DERIVACION E INTEGRACION DE FUNCIONES DE VARIABLE REAL TOMADAS EN VALOR ABSOLUTO

(MANUSCRITOS POSTUMOS)

por Arturo Fraile

Nota necrológica. — Insertamos a continuación la nota redactada sobre la base de los originales incompletos dejados por el malogrado matemático español Arturo Fraile, muerto el 10 de Julio de 1943 pocos días antes de cumplir 28 años. A pesar de su modesta carrera de Perito industrial, y a pesar también de haber vivido siempre en León, ciudad alejada de todo movimiento científico, realizó en su efímera vida interesantes trabajos, uno de los cuales vió la luz en las páginas de esta revista; un trabajo póstumo titulado "Ampliación de la geometría analítica ordinaria" ha sido publicado en la Revista matemática Hispano-Americana; y el otro trabajo póstumo, piadosamente recopilado por su hermano de los papeles incompletos, es el que se inserta a continuación como sentido homenaje al malogrado joven que con muy escasos conocimientos matemáticos dió tan evidentes muestras de su talento.

1. Sea $f(x)$ una función no definida en el punto x_0 del intervalo $[a, b]$ y uniforme y derivable en todos los demás puntos de dicho intervalo. Sea

$$\lim_{x \to x_0+} f(x) = l_d \quad \text{y} \quad \lim_{x \to x_0-} f(x) = l_i.$$

Llamamos *valores virtuales* de la función $f(x)$ en el punto x_0, para el cual no está definida, a los límites l_d y l_i.

Cuando la discontinuidad en x_0 es evitable $(l_d = l_i = l)$, l es —ya lo sabemos— el *verdadero valor* de $f(x_0)$. Si es $l_d \neq l_i$, llamamos *derivada virtual a la derecha* en x_0 a la derivada a la derecha obtenida a partir del valor virtual $f(x_0) = l_d$; la representamos por $f'_d(x_0)$. Análogamente, *derivada virtual a la izquierda*, $f'_i(x_0)$ es la derivada a la izquierda obtenida a partir del valor virtual $f(x_0) = l$. Cuando es $f'_d(x_0) = f'_i(x_0) = \zeta$, *convenimos en atribuir a $f'(x)$ el valor ζ en x_0* y lo llamamos *valor verdadero* de $f'(x)$ en x_0.

He aquí una justificación de este convenio: Si es $f'(x)$ continua en $[a, b]$, excepto, claro es, en x_0, los límites de $f'(x)$ en x_0 por ambos lados son iguales a ζ, y la discontinuidad es evitable en este punto.

2. Consideremos la función $y = \frac{|u|}{u}$ donde $u = \varphi(x)$ es uniforme y derivable. Esta función y no es, propiamente, $\operatorname{sg} u$: pierde la identidad con ella en los ceros de u, en los cuales y no está definida $\left(y = \frac{0}{0}\right)$ y $\operatorname{sg} u = 0$. Ambas funciones tienen en las raíces de $u = 0$ puntos de discontinuidad de primera especie: por la derecha tienen límite $\begin{cases} 1 \\ -1 \end{cases}$, y por la izquierda $\begin{cases} -1 \\ 1 \end{cases}$. Para todo x que no haga $u = 0$, las dos funciones y y $\operatorname{sg} u$ valen 1 o -1. Sus derivadas serán, pues, nulas para dichos valores de x. En los ceros de u, la función $\frac{|u|}{u}$ tiene iguales —nulas— las derivadas virtuales por la derecha y por la izquierda; con el convenio antes establecido, $\frac{|u|}{u}$ tiene derivada en las raíces de $u = 0$ y es también nula. La función $\operatorname{sg} u$, en los ceros de u, tiene: las dos derivadas virtuales iguales (nulas), y derivadas infinitas a ambos lados si se toma como base el valor $\operatorname{sg} 0 = 0$ que define a $\operatorname{sg} u$ en las raíces de $u = 0$. Así, pues, a pesar de las discontinuidades que, en general, tiene $\frac{|u|}{u}$, esta función, en virtud del convenio establecido antes, tiene derivada nula para todo x.

La función $\frac{|u|}{u}$ se presenta, como veremos, de un modo natural al obtener la derivada y la integral de $|u|$; por otra parte, vemos su gran analogía con $\operatorname{sg} u$, función ésta establecida «por enunciación». Nos parece, pues, más natural también llamar $\operatorname{sg} u$ a $\frac{|u|}{u}$, lo cual haremos en lo sucesivo.

3. Resulta, pues, que no sólo las constantes tienen derivada nula, sino que también algunas funciones la tienen. Estas funcio-

nes son de tal naturaleza que, mientras la variable independiente recorre el campo real, ellas sólo toman los valores de un conjunto numerable; valores «separados» unos de otros por puntos de discontinuidad de primera especie, en los cuales no están definidas estas funciones. Así, por ejemplo, $k\frac{|u|}{u}$, $\sum_1^n k_i \frac{|u_i|}{u_i}$.

Geométricamente se llega también a este tipo de funciones: La derivada de una poligonal rectilínea uniforme ha de ser una función que vaya tomando los valores de los coeficientes angulares. Problema éste resuelto ya ahora analíticamente: Una poligonal uniforme rectilínea tiene su ecuación del tipo (*)

$$y = \sum_{i=1}^{n} k_i |x - x_i| + mx + q,$$

y su derivada es, como veremos,

$$y' = \sum_{i=1}^{n} k_i \frac{|x - x_i|}{x - x_i} + m.$$

Con la existencia de estas funciones y la posibilidad de su manejo algébrico se desprende inmediatamente esta conclusión:

«Las funcionues primitivas de una dada se diferencian en una constante o en una función $\sum_{i=1}^{n} k_i \frac{|u_i|}{u_i}$ ».

Sea $F(x)$ función primitiva de $f(x)$. Podemos, por lo tanto, escribir:

$$\int f(x)dx = F(x) + k \frac{|\varphi(x)|}{\varphi(x)},$$

donde $\varphi(x)$ es uniforme y derivable. Si x_0 es una raíz de $\varphi(x) = 0$, en este punto la función primitiva $F(x) + k\frac{|\varphi(x)|}{\varphi(x)}$, no está definida. Supongamos que en un semientorno a la derecha de x_0 es $\varphi(x)$ positiva, y creciente en x_0; y sea $F(x_0) = \alpha$. Será

(*) Ver ARTURO FRAILE, *Ampliación de la Geometría Analítica ordinaria*, Revista Matemática Hispano-Americana, 1943.

$$\lim_{x \to x_0 -} \left[F(x) + k \frac{|\varphi(x)|}{\varphi(x)} \right] = \alpha - k,$$

$$\lim_{x \to x_0 +} \left[F(x) + k \frac{|\varphi(x)|}{\varphi(x)} \right] = \alpha + k.$$

La función primitiva $F(x) + k \dfrac{|\varphi(x)|}{\varphi(x)}$ tiene, pues, en x_0 un punto de discontinuidad de primera especia de oscilación $2k$.

Si $f(x)$ es integrable, podemos obtener una función primitiva de $f(x)$ que tenga discontinuidades de primera especie en los puntos que deseemos y con las oscilaciones que queramos. Si las discontinuidades han de presentarse en los puntos x_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) y queremos que las oscilaciones respectivas sean $2k_i$, la función primitiva será

$$F(x) + \sum_1^n k_i \frac{|x - x_i|}{x - x_i},$$

siendo $F'(x) = f(x)$. Para que las oscilaciones en los x_i valgan todas $2k$ basta escribir: $F(x) + k \dfrac{|\varphi(x)|}{\varphi(x)}$ donde $\varphi(x)$ sea una función tal que tenga los n ceros x_i.

4. Sea $y = |u|$ ($u = f(x)$ derivable). Poniendo $y = \dfrac{|u|}{u} . u$, y teniendo en cuenta que $\dfrac{|u|}{u}$ tiene derivada nula para todo x, es: $y' = u' \dfrac{|u|}{u}$. Así, pues: «La derivada de una función tomada en valor absoluto es igual a la derivada de la función submodular por la función signo de esta última».

A esto mismo se llega por más riguroso procedimiento. Para un incremento, Δx, el cociente incremental es

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{|u + \Delta u| - |u|}{\Delta x}.$$

Multiplicando numerador y denominador por $|u + \Delta u| + |u|$ resulta:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{(u+\Delta u)^2-u^2}{\Delta x[\,|u+\Delta u|+|u|\,]}=\frac{\Delta u}{\Delta x}\cdot\frac{2u+\Delta u}{|u+\Delta u|+|u|};$$

y, tomando límites, $y'=u'\cdot\dfrac{2u}{2|u|}=u'\dfrac{u}{|u|}$; o bien:

$$y'=u'\frac{|u|}{u}.$$

Podemos escribir la derivada así: $y'=|u|\dfrac{u'}{u}$, o sea: «La derivada de una función tomada en valor absoluto es igual a dicha función absoluta por la derivada de su logaritmo natural».

Se demuestra:

1º. $d(\sum\limits_1^n w_i)=\sum\limits_1^n dw_i$, sean o no absolutas w_i.

2º. Se conserva la regla de derivación del producto de funciones ordinarias para $|u|, v$, y $|u|.|v|$. Así, pues, también es posible la integración por partes.

3º. Se conserva la regla de derivación del cociente para $\dfrac{u}{|v|}$ y $\dfrac{|u|}{|v|}$.

4º. Función: $|u|^m$. Derivada: $m|u|^{m-1}u'\dfrac{|u|}{u}$.

» $a^{|u|}$. » $a^{|u|}.\, u'\,.\,\mathrm{sg}\, u\,.\, La$.

5. Como es $\displaystyle\int|u|dx=\int\frac{|u|}{u}u\,dx$, y $\dfrac{|u|}{u}$, por tener derivada nula, puede salir fuera del signo integral, será:

$$\int|u|\,dx=\frac{|u|}{u}\int u\,dx.$$

Es decir: «La integral de una función tomada en valor absoluto es igual a su función signo por la integral ordinaria».

A este mismo resultado conduce la integración por partes.

Obsérvese que, aun suponiendo constante el sumando de integración de $\int u\,dx$, el de $\int|u|dx$ es una función signo.

6. Tanto la derivada como la integral de una función absoluta nos han conducido a funciones de la forma $\frac{|u|}{u} \cdot v$; por ello se hace necesario el estudio de estas últimas.

Sean u y v funciones continuas y uniformes de x, y $a_1, a_2, \ldots, a_n$ los ceros de u. Si ningún a_i es cero de v y u es creciente o decreciente en los a_i, la función $y = \frac{|u|}{u} \cdot v$ tiene un punto de discontinuidad finita de primera especie en cada uno de los puntos de abscisa a_i, pues si es $\lim\limits_{x \to a_i} v = \alpha$ y u creciente en a_i, es $\lim\limits_{x \to a_i +} \frac{|u|}{u} \cdot v = + \alpha$ y $\lim\limits_{x \to a_i -} \frac{|u|}{u} \cdot v = - \alpha$ (si u es decreciente en a_i cambian los signos de los segundos miembros). En ambos casos la oscilación en a_i es 2α.

Si un cero a_k de u lo es a la vez de v, como es $\lim\limits_{x \to a_k} v = 0$ y $\lim\limits_{x \to a_k} \frac{|u|}{u} = \pm 1$, la oscilación de y en a_k es nula, y, por lo tanto, y es continua en $x = a_k$.

Cuando u alcanza un máximo o un mínimo en a_i, los límites de $\frac{|u|}{u}$ en a_i a la derecha y a la izquierda son del mismo signo y de valor absoluto 1; luego la oscilación en a_i es cero, y, por lo tanto, es y continua en a_i.

Resumiendo: Si u y v son continuas y uniformes, $\frac{|u|}{u} v$ también lo es, excepto en los ceros de u en los cuales u no alcance máximo ni mínimo y ninguno de estos ceros lo sea de v.

7. Si es u lineal tenemos:

$$\int |u| dx = \frac{|u|}{u} \frac{1}{u'} \int u \, du = \frac{1}{2u'} |u| \cdot u + \mu \frac{|u|}{u},$$

donde μ es constante o es otra función signo; ésta puede ser $\mu = k \frac{|u|}{u}$, en cuyo caso queda

$$\frac{1}{2u'} |u| u + k \equiv \frac{1}{2a} |ax + b| (ax + b) + k,$$

continua para todo x.

Si μ es una constante C,

$$\int |ax+b|\,dx = \frac{|ax+b|}{ax+b}\left(\frac{a}{2}x^2+bx+C\right) \qquad [1]$$

Según hemos visto, en este caso, sólo cuando la raíz $-\dfrac{b}{a}$ lo sea también de $\dfrac{a}{2}x^2+bx+C$ habrá continuidad en $-\dfrac{b}{a}$; para ello, $C=\dfrac{b^2}{2a}$, y queda, en efecto, $\dfrac{1}{2a}|ax+b|(ax+b)$.

Si es $C \neq \dfrac{b^2}{2a}$, [1] es discontinua en $-\dfrac{b}{a}$ y la oscilación vale $2C-\dfrac{b^2}{a}$.

Comparemos

$$\int |u|\,dx = \frac{1}{2u'}|u|u+C \qquad [2]$$

(u lineal, C constante) con la parábola ordinaria

$$\int u\,dx = \frac{1}{2u'}u^2+C \qquad [3],$$

que alcanza su máximo, o su mínimo, en el punto (p, C), siendo p la raíz de $u=0$. Cuando es $u \geqq 0$, [2] y [3] coinciden. Si es $u<0$ es $\int u\,dx = k+C$ y $\int |u|\,dx = -k+C$; luego [2] y [3] son simétricas respecto de la recta $y=C$, tangente en el vértice a la parábola [3]. Por lo tanto, la curva integral [2] es la obtenida de una parábola ordinaria $\dfrac{1}{2u'}u^2+C$ sustituyendo una de sus ramas por su simétrica respecto de la tangente en el vértice. La línea así obtenida carece de ecuación ordinaria; pero ya vemos que tiene su ecuación [2] con formas absolutas. En vista de esto, las líneas de esta clase ¿pueden ser consideradas como curvas *en sí* sin atender a su obtención de otras conocidas? En tal caso, la [2] sería de tercer orden, a pesar del grado de [2], con su punto de inflexión en (p, C); es continua en todo el campo real, y uniforme, y es la integral del contorno angular $|u|$; y puede ser prevista con sólo atender a la gráfica de $|u|$ considerando la gráfica de su primitiva.

8. *Algunas integrales.* a) Sean dos funciones, $y=|u|$, $t=L|u|$, donde u es uniforme y derivable. Se tiene sucesivamente:

$$dy=|u|\frac{du}{u}; \quad dt=\frac{du}{u};$$

$$|u|\,.\,L|u|=\int|u|\frac{du}{u}+\int(L|u|)\,.\,|u|\frac{du}{u}=|u|+\int(L|u|^{|u|})\frac{du}{u};$$

$$\int(L|u|^{|u|})\frac{du}{u}=|u|\,.\,L|u|-|u|+\mu=L\left|\frac{u}{e}\right|^{|u|}+\mu.$$

Si suprimimos las barras a u tanto en la expresión subintegral como en el segundo miembro queda

$$\int Lu\,.\,du=L\left(\frac{u}{e}\right)^{u}+\mu,$$

igualdad que es cierta.

b) La derivada de $y=e^{|x|}$ es $y'=\frac{|x|}{x}e^{|x|}$;

luego

$$\int e^{|x|}\,dx=e^{|x|}\frac{x}{|x|}+\mu=\frac{|x|}{x}\,.\,e^{|x|}+\mu.$$

c) *Integral de un producto* $|u|\,.\,v$. Es:

$$\int|u|v\,dx=\int\frac{|u|}{u}uv\,dx=\frac{|u|}{u}\int uv\,dx.$$

9. (*) *Ecuación diferencial con coeficientes absolutos.*

$$y' + |\varphi_1(x)|y = |\varphi_2(x)|.$$

Haciendo lo clásico $y = uv$ es:

$$u[v' + |\varphi_1(x)|v] + u'.v = |\varphi_2(x)|;\quad v' + |\varphi_1(x)|v = 0;$$

$$\frac{v'}{v} = -|\varphi_1(x)|;\quad L|v| = \int - |\varphi_1(x)|dx = \frac{|\varphi_1(x)|}{\varphi_1(x)}\int - \varphi_1(x)dx;$$

$$v = e^{-\frac{|\varphi_1(x)|}{\varphi_1(x)}\int \varphi_1(x)dx}.\ \text{Entonces,}\ u'v = |\varphi_2(x)|;$$

$$\frac{du}{dx} = |\varphi_2(x)|e^{\frac{|\varphi_1(x)|}{\varphi_1(x)}\int \varphi_1(x)dx};\ \text{integrando,}$$

$$u = \int |\varphi_2(x)|e^{\frac{|\varphi_1(x)|}{\varphi_1(x)}\int \varphi_1(x)dx}dx.$$

$$y = v.u = e^{-\frac{|\varphi_1(x)|}{\varphi_1(x)}\int \varphi_1(x)dx}\left[\int |\varphi_2(x)|e^{\frac{|\varphi_1(x)|}{\varphi_1(x)}\int \varphi_1(x)dx}dx + \mu\right].$$

Y teniendo en cuenta (n. 8, c) que es:

$$\int |u|.v\,dx = \frac{|u|}{u}\int uv\,dx$$

queda:

$$y = e^{-\frac{|\varphi_1(x)|}{\varphi_1(x)}\int \varphi_1(x)dx}\left[\frac{|\varphi_2(x)|}{\varphi_2(x)}\int e^{\frac{|\varphi_1(x)|}{\varphi_1(x)}\int \varphi_1(x)dx}.\varphi_2(x)dx + \mu\right]$$

El sumando μ puede ser una función signo. Está solución se diferencia de la ordinaria en el factor $\frac{|\varphi_2(x)|}{\varphi_2(x)}$ y en la sustitución de e por $e^{\frac{|\varphi_1(x)|}{\varphi_1(x)}}$.

(*) Todo este nº 9 está tomado fielmente por su hermano de lo que el autor dejó incompleto anotado en un papel.