SOBRE EL CIRCULO DE RADIO MÁXIMO CONTENIDO EN UN RECINTO

por L. A. Santaló

El objeto de esta nota es la demostración del siguiente teorema:

Dado en el plano un recinto de área F cuyo contorno sea una curva cerrada de Jordan, rectificable y de longitud L, siempre existe un círculo de radio

$$\rho \geqq \frac{F}{L} \tag{1}$$

contenido en el recinto.

La acotación (1) *es la mejor posible, en el sentido de que no puede sustituirse por otra de la forma* $\rho \geqq c\frac{F}{L}$ *con un coeficiente constante* $c > 1$.

Entendemos que el contorno forma parte del recinto y, por tanto, el círculo de radio ρ puede tener puntos comunes con el contorno.

G. Grünwald y P. Turán en el trabajo *Über den Blochschen Satz* (Acta Litterarum ac Scientiarum Regiae Universitatis Hungaricae Francisco-Josephinae, Sectio Scientiarum Mathematicarum, Tomo VIII, 1936-37, pág. 238) demuestran, como lema, la misma propiedad anterior, pero dando para ρ la acotación

$$\rho \geqq \frac{1}{4\pi+2}\,\frac{F}{L}$$

que es menos fuerte que la (1).

En el mismo trabajo mencionan los autores que G. Grünwald y E. Varzsonyi han establecido la acotación (1), pero no publican la demostración.

Por esta razón creemos que puede ser útil la demostración que vamos a dar, la cual sirve también, como veremos, para demostrar el teorema análogo para recintos situados sobra la superficie esférica (geometría elíptica) o recintos situados sobre las superficies de curvatura constante negativa (geometría hiperbólica).

1. *Caso del plano.* — Recordemos una fórmula de Geometría Integral. Sea R el recinto dado, de área F y contorno de longitud L. Supongamos un círculo C de radio ρ que no pueda contener totalmente a R en su interior. En una posición cualquiera de C, sea ν el número de partes simplemente conexas de que se compone la intersección de C con R (por ejemplo, en la fig. 1 es $\nu=2$; si C está contenido en el interior de R sera $\nu=1$). Si $P(x,y)$ es el centro del círculo C y ponemos $dP=dx\,dy$, vale la siguiente fórmula integral de Blaschke (1)

$$\int \nu\, dP = F + \rho L + \pi \rho^2 \tag{1.1}$$

donde la integración está extendida a todo el plano, siendo $\nu=0$ cuando C y R no tienen punto común.

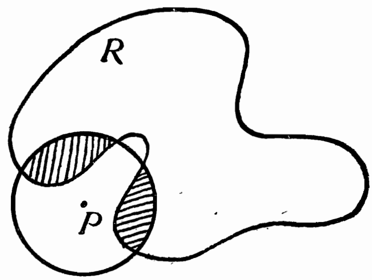

Fig. 1.

Además, si n es el número de puntos comunes del contorno C con el contorno de R (por ejemplo, en la fig. 1 es $n=4$), vale también (2)

(1) Ver W. BLASCHKE, *Vovlesungen über Integralgeometrie*, Hamburger Mathematische Einzelschriften, nº 20, 1936, pág. 37. La fórmula de Blaschke es mas general, valiendo para dos recintos cualesquiera R, R'. Aquí utilizamos el caso particular de ser R' un círculo.

(2) W. BLASCHKE, loc. cit. pág. 24, o bien L. A. SANTALÓ, *A theorem and an inequality referring to rectifiable curves*, American Journal of Mathematics, Vol. 63, 1941, pág. 635.

$$\int n \, dP = 4 L \rho \tag{1.2}$$

extendida también la integración a todo el plano.

Utilizando las fórmulas (1.1) y (1.2) la demostración del teorema es fácil.

Sea M_0 la medida del conjunto de puntos P pertenecientes a R y que sean centros de círculos de radio ρ cuyo contorno no corte al contorno de R, o sea, sean centros de círculos C contenidos en R. Para estos círculos será $n = 0$. De (1.1) y (1.2) se deduce

$$M_0 + \int_{n \neq 0} \left(\nu - \frac{n}{2}\right) dP = F + \pi \rho^2 - L \rho. \tag{1.3}$$

estando la integración extendida a todos los puntos P que son centros de círculos C para los cuales es $n \neq 0$.

Sea A un punto común a los contornos de C y de R. Si en A el contorno de R no atraviesa a la recta tangente a C, diremos que C y R se *tocan* en A. Por suponer el contorno de R rectificable, tendrá tangente en casi todo punto y por tanto la medida del conjunto de los puntos P que son centros de círculos C que tocan el contorno de R es nula, y por consiguiente estas posiciones de C no influyen en las integrales (1.1), (1.2), (1.3). Prescindiendo de estos casos, siempre que sea $n \neq 0$, será $\frac{n}{2} \geqq \nu$, puesto que cada parte simplemente conexa de la intersección de C con R está limitada por arcos de los contornos de C y R y por tanto exige por lo menos dos puntos de intersección de estos contornos.

Escribamos (1.3) en la forma

$$M_0 = \int_{n \neq 0} \left(\frac{n}{2} - \nu\right) dP + F + \pi \rho^2 - L \rho \tag{1.4}$$

Siendo $\frac{n}{2} \geqq \nu$, de esta igualdad (1.4) se deduce que será seguramente $M_0 > 0$ si $F - L\rho = 0$, o sea,

$$\rho = \frac{F}{L}. \tag{1.5}$$

El hecho de ser $M_0 > 0$ para este valor (1. 5) de ρ, nos dice que siempre habrá círculos de este radio contenidos en R. Es lo que queríamos demostrar.

En la demostración hemos supuesto que ρ era tal que C no podía contener totalmente a R en su interior. Esto ocurre efectivamente para el valor (1. 5) de ρ. En efecto, para toda figura plana vale la desigualdad isoperimétrica $L^2 - 4\pi F \geqq 0$, de donde

$$\frac{F}{L} \leqq \frac{\sqrt{F}}{2\sqrt{\pi}}. \tag{1. 6}$$

Si r es el radio de un círculo que contiene a R es $F \leqq \pi r^2$ y por tanto, según (1. 6),

$$r \geqq 2\frac{F}{L},$$

es decir, para el valor (1. 5) de ρ, el círculo C no puede contener a R.

La acotación (1) para ρ no puede mejorarse en el sentido de poner $\rho \geqq c\frac{F}{L}$, con $c > 1$. En efecto, consideremos un rectángulo de lados a y b, con a suficientemente grande. Para este recinto es

$$\frac{F}{L} = \frac{ab}{2(a+b)}. \tag{1. 7}$$

El máximo círculo contenido en este recinto es el de radio $\rho = b/2$ y tomando a suficientemente grande, vemos por (1. 7) que la razón $\frac{F}{L}$ se acerca tanto como se quiera a este valor y por tanto ningún círculo de radio $> \frac{F}{L}$ podría estar contenido en dicho recinto.

2. *Caso de la esfera.* — Sobre la superficie de la esfera de radio unidad vale un teorema análogo al anterior, que se enuncia:

Dado sobre la superficie de la esfera de radio unidad un recinto de área F cuyo contorno sea una curva de Jordan rectificable de longitud L, y que esté contenido en una semiesfera, *siempre existe un círculo menor de radio esférico* ρ *cumpliendo la relación*

$$\operatorname{tg} \rho \geqq \frac{F}{L} \tag{2.1}$$

contenido en el recinto.

La acotación (2.1) *no puede sustituirse por otra de la forma* $\operatorname{tg} \rho \geqq c \dfrac{F}{L}$ *con un coeficiente constante* $c > 1$.

La demostración es la misma anterior. Solo hay que sustituir la fórmula (1.1) por la siguiente [3]

$$\int \nu \, dP = L \operatorname{sen} \rho + F \cos \rho + 2\pi (1 - \cos \rho) \tag{2.2}$$

donde dP indica el elemento de área de la superficie esférica correspondiente al centro del círculo C de radio esférico ρ y ν tiene el mismo significado que en (1.1).

La fórmula (1.2) para las curvas esféricas se escribe

$$\int n \, dP = 4 L \operatorname{sen} \rho. \tag{2.3}$$

De (2.2) y (2.3) el mismo razonamiento seguido en el caso del plano nos lleva a la fórmula

$$M_0 = \int_{n \neq 0} \left(\frac{n}{2} - \nu \right) dP + 2\pi (1 - \cos \rho) + F \cos \rho - L \operatorname{sen} \rho$$

y para asegurar que sea $M_0 > 0$ basta tomar

$$\operatorname{tg} \rho = \frac{F}{L} \tag{2.4}$$

lo cual prueba el enunciado.

Lo mismo que para el plano, falta establecer que el círculo de radio ρ dado por (2.4) no puede contener al recinto R en su interior. En efecto, la desigualdad isoperimétrica sobre la esfera es $L^2 + F^2 - 4\pi F \geqq 0$, que puede escribirse

(3) W. BLASCHKE loc. cit., pág. 82. La fórmula de BLASCHKE vale para dos recintos cualesquiera: la fórmula (2.2) corresponde al caso particular de ser uno de ellos un círculo. También la fórmula (2.3) que sigue es un caso particular de la llamada fórmula de POINCARÉ para la esfera (loc. cit. pág. 81).

$$\left(\frac{F}{L}\right)^2 \leqq \frac{F}{4\pi - F}. \tag{2.5}$$

Todo círculo de radio esférico r que contenga a R deberá tener su área igual o mayor que la de R, o sea, $F \leqq 2\pi(1-\cos r)$ y por tanto (2.5) da

$$\left(\frac{F}{L}\right)^2 \leqq \frac{2\pi(1-\cos r)}{2\pi(1+\cos r)} = \mathrm{tg}^2\,\frac{r}{2}. \tag{2.6}$$

Como estamos siempre considerando figuras contenidas en una semiesfera es $r \leqq \frac{\pi}{2}$ y por tanto $\mathrm{tg}\,r > \mathrm{tg}\,\frac{r}{2}$. Luego, para que C contenga a R debe ser $\mathrm{tg}\,r > \frac{F}{L}$; por consiguiente con el valor de ρ dado por (2.4), el círculo C no puede contener a R en su interior.

Análogamente a lo que ocurre para el plano, en el caso actual de la esfera la acotación (2.1) para ρ no puede tampoco mejorarse en el sentido de poder poner $\mathrm{tg}\,\rho \geqq c\,\frac{F}{L}$, siendo c una constante mayor que 1. En efecto, consideremos el recinto R limitado por dos arcos de círculos menores concéntricos, de radios r_1, r_2 respectivamente, y los arcos de radio esférico correspondientes a los extremos. Si el ángulo en el centro de estos dos arcos de círculo menor es α, el área F y longitud L de R serán:

$$F = \alpha(\cos r_2 - \cos r_1)$$

$$L = \alpha \operatorname{sen} r_1 + \alpha \operatorname{sen} r_2 + 2(r_1 - r_2)$$

y por consiguiente

$$\frac{F}{L} = \frac{\mathrm{tg}\,\frac{r_1 - r_2}{2}}{1 + \frac{2(r_1 - r_2)}{\alpha(\operatorname{sen} r_1 + \operatorname{sen} r_2)}}. \tag{2.7}$$

Fijado α y tomando la diferencia $r_1 - r_2$ suficientemente pequeña, el máximo círculo contenido en el recinto es el de radio $\frac{r_1 - r_2}{2}$ y según (2.7) vemos que la razón $\frac{F}{L}$ se acerca a la tangente de este ángulo en tanto como se quiera. Luego ningún círculo menor cuyo radio ρ satisfaga a la condición

$\operatorname{tg} \rho > \frac{F}{L}$, puede estar contenido en el recinto considerado, lo cual prueba la última parte del teorema.

3. *Caso de las superficies de curvatura constante negativa.* — Sobre las superficies de curvatura constante negativa $K = -1$, vale un teorema análogo a los anteriores que se puede enunciar de la manera siguiente:

Dado sobre una superficie de curvatura constante negativa $K = -1$, un recinto R de área F, cuyo contorno sea una curva cerrada de Jordan rectificable de longitud L, siempre existe un círculo geodésico de radio ρ cumpliendo la relación

$$\operatorname{tgh} \rho \geqq \frac{F}{L}$$

que está contenido en el recinto.

La acotación anterior no puede sustituirse por otra de la forma $\operatorname{tgh} \rho \geqq c \frac{F}{L}$ *con un coeficiente constante* $c > 1$.

La demostración es también la misma que para el plano, únicamente hay que sustituir la fórmula (1.1) por la siguiente (4)

$$\int \nu \, dP = 2\pi (\operatorname{ch} \rho - 1) + F \operatorname{ch} \rho + L \operatorname{sh} \rho \tag{3.1}$$

donde dP indica el elemento de área sobre la superficie de curvatura constante negativa $K = -1$, correspondiente al centro del círculo geodésico C de radio ρ y ν tiene el mismo significado que en (1.1).

La fórmula (1.2) sobre las superficies de curvatura $K = -1$ se escribe (4)

$$\int n \, dP = 4 L \operatorname{sh} \rho. \tag{3.2}$$

De (3.1) y (3.2), el mismo razonamiento seguido para el caso del plano, lleva a la fórmula

(4) Ver L. A. Santaló, *Integral Geometry on surfaces of constant negative curvature*, Duke Math. Jour., Vol. 10, 1943, pág. 699. Para la fórmula (3.2) siguiente ver el mismo trabajo, pág. 697. Las fórmulas aquí utilizadas corresponden al caso particular en que uno de los recintos es un círculo geodésico.

$$M_0 = \int_{n \neq 0} \left(\frac{n}{2} - \nu\right) dP + 2\pi (\operatorname{ch} \rho - 1) + F \operatorname{ch} \rho - L \operatorname{sh} \rho$$

y para asegurar que es $M_0 > 0$, o sea, que el círculo C puede estar contenido totalmente en el recinto, basta tomar

$$\operatorname{tgh} \rho = \frac{F}{L} \tag{3. 3}$$

lo cual demuestra el enunciado.

Lo mismo que para el plano, en la demostración se utiliza el hecho de que el círculo C no puede contener al recinto R. Falta demostrar, por tanto, que ningún círculo de radio ρ que satisface la condición (3. 3) puede contener a R.

La desigualdad isoperimétrica sobre las superficies de curvatura $K = -1$ es $L^2 - F^2 - 4\pi F \geqq 0$, la cual es válida para cualquier recinto R. Esta desigualdad se puede escribir

$$\left(\frac{F}{L}\right)^2 \leqq \frac{F}{4\pi + F}. \tag{3. 4}$$

Todo círculo C que contenga a R en su interior debe tener el área mayor o igual que F, o sea, $F \leqq 2\pi (\operatorname{ch} \rho - 1)$. Por tanto, de (3. 4) se deduce, puesto que el segundo miembro es creciente con F,

$$\left(\frac{F}{L}\right)^2 \leqq \frac{2\pi(\operatorname{ch} \rho - 1)}{4\pi + 2\pi(\operatorname{ch} \rho - 1)} = \operatorname{tgh} \frac{\rho}{2}.$$

Como $\operatorname{tgh} \rho > \operatorname{tgh} \dfrac{\rho}{2}$, resulta que el círculo de radio ρ dado por (3. 3) no puede contener a R en su interior, como faltaba demostrar.

Exactamente a como para el caso de la esfera, considerando el recinto R limitado por dos arcos de círculos geodésicos concéntricos a distancia suficientemente pequeña y los arcos de radio en los extremos, se demuestra que la desigualdad del enunciado no puede sustituirse por otra de la forma $\operatorname{tgh} \rho \geqq c \dfrac{F}{L}$ con un coeficiente constante $c > 1$, lo cual prueba la última parte del teorema.

Instituto de Matemática
Facultad de Ciencias Matemáticas
ROSARIO