CUATERNIOS Y MATRICES

por A. W. Conway
University College, Dublin

Introducción

El término matrices fué usado primerámente por Cayley en una publicación en francés en 1855, en el periódico de Crelle. Una exposición formal de las principales propiedades de las matrices fueron dadas por él mismo más tarde en el Philosophical Transactions de la Sociedad Real (1855). Muchas de sus propiedades eran ya conocidas por Hamilton. En 1853 dió a conocer en su «Lecturas sobre los Cuaterniones», el hecho de que una matriz satisface una cierta ecuación simbólica, en este caso una cúbica. Cayley lo probó para el caso de una cuadrática y una cúbica, y dedujo que debía cumplirse en general. C. S. Pierce (1881) expresó al cuaternión como una matriz, tal que $w+\alpha x+\beta y+\gamma z$ es equivalente a

$$\begin{pmatrix} w+ix & y-iz \\ -y-iz & w-ix \end{pmatrix}$$

es decir,

$$w\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}+x\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}+y\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}+z\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

Pauli empleó éstas matrices años más tarde. Ya anteriormente, en 1878, Frobenius utilizó matrices cuadradas de 4.º orden que cumplían las leyes de combinación de los cuaternios desarrolladas más tarde por Eddington.

No obstante, no es mi propósito establecer conexiones entre el desarrollo de los cuaterniones, y el de las matrices, sino solamente mostrar las combinaciones de los cuaterniones, que son equivalentes a las matrices empleadas por la física teórica de los últimos años, en particular en lo que se refiere a ciertas ecuaciones de partículas. Es efectivamente éste el desarrollo moderno de la centenaria controversia entre la teoría corpuscular y la ondulatoria. Huyghens, Newton, Fresnel, J. J. Thompson, Bohr, Lorenz, De Broglie y Schrödinger, contribuyeron a dilucidar la cuestión.

La experiencia concede igual fuerza a cada una de las dos posiciones, y actualmente se acepta que existen dos aspectos para una partícula. Su concepción física le está vedada a nuestra imaginación, así como no podemos imaginar cuatro dimensiones, o un espacio elíptico, y debemos relegarle para siempre, a la representación matemática. La ecuación de Schrödinger muestra que para cada partícula existe siempre el aspecto de onda; y que todas sus ecuaciones como partícula son factorización de alguna forma de ecuaciones diferenciales a derivadas parciales. Matemáticamente, la idea no es nueva. Además del factoreo del cuaternio como

$$\nabla^2 = \left(\alpha \frac{\partial}{\partial x} + \beta \frac{\partial}{\partial y} + \gamma \frac{\partial}{\partial z}\right)^2$$

$$\nabla^2 + \frac{\partial^2}{\partial t^2} = \left(\alpha \frac{\partial}{\partial x} + \beta \frac{\partial}{\partial y} + \gamma \frac{\partial}{\partial z} + i \frac{\partial}{\partial t}\right)\left(\alpha \frac{\partial}{\partial x} + \beta \frac{\partial}{\partial y} + \gamma \frac{\partial}{\partial z} - i \frac{\partial}{\partial t}\right),$$

debe ponerse atención en el trabajo de J. Brill (1889, 1892, 1894) en el que $\nabla^2 + \frac{\partial^2}{\partial t^2}$ es factoreado usando matrices que obedecen a las mismas reglas, que las de Eddington y Dirac.

Una forma cuaterniónica fué dada (Conway, 1936, 1937) para estas últimas matrices en términos de funciones cuaterniónicas lineales simplificadas. Las ecuaciones de Proca para el campo del mesón $(s = 1)$ conducen a un aspecto de partícula que contiene matrices (Duffin, 1938; Kemmer, 1939) cuyas propiedades fueron estudiadas por Heitler (1943) y Schrödinger. Estas matrices, que en su forma más sencilla contienen 100 términos, obedecen a complicadas reglas de conmutación. El objeto de este trabajo es la obtención de matrices cuaterniónicas que obedezcan a las mismas reglas de conmutación. La complejidad de estas matrices proviene de la asimetría de las ecuaciones de Proca. Poniéndolas en una forma equivalente de cuaternión, muchas matrices sencillas pueden ser utilizadas para el aspecto de partícula de la ecuación del mesón.

Matrices de Dirac-Eddington

Si α, β y γ son los vectores unitarios fundamentales, que cumplen

$$\alpha^2 = \beta^2 = \gamma^2 = \alpha\,\beta\,\gamma = -1$$

una típica matriz de Eddington

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

puede ser expresada en la forma $\alpha\,(\;)\,\beta$. Las otras pueden ser escritas según el siguiente esquema:

$$\begin{array}{lllll} \alpha(\;)\alpha & \beta(\;)\alpha & \gamma(\;)\alpha & i(\;)\beta & i(\;)\gamma \\ \alpha(\;)\beta & \beta(\;)\beta & \gamma(\;)\beta & i(\;)\gamma & i(\;)\alpha \\ \alpha(\;)\gamma & \beta(\;)\gamma & \gamma(\;)\gamma & i(\;)\alpha & i(\;)\beta \\ \beta(\;)i & \gamma(\;)i & \alpha(\;)i & & \\ \gamma(\;)i & \alpha(\;)i & \beta(\;)i. & & \end{array}$$

Debe tenerse en cuenta que todas las funciones en una fila o columna anti conmutan, y que dos funciones en diferentes filas y columnas conmutan. Si tomamos dos funciones conmutables cualesquiera, por ejemplo $\alpha(\;)\beta$ y $\gamma(\;)\alpha$ y formamos funciones tales como $f(\;) = \frac{1}{2}[\alpha(\;)\beta + \gamma(\;)\alpha]$ obtenemos $f^3 = f$ y ecuaciones como $f_1 f_2 f_3 + f_3 f_2 f_1 = 0$. En la otra sección se dará una generalización de estas funciones.

Se puede señalar que las matrices de Frobenius (loc. cit.), son, en forma cuaterniónica, $1, \alpha(\;), \beta(\;), \gamma(\;)$.

Funciones Subsidiarias

Represente $w_r + \alpha_r\;(r = 1, 2, 3, 4)$ cuatro cuaterniones que forman cuadrivectores ortogonales de modo que

$$w_r\,w_s - S\,\alpha'_r\,\alpha'_s = \delta_{rs}.$$

Sea otro conjunto $w_r + \alpha'_r$ teniendo las mismas partes escalares, tal que

$$w_r w_s - S \alpha'_r \alpha'_s = \delta_{rs}.$$

Aquí se puede hacer notar que si tenemos cualquier conjunto ortogonal de cuadrivectores, podemos obtener todos los demás mediante la transformación generalizada de Lorenz

$$\mathrm{a}\,(\,)\,\mathrm{b}, \quad \mathrm{Na} = \mathrm{Nb} = 1.$$

Uno de ellos es

$$1, \alpha, \beta, \gamma.$$

Luego, la expresión más general de estos conjuntos es

$$\mathrm{a}\,\mathrm{b}, \quad \mathrm{a}\,\alpha\,\mathrm{b}, \quad \mathrm{a}\,\beta\,\mathrm{b}, \quad \mathrm{a}\,\gamma\,\mathrm{a}.$$

Para obtener un conjunto, dado uno cualquiera (digamos q) es necesario solamente tomar dos cuaterniones tales que $\mathrm{a\,b} = \mathrm{p}$. Para otros desarrollos véase Weiss (1941).

Formando las funciones

$$\mathrm{f}_r = \frac{1}{2}\left[\alpha_r\,(\,) + (\,)\,\alpha'_r\right]$$

$$\mathrm{g}_r = \frac{1}{2}\left[\alpha_r\,(\,) - (\,)\,\alpha'_r\right]$$

encontramos

$$\mathrm{f}_r \mathrm{f}_s \mathrm{f}_t + \mathrm{f}_t \mathrm{f}_s \mathrm{f}_r = (w_r w_s - \delta_{rs})\mathrm{f}_r + (w_t w_r - \delta_{ts})\mathrm{f}_t \quad (r, s, t = 1, 2, 3, 4)$$

$$\mathrm{g}_r \mathrm{g}_s \mathrm{g}_t + \mathrm{g}_t \mathrm{g}_s \mathrm{g}_r = (w_r w_s - \delta_{rs})\,\mathrm{g}_r + (w_t w_s - \delta_{ts})\,\mathrm{g}_t$$

$$\mathrm{f}_r \mathrm{g}_t + \mathrm{f}_t \mathrm{g}_r = 0$$

$$w_r\,(\mathrm{f}_s \mathrm{f}_t + \mathrm{g}_t \mathrm{g}_s) + w_t\,(\mathrm{f}_s \mathrm{f}_r + \mathrm{g}_r \mathrm{g}_s) - 2\,w_r w_s w_t = -\,w_r\,\delta_{ts} - w_t\,\delta_{rs}.$$

Los valores propios (eigenwerten) de f_r son, de acuerdo con lo anterior $0, i\,a_r, -\,i\,a_r$. Las multiplicidades se encuentran obteniendo los puntos unidos. Debe tenerse en cuenta que desde que $w_r^2 - \alpha_r^2 = w_r^2 - \alpha_r'^2 = 1$, podemos poner $-\alpha_r^2 = -\alpha_r'^2 = a_r^2$.

Nosotros tenemos

$$f_r(1) = \frac{1}{2}(\alpha_r + \alpha'_r)$$

$$f_r(\alpha_r) = \frac{1}{2}(-a_r^2 + \alpha_r \alpha'_r)$$

$$f_r(\alpha'_r) = \frac{1}{2}(-a_r^2 + \alpha_r \alpha'_r)$$

$$f_r(\alpha_r \alpha'_r) = -\frac{1}{2} a_r^2 (\alpha_r + \alpha'_r).$$

Así, correspondientemente al valor característico cero, obtenemos

$$A(\alpha_r - \alpha'_r) + B(a_r^2 + \alpha_r \alpha'_r)$$

donde las constantes escalares arbitrarias muestran que la multiplicidad de la raíz cero es dos. Los otros puntos unidos son

$$a_r(\alpha_r + \alpha'_r) \pm i(a^2 - \alpha_r \alpha'_r).$$

Para la función r hallamos

$$A(\alpha_r + \alpha'_r) + B(a_r^2 - \alpha_r \alpha'_r), \quad a_r(\alpha_r - \alpha'_r) \pm i(a^2 + \alpha_r \alpha'_r).$$

Matrices del Mesón

Las matrices de Duffin Kemmer $\beta_r\,(r = 1, 2, 3, 4)$ satisfacen las ecuaciones

$$\beta_r \beta_s \beta_t + \beta_t \beta_s \beta_r = \delta_{rs} \beta_t + \delta_{ts} \beta_r \,.$$

o, en otra forma

$$(\Sigma\, x_r \beta_r)^3 = \Sigma\, x_r^3 \,.\, \Sigma\, x_r \beta_r.$$

Poniendo

$$\Gamma_r = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \mathrm{f}_r & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{w}_r & -\mathrm{g}_r \\ -\mathrm{f}_r & \mathrm{w}_r & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{g}_r & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

hallamos

$$\Gamma_r \Gamma_s \Gamma_t + \Gamma_t \Gamma_s \Gamma_r = \delta_{rs} \Gamma_t + \delta_{ts} \Gamma_r.$$

La prueba puede ser abreviada poniendo

$$A_r = \begin{pmatrix} \mathrm{f}_r & 0 \\ \mathrm{w}_r & -\mathrm{g}_r \end{pmatrix}, \quad B_r = \begin{pmatrix} -\mathrm{f}_r & \mathrm{w}_r \\ 0 & \mathrm{g}_r \end{pmatrix}$$

tal que

$$\Gamma_r = \begin{pmatrix} 0 & A_r \\ B_r & 0 \end{pmatrix}$$

y

$$\Gamma_r \Gamma_s \Gamma_t + \Gamma_t \Gamma_s \Gamma_r = \begin{pmatrix} 0 & A_r B_s A_t + A_t B_s A_r \\ B_r A_s B_t + B_t A_s B_r & 0 \end{pmatrix}$$

Matrices del mesón simplificadas

Llamando ψ y ω a los potenciales escalar y vectorial del campo del mesón, y con ε y η el exa-vector, las ecuaciones de Proca pueden ser escritas, siendo m una constante

$$S\nabla\varepsilon = m\psi$$

$$V\nabla\eta - \dot{\varepsilon} = -m\omega$$

$$-\dot{\omega} - \nabla\psi = m\varepsilon$$

$$V\nabla\omega = m\eta.$$

De esto sigue

$$S\nabla\omega - \dot{\psi} = 0$$

$$V\nabla\varepsilon + \dot{\eta} = 0$$

$$S\nabla\eta = 0.$$

Combinando, obtenemos la forma cuaterniónica de las ecuaciones de Proca

$$\nabla \varepsilon + \dot{\eta} = m\,\psi$$

$$-\nabla \eta + \dot{\varepsilon} = m\,\omega$$

$$-\nabla \psi - \dot{\omega} = m\,\varepsilon$$

$$\nabla \omega - \dot{\psi} = m\,\eta.$$

De ellas, obtenemos las matrices $\Gamma'_x\, \Gamma'_y\, \Gamma'_z\, \Gamma'_t$, donde

$$\Gamma_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha \\ -\alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Gamma'_y = \text{etc.}$$

$$\Gamma'_t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

en que

$$\Gamma_\lambda{}^2 = 1 \qquad \Gamma'_\lambda \Gamma'_\mu + \Gamma'_\mu \Gamma'_\lambda = 0 \quad (\lambda, \mu = x, y, z, t)$$

y de aquí la ecuación del aspecto de partícula

$$\left[\Gamma'_x \frac{\partial}{\partial x} + \Gamma'_y \frac{\partial}{\partial y} + \Gamma'_z \frac{\partial}{\partial z} + \Gamma'_t \frac{\partial}{\partial t} - m\right] \begin{pmatrix} \psi \\ i\,\omega \\ \varepsilon \\ i\,\eta \end{pmatrix} = 0$$

Estas matrices pueden ser generalizadas por medio de los cuadrivectores ortogonales, $w_r + \alpha_r$. Luego

$$\Gamma_r = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha_r & w_r \\ 0 & 0 & -w_r & \alpha_r \\ -\alpha_r & -w_r & 0 & 0 \\ w_r & \alpha_r & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (r = 1, 2, 3, 4).$$