EL DESARROLLO DE LAS IDEAS EN EL DESCUBRIMIENTO DE LOS CUATERNIOS

por E. T. Whittaker
Universidad de Edinburgh

La primera comunicación sobre cuaternios, efectuada por Hamilton a la Academia, según figura en los «Proceedings» del 13 de Noviembre de 1943 daba la fórmula del producto de las unidades cuaterniónicas i, j, k, sin indicar cómo habían sido ellas obtenidas. La extensa memoria que apareció cuatro años más tarde en el «Transactions», estaba encabezada «Ver 13 de Noviembre de 1843», pero su publicación debe ser posterior, porque en Julio de 1846 Hamilton declaró que reservaba para las Transactions de la Real Academia Irlandesa, un informe sistemático y más completo de sus investigaciones en el tema; y en la memoria misma menciona que algunas páginas de ella habían sido publicadas en Junio de 1847.

No hay, entonces seguridad de que el método de exposición adoptado en esa publicación represente precisamente el desarrollo de sus ideas. En ese sentido, dependemos, para informarnos, de otras fuentes, particularmente la «Carta a John T. Graves, Esq.», que fué publicada en el Philosophical Magazine en Diciembre de 1844, fechada con 17 de Octubre de 1843 — el día siguiente al verdadero descubrimiento — y el extenso prólogo del «Lectures on Quaternions», con fecha de Junio de 1853, casi diez años después; conjuntamente con las indicaciones dadas en la «Vida de Hamilton» de Grave, en una comunicación efectuada a la Academia el 11 de Noviembre de 1844, y en diferentes memorias.

Como, a primera vista no todo el material parece armonizar muy bien con el resto, y habiendo varios claros históricos que deben ser completados mediante conjeturas, quizá quede justificado, en ocasión del centenario, el intento de un esbozo del desarrollo de las ideas de Hamilton.

La memoria del Transactions de 1848 dice que «respecto de los cuaternios, la investigación... podía ser considerada, al menos en un primer aspecto, una continuación de las especulaciones sobre pares algebraicos..., que fueron comunicadas primeramente a la Real Academia Irlandesa en Noviembre de 1833, y publicado en 1835, en el décimo séptimo volumen de sus Transactions». Esto último es una disertación algebraica, en la que, p. ej., el número complejo $a+b\sqrt{-1}$ es considerado como un par de números (a, b) con la propiedad

$$(b_1, b_2) \cdot (a_1, a_2) = (b_1 a_1 - b_2 a_2,\ b_2 a_1 + b_1 a_2).$$

La memoria de 1848 siguió a esto en la introducción de los cuaternios en forma puramente algebráica, definiendo las unidades i, j, k, por medio de substituciones. Pero, evidentemente, éste no ha sido el camino por el cual han sido descubiertos. En 1844 Hamilton expresó a la Academia que lo que originariamente lo condujo a concebir su teoría de los cuaternios... fué el deseo de formarse a sí mismo una concepción clara... de un cuarto proporcional a tres líneas rectangulares cuando se tenía en cuenta sus direcciones; como Mr. Warner y el Dr. Peacock mostraron cómo se concibe y expresa el cuarto proporcional a tres líneas cualesquiera de un plano, que poseen dirección». «La primera conjetura», dijo, «que sobre tripletes geométricos, hallé anotado entre mis papeles (hacia 1830) fué, que mientras las líneas en el espacio podían ser sumadas siguiendo las mismas reglas que en el plano, debían poder ser multiplicadas multiplicando sus longitudes, y sumando sus ángulos polares. En el método conocido por mí entonces como de Mr. Warren, si escribimos...».

Ahora bien: el Rev. John Warren A. M., que era Fellow y Tutor del Jesus College, de Cambridge, había publicado en 1828 el «Tratado de la representación geométrica de las raíces cuadradas de las cantidades negativas», que era, esencialmente, una descripción y elaboración de lo que hoy se llama diagrama de Argand, que representa el número complejo $a+b\sqrt{-1}$ por un vector cuyas componentes rectangulares sean (a, b). De todo esto, resulta evidente que Hamilton leyó éste trabajo, por lo menos, tan pronto como fué publicado, y que ya en 1830, tres años antes de la memoria sobre el álgebra, le fué sugerido el problema de la multiplicación conjunta de dos vectores en el espacio tridimensional. En 1834 y 1835 construyó una «teoría general de tripletes» y «ello fué, dijo, el motivo que entonces me indujo a asignar importancia especial a la consideración de los tripletes... Este fué el deseo de corregir en forma nueva y útil, o por lo menos interesante, los cálculos mediante la geometría, con alguna extensión nueva al espacio de tres dimensiones, de un método de construcción o representación empleado con éxito por Mr. Warren».

El problema estaba en la mente de los matemáticos contemporáneos y los hermanos Juan y Carlos Graves y Augusto De Morgan intentaron su solución. Pero fué Hamilton quien atacó el problema con éxito:

En la representación de Argand de un vector en un plano mediante un complejo ordinario, la multiplicación de los vectores está determinada por la fórmula algebraica:

$$(x+iy)\,(x'+iy')=X+iY$$

en la que

$$i^2=-1,\quad X=xx'-yy',\quad Y=xy'+x'y.$$

Ahora, la fórmula para la multiplicación de determinantes da

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2 & xx'-yy' \\ xx'-yy' & x'^2+y'^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & -y \\ x' & y' \end{vmatrix}^2 \qquad (1)$$

o

$$(x^2+y^2)\,(x'^2+y'^2)=X^2+Y^2 \qquad (2)$$

así, $(x^2+y^2)^{1/2}$ es el módulo de multiplicación, es decir, la función que, en el producto, tiene el mismo valor que el producto de las correspondientes funciones de los factores.

En 1843 Hamilton, abandonando su notación anterior, propone representar el vector en el espacio tridimensional por $x+iy+jz$, donde i y j son entes, tales que

$$i^2=j^2=-1 \qquad (3)$$

quedando todavía indeterminadas todas sus demás propiedades.

Un segundo vector estaría representado por $x'+iy'+jz'$ y la manifiesta analogía de (1) es un caso del teorema de Cauchy sobre la multiplicación de dos disposiciones, especialmente,

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2+x^2 & xx'-yy'-zz' \\ xx'-yy'-zz' & x'^2+y'^2+z'^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & -y \\ x' & y' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x & -z \\ x' & z' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} y & z \\ y' & z' \end{vmatrix}^2,$$

o,

$$(x^2+y^2+z^2)(x'^2+y'^2+z'^2) =$$
$$(xx'-yy'-zz')^2+(xy'+x'y)^2+(xz'+x'z)^2+(yz'-y'z)^2. \quad (4)$$

El primer miembro de esta ecuación es el producto de los cuadrados de los módulos de multiplicación de los dos vectores, pero el miembro de la derecha no contiene tres, sino cuatro cuadrados. Apoyándose en esto, Hamilton vió que las operaciones geométricas del espacio tridimensional requerían para su descripción, no tripletes, sino cuadrupletes; pues si consideramos, por ejemplo, la operación que efectuada sobre un vector α lo convierte en otro β vemos que para especificar esta operación, necesitamos conocer la relación de las longitudes de α y β el ángulo que forman, y el nodo y la inclinación del plano en el que yacen, es decir, en total cuatro números. De ahí que él estaba preparado para aceptar la ecuación (4), como la que da el módulo de multiplicación del producto de dos vectores.

Ahora tenemos, multiplicando,

$$(x+iy+jz)(x'+iy'+jz') = (xx'-yy'-zz')+i(xy'+x'y)$$
$$+j(xz'+x'z)+ijyz'+jizy'. \quad (5)$$

Comparemos (5) con (4). De la (5) resulta que la ecuación del módulo de multiplicación de los dos vectores, cuyo primer miembro consiste en el producto $(x^2+y^2+z^2)(x'^2+y'^2+z'^2)$ debe contener, en el otro miembro, el cuadrado de $(xx'-yy'-zz')$ el cuadrado de $(xy'+x'y)$, el cuadrado de $(xz'+x'z)$ y otro cuadrado que corresponde a los términos $ijyz'+jizy'$. Pero de la comparación con la (4), resulta que éste último cuadrado debe ser $(yz'-y'z)^2$; y para obtener ésto de $ijyz'+jizy'$, debe ser

$$ji = -ij.$$

El momento cumbre en la historia del simbolismo matemático, fué éste. Comenzó entonces un proceso creador que produjo, no solamente los cuaterniοs, sino todos los otros sistemas que rompieron con las viejas reglas; las matrices, de Cayley y Sylvester, la lógica simbólica de Boole, la *Ausdehnungslehre* de Grassmann, las díadas de Gibbs, y el álgebra de la mecánica cuántica de Heisenberg-Dirac.

Llamando k a ij, tenemos:

$$ij = k = -ji \tag{6}$$

y las ecuaciones (4) y (5) pueden ahora escribirse

$$(x^2 + y^2 + z^2)(x'^2 + y'^2 + z'^2) = X^2 + Y^2 + Z^2 + W^2 \tag{4a}$$

donde

$$(x + iy + jz)(x' + iy' + jz') = X + iY + jZ + kW.$$

De (3) y (6) podemos deducir inmediatamente las ecuaciones fundamentales

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, \quad ij = k = -ji, \quad jk = i = -kj, \quad ki = j = -ik.$$

Ahora Hamilton introdujo una innovación, escribiendo el cuadrinomio

$$w + ix + jy + kz.$$

Durante un tiempo, pensó llamarlo *gramarismo,* pero prevaleció el nombre de *cuaternión.* El teorema de la multiplicación de los cuaternios resultaba de las ecuaciones (7), y la nueva ciencia estaba fundada.

Las dificultades de los tripletes, que durante tanto tiempo detuvieron a Hamilton, fueron resueltas por un camino completamente diferente por De Morgan, cuya «álgebra triple» no carece de interés. Como hemos visto, Hamilton estableció la condición de que el módulo de multiplicación del triplete $a + bi + cj$ debía ser $(a^2 + b^2 + c^2)^{1/2}$. Pero un sistema de álgebra triple con ese módulo, es seguro que no puede existir, porque el problema de hallar tres cuadrados en el que entren simétricamente las letras acentuadas y las no acentuadas, y cuya suma sea igual a $(a^2+b^2+c^2)(a'^2+b'^2+c'^2)$, puede demostrarse que es equivalente al problema de hallar tres puntos sobre una esfera, cada uno de los cuales sea antípoda de los otros dos.

No obstante, no es necesario que el módulo sea una función simétrica de a, b, c, y De Morgan demostró que si se omite esta condición, pueden construirse sistemas de álgebra triple en las que todas las leyes del álgebra ordinaria se cumplen. Así, indicando el triplete con $a+bi+cj$, si convenimos que:

$$i^2=-j, \quad j^2=-i, \quad ij=ji=1,$$

la fórmula para el producto de dos tripletes es

$$\begin{aligned}(a+bi+cj)(a'+b'i+c'j) &= (bc'+cb'+aa') \\ &+ (ab'+ba'-cc')\,i + (ac'+ca'-bb')\,j.\end{aligned}$$

El módulo de multiplicación es $(a^2+b^2+c^2+ab+ac-bc)^{1/2}$; porque si

$$A=bc'+cb'+aa', \quad B=ab'+ba'-cc', \quad C=ac'+ca'-bb',$$

obtenemos la identidad

$$\begin{aligned}(a^2+b^2+c^2+ab+ac-bc)&(a'^2+b'^2+c'^2+a'b'+a'c'-b'c') \\ &= A^2+B^2+C^2+AB+AC-BC.\end{aligned}$$

Las leyes conmutativa, asociativa y distributiva son válidas para éste sistema. Otra propuesta de De Morgan fué conservar las propiedades conmutativa y distributiva, y suprimir la asociativa; ésto ocurre, por ejemplo, con el triplete $a+bi+cj$ si establecemos que

$$i^2=j^2=ij=-1.$$

Como $(ii)j$ no es igual a $i(ij)$, la propiedad asociativa no rige. Ahora, debemos tener, como producto de dos tripletes

$$(a+bi+cj)\,(a'+b'i+c'j)=[aa'-(b+c)\,(b'+c')]$$
$$+\,(ab'+ba')i+(ac'+ca')j.$$

El módulo de multiplicación es:

$$[a^2+(b+c)^2]^{1/2}$$

porque tenemos idénticamente,

$$[a^2+(b+c)^2]\,[a'^2+(b'\pm c')^2]=[aa'-(b+c)\,(b'+c')]^2$$
$$+\,(ab'+ba'+ac'+ca')^2.$$

De Morgan discutió la interpretación geométrica de sus álgebras, pero no es tan simple como la de los cuaterniones. Además, los cuaterniones son fundamentalmente ventajosos, por ejemplo porque, como lo indica un teorema, descubierto mucho después, las únicas álgebras asociativas lineales en el campo de los números reales en que la división es unívocamente posible, son, el campo de los números reales, el campo de los números complejos ordinarios, y los cuaterniones reales. En la competencia de los sistemas, Hamilton sobrevivió como el mejor, y sus rivales, hoy, han sido olvidados.