PROPIEDADES DE FUNCIONES DE INTERVALO NO ADITIVAS Y SUS APLICACIONES A LA TEORIA DE LA INTEGRAL

por YANNY FRENKEL

En una memoria que publicaré en breve me propongo sistematizar resultados ya conocidos sobre funciones no aditivas de intervalo unidimensional y poner de manifiesto algunas nuevas propiedades y aplicaciones.

En la teoría de la integral y de la derivación de funciones de una variable interviene constantemente el incremento de una función sobre un intervalo unidimensional; resulta, pues, más cómodo y se logran notables simplificaciones, considerando en lugar de la función misma, una *función de intervalo* tal que adjudique a cada intervalo el incremento de la primera.

La función de intervalo así obtenida será aditiva, esto es, si I_1, I_2 son dos intervalos no rampantes, es $f(I_1+I_2)=f(I_1)+f(I_2)$. Recíprocamente toda función de intervalo aditiva puede considerarse como construída con los incrementos de una función de punto, unívocamente determinada por aquella, salvo una constante aditiva.

Es lo mismo, pues, tratar con funciones de punto o de intervalo aditivas; Burkill (1), Saks (3), Young (5) y otros autores (6), (7), (8), han llamado la atención sobre la importancia de las funciones de intervalo no aditivas. En efecto; en la teoría de la integración y derivación intervienen funciones no aditivas; tales son: el elemento de área $M_i(b_i-a_i)$ y el cociente incremental $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Una integral definida es función aditiva de intervalo, pero el método constructivo para hallarla consiste en un proceso límite aplicado a una función no aditiva (en el caso de la integral de Riemann la función no aditiva es el máximo de la función de punto en cada intervalo multiplicado por la longitud del mismo).

Burkill puso de relieve que en diversas teorías se emplea un mismo algoritmo que permite pasar de una función de intervalo $f(I)$ no aditiva a otra $F(I)$ aditiva y este algoritmo general es la integral de Burkill.

Desde luego no toda $f(I)$ no aditiva da origen a una $F(I)$ aditiva, cuando esto sucede la $f(I)$ se dice equivalente a la $F(I)$ (5), (8).

Por ejemplo si $f(x)$ es integrable Riemann entonces la función no aditiva $f(I) = f(a) \cdot (b - a)$; $I = (a, b)$ es equivalente a la integral.

Burkill (2), Young (5) han generalizado propiedades fundamentales de las derivadas de funciones aditivas para las no aditivas, Saks (3) ha establecido relaciones esenciales entre los números derivados de una función y los de su integral Burkill de las que se deduce este importante principio: *Las propiedades de la derivación son invariantes, salvo conjunto de medida nula, respecto de la equivalencia,* gracias al cual muchas propiedades de derivadas de funciones aditivas se extienden inmediatamente salvo conjunto nulo a las funciones no aditivas.

En particular, quedan generalizadas para las funciones equivalentes a aditivas los tres resultados siguientes: el teorema de Lebesgue sobre derivación de funciones a variación acotada, la regla de Young - Denjoy sobre los números derivados de Dini, el teorema de unicidad de la integral de Lebesgue; esto es la anulación de una función absolutamente continua cuya derivada es nula en casi todos los puntos. Los autores citados consideran la integral de Burkill según norma y no hacen intervenir la integral según el proceso límite de Moore. La integral con el proceso límite de Moore fué estudiada en forma abstracta y muy general por Kolmogoroff (8), pero este autor no se detiene en el caso particular del espacio euclídeo ni en las propiedades de derivación.

La idea directiva del presente trabajo es mostrar que utilizando la integral de Burkill - Moore en lugar de la de Burkill, se obtienen los resultados de Burkill y Saks con demostraciones más simples; estableciendo además relaciones sencillas entre ambas integrales se logra una sistematización y generalización de dichos resultados.

El principio general establecido por Saks no puede ser aplicado para generalizar los teoremas de unicidad de las integrales de Perron y Denjoy, porque en estas últimas las propiedades se toman salvo un conjunto numerable y el principio de Saks se verifica salvo un conjunto nulo.

Haciendo un complemento a los métodos de Saks creo haber extendido los teoremas de unicidad de las integrales de Perron y Denjoy de modo análogo a como lo fué el de Lebesgue.

(1) J. C. BURKILL. *Functions of intervals.* Proc. Lond. Math. (2) 22, 1924.
(2) J. C. BURKILL, *The derivates of functions of intervals.* Fund. Math. 5, 1924.
(3) S. SAKS. *Sur les fonctions d'intervalle.* Fund. Math. 10, 1927.
(4) S. SAKS. *Theorie de l'integrale.* Warzzawa, 1933.
(5) R. C. YOUNG. *Functions of intervals.* Math. Zeitsch. 29, 1928.
(6) B. C. GETCHELL. *On the equivalence of two methods of defining Stieltjes integrals.* Bull. of Americ. Math. Soc. 41, 1935.
(7) T. H. HILDEBRANDT. *Definitions of Stieltjes integrals* Americ. Math. Monthly 45, 1938.
(8) A. KOLMOGOROFF. *Untersuchungen uber den Integralbegriff.* Math. Ann. 103, 1930.

ASOCIACION FISICA ARGENTINA

INFORMES Y COMUNICACIONES DE LA TERCERA REUNION DEL NUCLEO DE FISICA

LA PLATA, Instituto de Física, Agosto de 1944

Preside: DR. HÉCTOR ISNARDI

SESION DEL 28 DE AGOSTO

Informes:

C. MOSSIN KOTIN (Buenos Aires). *Fisión Nuclear.*

El procedimiento de la radioactividad artificial de bombardear elementos con partículas (neutrones, partículas α, fotones, deutones) condujo en el caso de los elementos más pesados de la tabla de Mendeleeff (Ur, Th) a resultados inesperados que abrieron un capítulo nuevo en la física atómica: el de las fi-