

# POLARIZACION DEL VACIO POR UN POTENCIAL DISCONTINUO

por

GUIDO BECK

Observatorio Nacional, Córdoba  
(Recibido el 26 de marzo de 1945)

## POLARISATION OF THE VACUUM BY A DISCONTINUOUS POTENTIAL

SUMMARY: The considerations recently given on the microkinematics implied by DIRAC's theory (<sup>1</sup>), have, so far, only been applied to the case of the vacuum. The present paper shows, how the influence of an external electromagnetic field on the state of the vacuum can be investigated and considers in detail a simplified, onedimensional model of a discontinuous electrostatic potential.

§ 1. Introducción. Como hemos mostrado en el trabajo anterior arriba citado, la teoría de *Dirac* implica una cinemática particular, describiendo el estado electromagnético del vacío simultáneamente con sus propiedades mecánicas. El estudio del estado del vacío en presencia de un campo electromagnético exterior debe, pues, revelar nuevas propiedades características de la teoría de *Dirac*. Sabemos que las modificaciones introducidas en el estado electromagnético del vacío por fuerzas exteriores pueden ser consideradas como una «polarización» del vacío, conduciendo en el caso de influencias suficientemente fuertes a una separación de cargas de ambos signos, conocida como producción de pares de electrones.

La dificultad de principio que se opone al tratamiento riguroso de nuestro problema fluye del hecho que una teoría satisfactoria tiene que incluir, desde el principio, la descripción del campo electromagnético y no permite la introducción del concepto de un campo «exterior». Sin embargo, el estado actual de la teoría todavía no permite llegar a una descripción tan completa. En el presente trabajo admitiremos, pues, de

---

(<sup>1</sup>) G. BECK, Field concepts in quantum theory. Rev. Mod. Phys. (Under press).

manera fenomenológica, la existencia de un campo llamado «exterior». La introducción de tal campo ya fué dada por *Dirac* desde el principio y fué justificada por un gran número de resultados, por ej., el éxito de la teoría de *Dirac* del átomo de hidrógeno. Podemos, pues, esperar que el mismo procedimiento revele, por lo menos aproximadamente, los fenómenos producidos por un campo en el vacío.

El primer resultado, al cual llegaremos más abajo, será que el estado electromagnético del vacío no implica las magnitudes del campo exterior, p. ej., del campo electrostático de un protón. Este resultado no puede ser inesperado: la referida teoría de *Dirac*, no puede informar sobre más que los fenómenos debidos a los electrones y permite, por lo menos en la aproximación alcanzada, separar el campo electromagnético en dos partes: en una parte debida a los electrones (incluso del vacío) y en otra parte, debida a origen ajeno (p. ej., a protones). La posibilidad de separación mencionada representa un hecho notable, a pesar de que todavía no conocemos su origen ni sus límites. Sin embargo, podemos afirmar que tal separación ya aparece, en forma todavía más general, en la electrodinámica clásica. El carácter lineal de las ecuaciones de *Maxwell* implica la superposición aditiva de los campos de dos cargas cualesquiera, y no solamente de los campos de un electrón y de un protón.

La investigación del caso más general, implicando la existencia de todas clases de partículas con sus campos respectivos, parece, en este momento, todavía fuera del alcance de la base actual de nuestra teoría. Sin embargo, ya será una de las tareas más importantes la de llegar, por lo menos en el caso restringido de ausencia de otras partículas, a una descripción completa, no fenomenológica, de un número de electrones y del campo electromagnético producido por ellos. El presente trabajo puede ser considerado como un primer paso para poder resolver el problema restringido.

El segundo resultado obtenido más abajo, se refiere al cálculo del estado del vacío en el caso de un campo electrostático discontinuo. Mostraremos, que este estado corresponde a una polarización y que la separación de cargas positivas y negativas se mantiene finita, incluso en el caso de una diferencia de potencial  $\Delta V > 2mc^2$ . Concluimos de nuestro resultado, que

la teoría de Dirac ya contiene la interacción intrínseca entre un electrón y un positrón, contrariamente a las ideas de la teoría actual. Queremos sin embargo, antes de entrar en la discusión detallada de nuestro problema, mencionar en el § 2, las dificultades intrínsecas de las consideraciones de las teorías anteriores.

§ 2. Dificultades de la interpretación del comportamiento de un electrón en un salto de potencial según la mecánica cuántica. Consideraremos, primero, el caso del potencial representado por la figura 1a. Es sabido que, según la mecánica cuántica, tal potencial permite calcular, en acuerdo con las experiencias, la reflexión y el pasaje de electrones de distintas velocidades y direcciones de movimiento. Resulta, en particular, que un electrón llegando de la izquierda con una energía cinética inferior a  $\Delta V$  queda completamente reflejado, pero penetra una distancia finita al interior de la barrera de potencial. Al contrario, un electrón llegando de la derecha con una energía cinética pequeña ( $\leq \Delta V$ ) es con gran probabilidad reflejado, a pesar de que las fuerzas exteriores actúan en dirección inversa. Ambos fenómenos están en contradicción con los conceptos elementales de la dinámica, según los cuales cada cambio de movimiento supone la existencia de fuerzas en el lugar y en la dirección donde se produce el cambio de movimiento.

Siendo irrefutables las confirmaciones experimentales de la mecánica ondulatoria, mucha gente ha aceptado el punto de vista de que el segundo principio de *Newton* ya no se aplica en casos tan extremos. Queremos insistir aquí en que tal punto de vista es prematuro. Una vez que admitimos la existencia de una polarización del vacío, la fuerza que actúa sobre un electrón no puede ser determinada considerando solamente el campo electromagnético exterior. Sin embargo, tampoco es posible definir y añadir un campo espacio-temporal que tenga en cuenta la polarización del vacío, ya que la polarización del vacío depende esencialmente del impulso del electrón considerado. Llegamos, pues, a la conclusión de que el concepto de un «campo espacio-temporal» en su forma actual, no puede ser mantenido en la micro-física y tiene que ser reemplazado por el concepto más general de un «campo definido en el espacio-tiempo de la fase». Llamamos aquí espacio-tiempo de fase el continuo de

siete dimensiones, las coordenadas del cual son, en el caso más sencillo,  $x, y, z, t, p_x, p_y, p_z$ . Es este campo que tendremos que estudiar más abajo.

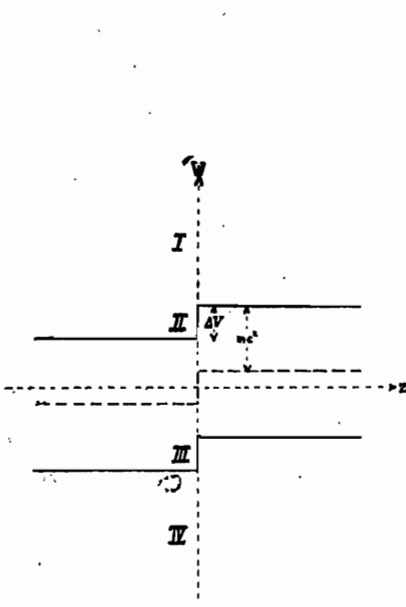


Fig. 1 a

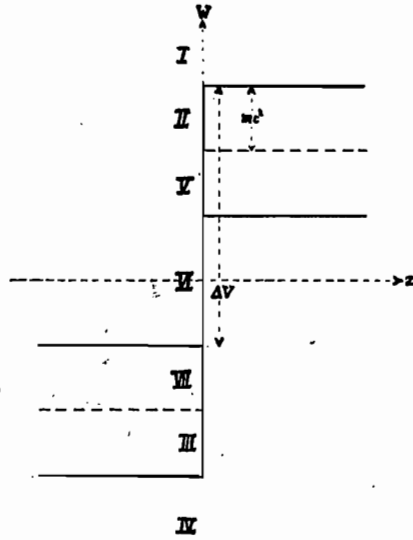


Fig. 1 b

El segundo caso que presenta interés para nosotros, es el del potencial representado por la figura 1 b. Se trata, aquí, del problema conocido bajo el nombre de la «paradoja de *Klein*». *Klein* mostró, que según la primera interpretación de la teoría de *Dirac*, un electrón de pequeña energía cinética ( $< \Delta V - 2mc^2$ ) es capaz de penetrar de la izquierda, con probabilidad finita, y, después de un cambio espontáneo del signo de su energía cinética, continuar a la derecha del salto. Ningún sentido físico puede ser atribuido a tal interpretación del formalismo de *Dirac*. *Dirac* propuso, entonces, una modificación de interpretación, conocida bajo el nombre de la «teoría de las lagunas», que, cualitativamente, permite dar una interpretación física y puede ser verificada por las experiencias. Según la construcción de *Dirac*, tenemos que imaginar, que la parte de energía cinética negativa de nuestra figura está llena de electrones inobservables, considerando como positrón cada laguna que aparece

si uno de estos electrones penetra a la izquierda y forma, allá, un electrón observable.

La dificultad de principio de la interpretación dada por *Dirac* es que supone que podemos tratar un electrón, sin tener en cuenta su campo electromagnético. Despreciando la interacción entre los electrones, podemos, efectivamente, admitir una corriente infinita de cargas positivas y negativas producida por un potencial discontinuo. Sin embargo, tal interpretación no es compatible, ni con la experiencia, ni con las propiedades del formalismo de *Dirac*. Mostraremos, más abajo, que la separación de cargas, producida por el potencial de la figura 1 b, se mantiene finita, lo que indica que el formalismo de *Dirac* ya contiene la interacción intrínseca entre electrones, sin que haga falta recorrer al concepto filosóficamente inadmisibile de electrones no observables.

§ 3. Transformaciones unitarias generales. Consideraremos, en lo siguiente, las soluciones de la ecuación de *Dirac*

$$-\frac{1}{c} \frac{\partial \psi}{\partial t} + \vec{\alpha} \text{grad } \psi + \frac{i}{\Lambda} \beta \psi + \frac{2ai}{h} U(t) \psi = 0. \quad (1)$$

donde la energía  $U(t)$  puede ser elegida de tal manera que

$$\begin{aligned} U &= \text{const. para } t \leq t_0 \\ U &= U(t) \text{ para } t \geq t_0. \end{aligned} \quad (2)$$

Incluyendo el límite  $t_0 \rightarrow -\infty$ , las condiciones (2) no implican ninguna restricción esencial del caso más general. Supondremos, además, que, para  $t < t_0$ , la solución de (1) sea dada por un sistema orto-normal de funciones

$$u_r (*).$$

---

(\*) Tenemos que mencionar explícitamente, que contrariamente a las magnitudes de (1) utilizadas en la teoría general, consideramos aquí solamente soluciones particulares, de manera que  $\psi_i$  y  $u_r$ , representan spinores habituales de cuatro componentes.

Entonces, la solución general de (1) puede ser escrita

$$\psi_i = s_{ir}(t) \cdot u_r (*)$$

$$s_{ir}(t) = \delta_{ir} e^{-\frac{2ai}{\hbar} E_i t} \text{ para } t \leq t_0. \quad (3)$$

Concluimos fácilmente de (1) que

$$\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\tilde{\psi}_i \psi_k) - \operatorname{div} (\tilde{\psi}_i \vec{\alpha} \psi_k) = 0; \quad \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int \tilde{\psi}_i \psi_k d\tau = 0 \quad (4)$$

y

$$\int \psi_i^* \psi_k d\tau = s_{ir}^* s_{kr} = \int u_i^* u_k d\tau = \delta_{ik} \quad (5)$$

La relación (5) nos enseña, que el sistema  $\psi_i$  de funciones representa un sistema ortonormal de funciones para cualquier momento  $t$  y que  $s_{ir}(t)$  es una transformación unitaria.

Sea  $F$  un operador lineal. La expresión

$$\{F\}_{ik}^\psi = \psi_i^* F \psi_k \quad (6)$$

representa, entonces, una forma bilineal. La transformación  $s_{ir}(t)$  transforma la forma (6) según

$$\{F\}_{ik}^\psi = s_{ir}^* u_r^* F u_s s_{ks} = s_{ir}^* \{F\}_{rs}^u s_{ks}. \quad (7)$$

En el caso particular, que  $F$  no opera sobre el tiempo, los coeficientes  $s_{ks}$  conmutan con  $F$  y (7) se simplifica de manera

$$\{F\}_{ik}^\psi = s_{ir}^* s_{ks} \{F\}_{rs}^u \quad (8)$$

y conduce, en particular, a la relación

$$\operatorname{Spur} \{F\} = \{F\}_{ii}^\psi = \{F\}_{rr}^u = \text{invariante.} \quad (9)$$

(\*) Dos índices iguales implican sumación sobre todos los valores.

Tenemos, sin embargo, que subrayar el hecho, que la fórmula (9) no es válida, si el operador  $F$  opera sobre la variable  $t$ .

§ 4. Teoremas sobre la polarización del vacío. El teorema (9) puede servir inmediatamente para la investigación de la distribución de cargas y de corrientes en el vacío.

Según la teoría expuesta en el trabajo arriba citado tenemos que poner

$$\begin{aligned} \vec{E} &= 4\pi\mu \{i\vec{\gamma}\} & \vec{H} &= -4\pi\mu \{\beta\vec{\sigma}\} \\ \rho &= \mu \operatorname{div} \{i\vec{\gamma}\} & & \\ \vec{S} &= -\mu \left( \frac{1}{c} \frac{\partial \{i\vec{\gamma}\}}{\partial t} + \operatorname{rot} \{\beta\vec{\sigma}\} \right). \end{aligned} \quad (10)$$

Aplicando la relación (9) y teniendo en cuenta que  $\operatorname{Spur} \{i\vec{\gamma}\} = 0$  en el caso de ausencia de campos exteriores, resulta

$$\operatorname{Spur} \rho = \mu \operatorname{Spur} \operatorname{div} \{i\vec{\gamma}\} = \operatorname{div} \operatorname{Spur} \{i\vec{\gamma}\} = 0 \quad (11)$$

$$\operatorname{Spur} \vec{s} = -\mu \operatorname{Spur} \left( \frac{1}{c} \frac{\partial \{i\vec{\gamma}\}}{\partial t} + \operatorname{rot} \{\beta\vec{\sigma}\} \right) \neq 0. \quad (12)$$

La desigualdad (12) fluye del hecho, que la expresión  $\vec{s}$  contiene una derivada con respecto al tiempo.

La relación (11) afirma que la densidad total de carga eléctrica (implicando la suma sobre todos los impulsos y sobre los cuatro estados del carácter) desaparece en cada punto del espacio. Según (12), un teorema análogo no puede ser enunciado con respecto a las densidades de corrientes (\*).

---

(\*) Mencionamos también, que teoremas análogos a (11) y (12) son válidos para las densidades magnéticas

$$\begin{aligned} -\mu \operatorname{Spur} \operatorname{div} \{\beta\vec{\sigma}\} &= 0 \\ \mu \operatorname{Spur} \left( \frac{1}{c} \frac{\partial \{\beta\vec{\sigma}\}}{\partial t} - \operatorname{rot} \{i\vec{\gamma}\} \right) &\neq 0. \end{aligned}$$

Según (11), las magnitudes del campo del vacío (10) no corresponden a ninguna distribución finita de carga eléctrica total, incluso en el caso que el campo exterior, representado por  $U$ , corresponde a una distribución de cargas cualquiera. Es este resultado el que hemos mencionado y discutido arriba, en § 1 y § 2.

§ 5. El ejemplo de un salto de potencial electrostático. Calcularemos en particular la distribución de cargas en el caso simplificado unidimensional del salto de potencial representado por la fig. 1.

La determinación de las combinaciones lineales ortonormales correctas de las autofunciones de la ecuación de *Dirac* presenta, en el caso del potencial de la fig. 1, ciertas dificultades. Estas dificultades fueron resueltas considerando una barrera de potencial (fig. 2) de ancho finito, 2.a, y tendiendo, después, al límite,  $\lim a \rightarrow \infty$ . El cálculo de las autofunciones es elemental y no presenta interés particular. No indicaremos, pues, más que las expresiones de  $\rho$  en las cuatro (resp. siete) regiones de energía, a la izquierda del salto de potencial,  $z < 0$ .

$$\text{I. } W \geq mc^2 + \frac{1}{2} \Delta V$$

$$\rho_{\text{I}} = -\frac{2p_z}{mc} \cdot \frac{p_z(p'_0 + mc) - p'_z(p_0 + mc)}{p_z(p'_0 + mc) + p'_z(p_0 + mc)} \cos(2kz) \quad (13)$$

$$\text{II. } mc^2 - \frac{1}{2} \Delta V \leq W \leq mc^2 + \frac{1}{2} \Delta V$$

$$\rho_{\text{II}} = -\frac{2p_z}{mc} \cos 2(kz + \delta); \quad \text{tg } \delta = \frac{p'_z(p_0 + mc)}{p_z(p'_0 + mc)} \quad (14)$$

$$\text{III. } -mc^2 + \frac{1}{2} \Delta V \geq W \geq -mc^2 - \frac{1}{2} \Delta V$$

$$\rho_{\text{III}} = \frac{4p_z^2 p'_z}{mc} \cdot \frac{(p_0 + mc)(p'_0 + mc)}{p_z'^2 (p_0 + mc)^2 + p_z^2 (p'_0 + mc)^2} e^{2kz} \quad (15)$$



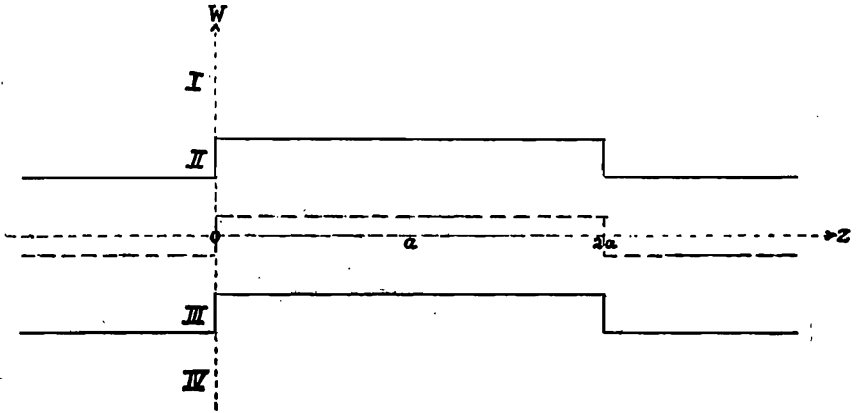


Fig. 2 a

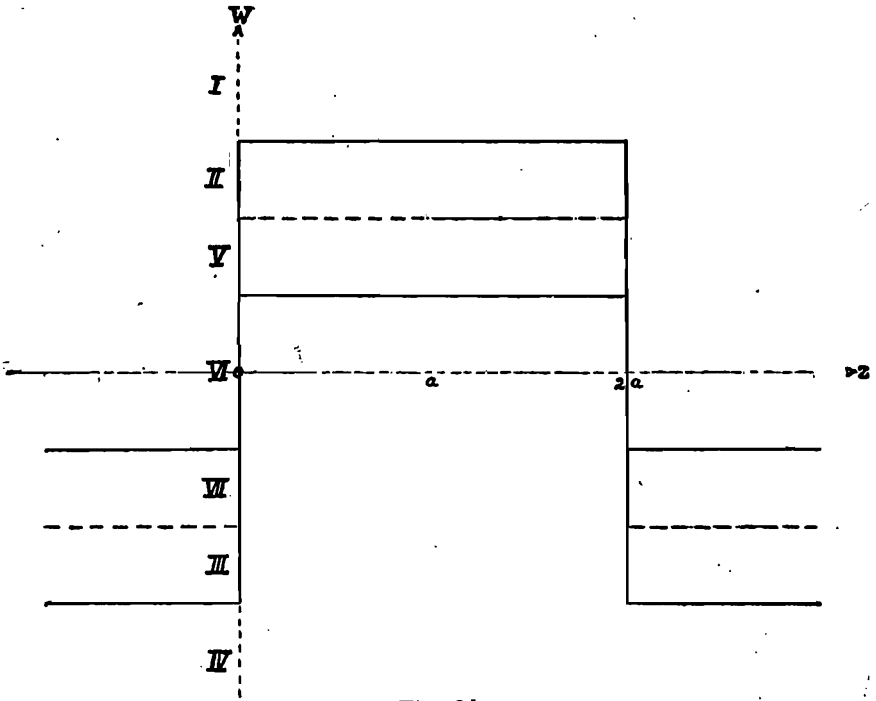


Fig. 2 b

$$\text{IV. } W \leq mc^2 - \frac{1}{2} \Delta V$$

$$\rho_{\text{IV}} = - \frac{2p_z}{mc} \frac{p_z(p'_0 + mc) - p'_z(p_0 + mc)}{p_z(p'_0 + mc) + p'_z(p_0 + mc)} \cos(2kz), \quad (16)$$

con

$$k = \frac{2\pi}{p} p_z$$

$$p_0 = \frac{1}{c} |W + \frac{1}{2} \Delta V|; \quad p'_0 = \frac{1}{c} |W - \frac{1}{2} \Delta V| \quad (17)$$

$$p_z = + \sqrt{|p_0^2 - 1|}; \quad p'_z = + \sqrt{|p_0'^2 - 1|}.$$

La representación gráfica de las expresiones (13-16) está dada, en el caso  $\Delta V = \frac{1}{2} mc^2$ ,  $z = -0$ , por la fig. 3.

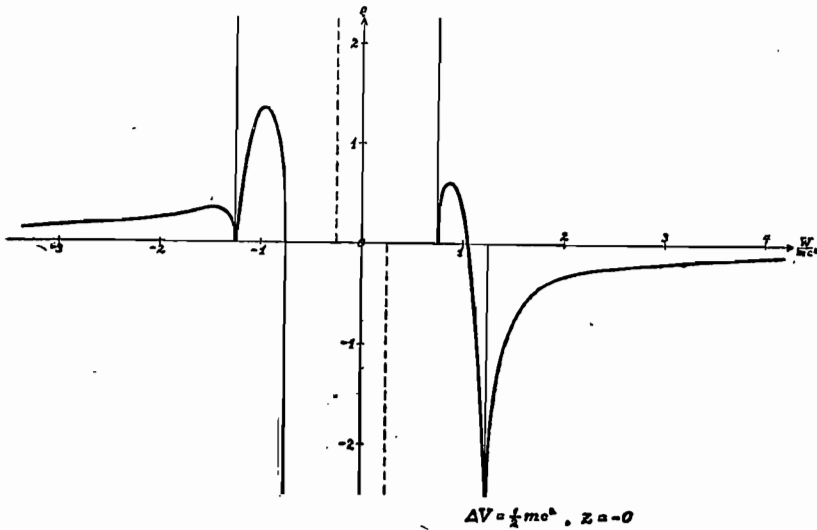


Fig. 3

Caso de la fig. 1 b:

$$\text{I. } W \geq mc^2 + \frac{1}{2} \Delta V$$

$\rho_{\text{I}}$  igual que (13).

$$\text{II. } \frac{1}{2} \Delta V \leq W \leq mc^2 + \frac{1}{2} \Delta V$$

$\rho_{\text{II}}$  igual que (14).

$$\text{V. } -mc^2 + \frac{1}{2} \Delta V \leq W \leq \frac{1}{2} \Delta V$$

$$\rho_{\text{V}} = \frac{2p_z}{mc} \cos 2(kz \leq \bar{\delta}); \quad \text{tg } \bar{\delta} = -\frac{p_z p'_z}{(p_0 + mc)(p'_0 + mc)} \quad (18)$$

$$\text{VI. } mc^2 - \frac{1}{2} \Delta V \leq W \leq -mc^2 + \frac{1}{2} \Delta V$$

$$\rho_{\text{VI}} = \frac{2p_z (p_0 + mc)(p'_0 + mc) - p_z p'_z}{mc (p_0 + mc)(p'_0 + mc) + p_z p'_z} \cos(2kz) \quad (19)$$

$$\text{VII. } -\frac{1}{2} \Delta V \leq W \leq mc^2 - \frac{1}{2} \Delta V$$

$$\rho_{\text{VII}} = \frac{4p_z^2 p'_z}{mc} \frac{(p_0 + mc)(p'_0 + mc)}{(p_0 + mc)^2 (p'_0 + mc)^2 + p_z^2 p_z'^2} e^{2kz} \quad (20)$$

$$\text{III. } -mc^2 - \frac{1}{2} \Delta V \leq W \leq -\frac{1}{2} \Delta V$$

$\rho_{\text{III}}$  igual que (15).

$$\text{IV. } W \leq -mc^2 - \frac{1}{2} \Delta V$$

$\rho_{\text{IV}}$  igual que (16).

En el caso  $\Delta V = 4 \cdot mc^2$ ,  $z = -0$ , las expresiones (13-20) son representadas gráficamente por la fig. 4.

Para  $z = +0$ , las mismas expresiones y figuras se obtienen por la transformación  $W \rightarrow -W$ . Un potencial electrostático

produce, pues, en el vacío una distribución de cargas, con una discontinuidad en el salto,  $z=0$ .

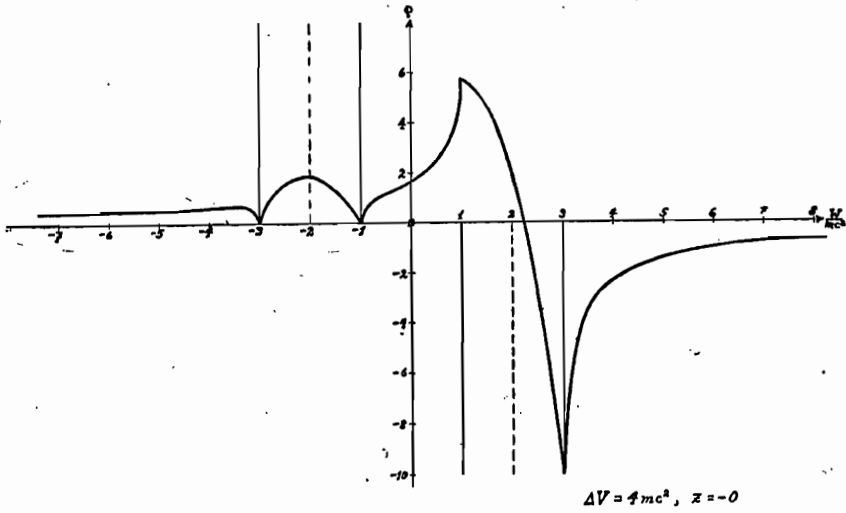


Fig. 4

El autor expresa sus agradecimientos al señor A. Völsch, por la evaluación numérica de las expresiones dadas en el § 5 y a la Señora S. de Sigal por la revisión del texto castellano.