

BIBLIOGRAFIA

BEPPO LEVI. *Sistemas de ecuaciones analíticas en términos finitos, diferenciales y en derivadas parciales*. Monografías publicadas por la Facultad de Ciencias Matemáticas, Físico-químicas y Naturales de la Universidad Nacional del Litoral; N° I. — Rosario, 1944.

La Facultad de Ciencias Matemáticas de la Universidad Nacional del Litoral edita una nueva serie de publicaciones tituladas "Monografías", cuyo primer volumen lo constituye el trabajo del director del Instituto de Matemática, Dr. Beppo Levi, que en esta nota comentamos.

La autoridad mundialmente reconocida de su autor y el alto valor científico del libro, particularmente destacable entre las publicaciones especializadas en lengua castellana, ponen de relieve una vez más la labor meritísima que viene realizando entre nosotros el Instituto de Matemática de Rosario. A las numerosas publicaciones de dicho Instituto, que han merecido siempre una detenida atención por parte de las mejores revistas de recensión que en el mundo se publican, viene a agregarse esta monografía que une a una exposición nueva y muy provechosa de un asunto importante y fundamental de la Matemática y sus aplicaciones, el aporte original con que su ilustre autor aumenta su vasta labor de investigación científica.

Hay, pues, que felicitar calurosamente a las autoridades que han regido y rigen la Universidad Nacional del Litoral, por haber creado y mantenido, cada vez con mayor aliento, un Instituto de investigación científica, cuya fecunda labor da al país un prestigio bien merecido y promete para un futuro cercano frutos acaso insospechados.

El libro que nos ocupa está dirigido principalmente a tratar con carácter general los sistemas de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales, restringiendo el estudio al caso de las funciones analíticas. Esta limitación logra dar a la exposición la unidad y armonía propia de toda teoría referente a dichas funciones, las que si bien requieren el campo complejo para su estudio, dan lugar precisamente en él, a proposiciones tan claras, comprensivas y perfectas, que aun para el caso de su aplicación exclusiva al campo real y también como guía para ulteriores estudios en dicho campo, se revelan particularmente útiles.

Por otra parte, la exigencia de que toda función sea expresable mediante una serie de Taylor permite, en las aplicaciones prácticas de la teoría, alcanzar la solución por el procedimiento constructivo de aproximación que toda serie expresa.

El rigor expositivo con que el libro se desarrolla es algo plenamente logrado, lo que es interesante señalar dados los muchos puntos oscuros que aún existen en la teoría. Para alcanzar ese rigor se hace necesario empezar con el estudio de los sistemas de ecuaciones analíticas en términos finitos y en derivadas ordinarias, aunque limitando dicho estudio a tratar los resul-

tados generales más importantes, así como los métodos que más tarde se desarrollarán en lo que constituye la principal finalidad de la obra.

Esta puede por consiguiente ser leída sin muchos conocimientos previos, aun cuando no sea apropiada para tomarla como texto de *iniciación* en un primer estudio de la teoría de ecuaciones en derivadas parciales. En efecto, el autor enuncia siempre los teoremas en los términos más generales posibles, lo que si bien da a la obra un alto valor científico, requiere para ser bien comprendida que la mente ya esté acostumbrada al tipo de cuestiones a que se refiere. Por otra parte es conveniente poseer previamente la visión sintética e intuitiva del problema con sus interpretaciones geométricas en el espacio tridimensional y que el autor omite por encontrarse ya ampliamente desarrollada en los textos clásicos de estudio.

El Capítulo I trata sobre números complejos y funciones analíticas. Después de introducir en forma breve el número complejo y sus operaciones algebraicas, se estudia la serie de Taylor de una y varias variables, el teorema de Cauchy-Hadamard en ambos casos, la prolongación analítica y en ella el principio de permanencia de las relaciones analíticas; se llega así por el método de Weierstrass al concepto de función analítica en el caso de varias variables, particularmente interesante por qué la generalidad de los estudiosos se limita a conocer bien el caso de una sola variable.

Se deducen las propiedades fundamentales de dichas funciones y aun cuando sea el desarrollo de Taylor el que será utilizado sistemáticamente en los capítulos siguientes, se da el concepto geométrico de función analítica introducido por Cauchy con muy sabrosos comentarios sobre las condiciones de monogeneidad de Cauchy-Riemann (ya conocidas por D'Alembert y Euler), al dar una visión sintética sumamente instructiva de las diferentes líneas de pensamiento que principalmente Goursat por un lado y Menchoff por otro han seguido para profundizar la cuestión. Con ello se presenta la fórmula de la integral de Cauchy en una y varias variables como fórmula fundamental de la teoría de las funciones analíticas, la que una vez introducida la derivada logarítmica y el teorema de residuos, sirve para demostrar el clásico teorema preparatorio de Weierstrass, fundamento de la teoría de ecuaciones analíticas desarrollada en el capítulo II. Dicho teorema está también constructivamente tratado en forma que dé un procedimiento efectivo para la separación del factor algebroides, cuyo comportamiento es el de la función analítica en el entorno de uno de sus ceros. El capítulo acaba con las principales consecuencias de este teorema, entre las que se destaca el concepto de función reducida.

El Capítulo II está destinado al estudio de las ecuaciones analíticas en términos finitos y a los sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias analíticas.

Poniendo en evidencia la necesidad de conocer previamente una solución numérica, se aplica el teorema preparatorio de Weierstrass a la resolución de una ecuación analítica y se estudia también la condición necesaria y suficiente para que aquella solución numérica sea punto singular de las eventuales soluciones de la ecuación.

Dichas conclusiones se extienden al caso de un sistema de ecuaciones

analíticas del cual se conozca una determinada solución numérica a ; la resolución de dicho sistema se reduce al de sus factores algebroides para aplicar a éstos la teoría de la resultante y obtener el que Osgood llama segundo teorema de Weierstrass.

El autor, como de costumbre, no se contenta con exponer el teorema existencial de las soluciones, sino que se preocupa de dar el método para construirlas efectivamente y poner de manifiesto la finitud del procedimiento y el papel que juega la característica del jacobiano del sistema, tanto en un punto genérico como en el punto a , a fin de resolverlo respecto a un grupo conveniente de variables.

Para la resolución de los sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias, siempre reducible a los de primer orden aumentando adecuadamente las variables funciones, se despejan las derivadas que sea posible mediante la cadena finita de resultantes y eliminaciones anteriormente vista, para así obtener la forma normal en que el sistema está resuelto respecto a las derivadas y consta de tantas ecuaciones como funciones incógnitas. Ello da valor a la primera parte del capítulo para mostrar cómo y cuándo puede obtenerse dicha forma normal a partir del sistema dado.

De la forma normal se deducen fácilmente por derivaciones sucesivas los coeficientes de las series de Taylor correspondientes a las funciones incógnitas, series cuya convergencia se asegura mediante el clásico método de Cauchy de las series mayorantes. Con ello queda resuelto el problema de Cauchy, es decir el hallar dichas soluciones una vez que para un valor determinado de la variable independiente se supone que las funciones incógnitas toman valores iniciales asignados.

Los principales resultados del capítulo quedan aclarados mediante ejemplos ilustrativos muy bien elegidos.

El Capítulo III trata de dos lemas algebraicos, el segundo de los cuales no sólo tiene importancia teórica, sino también práctica y es fundamental para la posterior construcción efectiva de la solución formal de un sistema de ecuaciones en derivadas parciales. En efecto, a toda derivada de una función de varias variables puede hacerse corresponder el monomio entero que figura como índice inferior en la notación de dicha derivada.

Con ello las derivadas que nacen de una dada por sucesivas operaciones de derivación son precisamente las que corresponden a los monomios múltiplos del monomio correspondiente a la derivada inicial. Es problema fundamental de la teoría de los sistemas completos de ecuaciones en derivadas parciales, sistemas en los que figuran despejadas en los primeros miembros sendas derivadas llamadas principales, la determinación de las llamadas derivadas paramétricas, no deducibles por derivación sucesiva de las principales: son aquellas cuyos monomios correspondientes no son múltiplos de ninguno de los monomios que forman el grupo M correspondiente a dichos primeros miembros. Entonces las condiciones iniciales del sistema dependen de la manera como se distribuyen dichos monomios no múltiplos según el lema siguiente: Dado un sistema finito M de monomios de k variables $x_1, x_2, \dots, x_k$ tales que de cada dos de ellos nunca uno sea múltiplo del otro, se puede entonces determinar (generalmente de varios modos en número finito) otro sistema N de monomios

y correspondientemente a cada uno de éstos un grupo de variables (llamadas multiplicatrices), en forma tal que todos los monomios que no son múltiplos de ninguno de M y sólo ellos, se obtienen una y una sola vez por multiplicación de un monomio de N por un monomio adecuadamente formado con las correspondientes variables multiplicatrices.

Las palabras subrayadas equivalen a decir que ningún monomio de M podrá obtenerse así y esta observación esencial constituye un olvido importante del autor.

El Capítulo IV trata de la resolución formal de los sistemas de ecuaciones en derivadas parciales y la manera de completarlos. El capítulo comienza con la observación de que por introducción de nuevas ecuaciones y nuevas variables independientes, siempre es posible suponer que la función incógnita es única, al considerarla como combinación lineal de las que figuren en el problema. Se pone de relieve la importancia del teorema sobre conmutabilidad del orden de las derivaciones para que se presente en estos sistemas la posibilidad de su incompatibilidad y se empieza con el ejemplo más simple proporcionado por las condiciones de integrabilidad de una diferencial total.

El primer sistema que se estudia es el de k ecuaciones de primer orden con una sola función incógnita y n variables independientes; la condición de conmutabilidad en la derivación se aplica a obtener las consecuencias diferenciales del sistema dado, formuladas mediante los clásicos paréntesis y corchetes de Poisson como nuevas ecuaciones también de primer orden, funcionalmente independientes de las anteriores para así llegar a un sistema completo o en involución, si antes el sistema no se ha demostrado incompatible o se ha encontrado directamente una solución. Si h es el número de las ecuaciones independientes de uno de estos sistemas completos, supuestas despejadas h de las n derivadas parciales primeras, la construcción formal de la solución, es decir la obtención de un desarrollo de Taylor que verifique formalmente las ecuaciones propuestas se efectúa término a término por derivación sucesiva de aquellas h derivadas despejadas y aplicación de valores iniciales. Así una solución del sistema dado queda unívocamente determinada como función analítica de todas las variables, en cuanto se asigne arbitrariamente la función analítica de $n-h$ variables a la cual se reduce la solución buscada sobre una determinada variedad analítica de dimensión $n-h$ (condiciones de Cauchy).

Sin entrar en otros procedimientos clásicos de resolución que se encuentran en tratados bien conocidos y después de aclarar los puntos anteriores con adecuados ejemplos, el autor considera los sistemas de ecuaciones en derivadas parciales de orden cualquiera, poniendo de relieve el hecho nuevo y muy importante de que la aparición y número de nuevas consecuencias diferenciales del sistema dado depende ahora esencialmente de la ordenación de las derivadas, es decir de la determinación de una altura para ellas. Así se distinguen dichas ordenaciones en normales, casi normales y no-normales; las primeras son aquellas en que se tiene en cuenta 1º) el orden de derivación, 2º) el primer orden de derivación diferente que afecta a las variables colocadas en sucesión determinada en la comparación de dos derivadas del mismo orden.

Si sólo se cumple la primera condición, se tiene una ordenación casi

normal; dando un peso o cota a cada variable (v. g. números primos distintos) pueden obtenerse mediante pesos totales crecientes, ordenaciones no-normales en altura de las derivadas. En el caso de varias funciones incógnitas, por la reducción dicha a una función incógnita, se determinaría también una ordenación en altura de las derivadas, aun cuando pueda hacerse directamente, sin más que tener en cuenta entre las dos condiciones anteriores, el índice de la función.

Dado ahora un sistema de ecuaciones analíticas en derivadas parciales y fijada arbitrariamente una ordenación en altura de las derivadas, puede considerarse cada ecuación resuelta respecto a la derivada de máxima altura que ella contiene. Aparecerán así, después de fáciles simplificaciones, como primeros miembros las primeras derivadas principales que encontremos. Por la conmutabilidad del orden de derivación, se deducirán acaso nuevas consecuencias diferenciales, que habrá que agregar al sistema, las que serán algebraicamente independientes de éste; despejando las respectivas derivadas de máxima altura y así siguiendo, el primer lema del capítulo III (es finita toda sucesión de monomios de k variables en que ninguno es múltiplo del anterior) asegura que después de un número finito de pasos, se llega siempre a un sistema que también se puede llamar completo, por no deducirse de él nuevas consecuencias diferenciales. Obsérvese que en el caso de ecuaciones diferenciales ordinarias la finitud del sistema normal se obtenía por el hecho de que el número de ecuaciones había de ser igual al de funciones que quedaban como incógnitas; en el caso de ecuaciones en derivadas parciales de primer orden con una función incógnita, el número final de ecuaciones no podrá sobrepasar al de derivadas primeras, es decir al de variables independientes; aquí es el primer lema algebraico citado el que nos asegura la finitud del sistema completo.

Se concluye así, que un sistema dado de ecuaciones analíticas en derivadas parciales equivale al conjunto de uno o más (en número finito) sistemas completos dependientes de una determinada ordenación de las derivadas en altura, sistemas completos que se separan de él mediante una sucesión finita y determinada de operaciones consistentes en derivaciones, eliminaciones y determinación de soluciones numéricas de sistemas analíticos en términos finitos.

Fijado ya un determinado sistema completo con respecto a una determinada ordenación en altura de las derivadas, se extiende el nombre de derivadas principales a todas las que se deducen de los primeros miembros por derivación sucesiva; todas las demás se llaman paramétricas.

El lema II del capítulo III permite ahora construir formalmente la serie de Taylor que da la solución, definida siempre que se fijen apropiadas condiciones iniciales para las derivadas paramétricas, condiciones que dependerán de los distintos sistemas N que se puedan construir en el lema, apareciendo como funciones arbitrarias o reduciéndose a constantes también arbitrarias, según haya o no variables multiplicatrices en correspondencia al monomio respectivo. En definitiva, para completar la determinación de una función incógnita de un sistema de ecuaciones en derivadas parciales, hay que dar condiciones iniciales que se traducen en asignar los valores de funciones (even-

tualmente constantes) a las que se reducen determinadas derivadas de la función incógnita (eventualmente la función misma) sobre determinadas variedades de puntos del espacio representativo del sistema de las variables. Las condiciones iniciales se llaman *de Cauchy* cuando se refieren a los valores dados sobre una misma variedad. Aquí, ni la estructura de las variedades (que pueden no ser lineales) ni su dimensión, es algo intrínseco al sistema, sino que dependen no tan sólo de la ordenación de las derivadas en altura, sino también del sistema N que se haya construido en el lema II ya citado.

Antes de referirme a los ejemplos y teoremas complementarios con que se acaba el capítulo, diremos que toda esta exposición de gran belleza intrínseca con que el autor desarrolla la teoría, distingue especialmente la obra que comentamos de las otras que se refieren al mismo tema, aun cuando no se incluyan otros métodos clásicos de resolución como aquel que refiere todo sistema a otro de primer orden, lineal en las derivadas, pero con diversas funciones incógnitas, parte de las cuales se han introducido en la transformación; dicho sistema lineal, puesto en la forma llamada canónica se resuelve también por la consideración de derivadas principales y paramétricas.

Los ejemplos elegidos por el autor para aclarar la teoría por él desarrollada, son muy reveladores y aun interesantes por sus aplicaciones prácticas. En particular se estudian los sistemas de dos ecuaciones en derivadas parciales para una función de dos variables, cuando una de las ecuaciones es de segundo orden, introduciendo los conceptos de integral intermedia, es decir de una ecuación de orden menor todas cuyas soluciones verifiquen el sistema, y de los sistemas que Sophus Lie llamó en involución.

Después de dar ejemplos de resolución de sistemas de ecuaciones con varias funciones incógnitas, se consideran también los sistemas llamados de Sofía Kowalewski, sobre todo por su importancia histórica (primer estudio de carácter general de los sistemas en derivadas parciales), ya que aquí resultan un caso muy particular y sencillo en que el problema de Cauchy admite siempre solución.

Otros ejemplos revelan la importancia de la elección de la ordenación en altura y consecuentemente de las derivadas principales en el cálculo y naturaleza de una solución y cómo aun en el caso de una sola ecuación, si se dejan de lado condiciones de privilegio que la ecuación misma impone a las derivadas, tiene que renunciarse a considerarla ella sola un sistema completo, por lo menos como hecho general sin excepciones.

Se hace notar también mediante los ejemplos expuestos que así como en los sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias se da particular importancia al número finito de constantes arbitrarias de que depende su integración y por consiguiente las condiciones iniciales que puedan fijarse, en cambio en el problema de la determinación de las condiciones iniciales para individualizar la solución de un sistema en derivadas parciales, condiciones representadas generalmente por funciones arbitrarias, pueden variar según el procedimiento de resolución que se adopte el número de estas condiciones y el número de variables de que dependen las funciones que las representan. Por lo tanto el número de las funciones arbitrarias que completan la defini-

ción de un problema en derivadas parciales debe considerarse estrechamente vinculado al *significado* que estas funciones van a tener.

Sin embargo, en este orden de ideas, se acaba el capítulo mediante un notable teorema de Riquier que se refiere a los procedimientos de resolución que realizan la llamada propiedad K , es decir aquella por la que en el cálculo de los coeficientes del desarrollo de Taylor de la solución, la determinación de todos los coeficientes de los términos de grado $\leq k$ se hace antes que, e independientemente de, la determinación de cualquier término de orden $\vee k$.

El Capítulo V se dedica al estudio de la convergencia de las soluciones formales construidas según los procedimientos del capítulo anterior. Es a nuestro juicio la parte de la obra que tiene mayor valor científico, no tan sólo por la obtención de interesantes resultados nuevos que se añaden a los anteriormente hallados por Kowalewski, Meray y Riquier, sino también por abrir anchos horizontes de investigación fructuosa a los estudiosos que deseen adentrarse en esta teoría.

Ante todo es conveniente advertir que el autor llama *ilimitadamente integrable* a un sistema diferencial de determinada forma de resolución si se puede establecer la convergencia de la solución formal en un campo suficientemente restringido para valores cualesquiera de los coeficientes que la forma de resolución deja indeterminados, siempre que aseguren la existencia de condiciones iniciales; mientras que llama al sistema *integrable limitadamente* si para realizar la convergencia de la solución, es necesario que esos coeficientes, a más de asegurar la existencia de las condiciones iniciales, verifiquen otras determinadas condiciones (que han de venir forzosamente expresadas por desigualdades).

Se demuestra que el sistema es siempre *ilimitadamente integrable*, si ha sido obtenido determinando las derivadas principales y paramétricas mediante una ordenación en altura normal.

Se demuestra que el sistema es siempre *ilimitadamente integrable*, si ha sido maltes y no-normales *ilimitadamente integrables*, pero como introducción al estudio de otros ejemplos de sistemas sólo *integrables limitadamente*, el autor da dos interesantes teoremas referentes a ordenaciones casi normales y que pueden considerarse como iniciales de una teoría general que queda por hacer.

El autor da en esos teoremas condiciones que hacen *ilimitadamente integrables* determinados tipos de ecuaciones, pero al mismo tiempo hace ver que esos tipos son en otras condiciones sólo *limitadamente integrables*, considerando el ejemplo clásico de la ecuación lineal de segundo orden de tipo elíptico, es decir, la ecuación de Laplace.

El estudio directo de esta última ecuación conjuntamente con la transformación efectuada para obtenerla del tipo general, da los casos en que ésta es sólo *limitadamente integrable*; entonces las funciones arbitrarias que fijan las condiciones iniciales vienen expresadas por series de Taylor cuyos coeficientes no pueden darse arbitrariamente dentro de la condición de convergencia de dichas series, sino que a más han de cumplir condiciones restrictivas dadas por acotaciones respecto a su modo de crecimiento, a fin de que la solución formal obtenida tenga un radio de convergencia no nulo.

Una bonita interpretación teórico-funcional que da el autor de parte de

esta investigación es la siguiente: una función armónica que sobre los lados de un ángulo se reduce a dos funciones analíticas (reales) arbitrarias es necesariamente prolongable o no en el entorno del vértice según que el valor del ángulo en grados sexagesimales sea un número algebraico irracional o un número racional; si el valor del ángulo es irracional trascendente podrá o no ser prolongable, dándose uno y otro caso para conjuntos densos de valores trascendentes del ángulo.

Finalmente el capítulo acaba estudiando un ejemplo de ordenación no-normal proporcionado por la ecuación del calor, llegándose a un resultado clásico sugerido por S. Kowalewski.

Bajo el título de "Consideraciones finales" el autor trata la noción de característica haciendo ver que solamente las llamadas variedades características, que son en cierta manera excepcionales, son las que no convienen para condiciones de Cauchy. Halla la ecuación diferencial de las características y observa que el estudio de las eventualidades que pueden presentarse está todavía en gran parte por hacer.

La obra acaba con una nota bibliográfica muy útil, dando cuenta de las diversas orientaciones según las que diversos tratados y memorias fundamentales consideran las materias contenidas en el libro. A este respecto, debemos alabar calurosamente la tendencia de dar sólo bibliografía en esta forma crítica, ya que una seca lista de obras y memorias, puesta al final de un libro, resulta en general, cuánto más larga, más inútil.

Quisiéramos añadir a la información bibliográfica, por considerarla didácticamente muy valiosa, la obrita, también de carácter general, de G. Hoheisel: "Partielle Differentialgleichungen" aparecida en los "Sammlung Götschen" de W. de Gruyter (Berlín, 1928), segunda parte de la ya no tan notable "Gewöhnliche Differentialgleichungen" del mismo autor (Berlín, 1926). Dicha obrita, que pertenece a la colección en que se publicó la tan reputada entre nosotros "Teoría de funciones" de K. Knopp (traducida por Labor) da a nuestro juicio en forma tan feliz como en esta última obra, una visión general y razonada del tema; en él quedan incluidas las transformaciones de contacto y su aplicación a la resolución de ecuaciones y sistemas con una o más funciones incógnitas.

La obra del Dr. Beppo Levi está a más enriquecida con ejemplos aclaratorios, muchos de los cuales, por su aplicación a la elasticidad y a la geometría, muestran el interés que la lectura de este libro ha de tener incluso para los que se interesan primordialmente en las aplicaciones de la Matemática. Sin embargo, tanto esta obra como las citadas en su nota bibliográfica final tienen una orientación netamente matemática por la manera de circunscribir y agotar el tema.

La impresión y presentación del libro es muy buena, habiendo conseguido la imprenta de la Universidad Nacional del Litoral superar todas las dificultades de composición.

San Juan, mayo de 1944.

Pedro Pi Calleja