido por las rectas que tienen estos coeficientes, la solución es $f(z)=z$, y cualquier otro recinto se transforma en él. Este sencillo método sirve también para el caso de tres arcos componentes del circuito, en cada uno de los cuales tienen los coeficientes valor constante; la generalización a cualquier número de arcos es un conocido problema algebraico.