LA SATELITE CONFORME DE UNA CURVA ALGEBRAICA GENERAL

por

EDWARD KASNER

Columbia University
New York, N. Y.

1. —Schwarz definió la simetría respecto cualquier curva base real y analítica; se conoce con el nombre de reflexión de Schwarz y es usada extensamente en la teoría de la prolongación analítica. El autor definió este proceso geométricamente e intrínsecamente en los «Proceedings of the Cambridge International Congress» (1912). Si la curva base se indica por C, la imagen de cualquier punto P del plano se obtiene de la siguiente manera. Por P se trazan las dos líneas mínimas que cortarán a C en dos puntos Q_1 y Q_2. Las restantes líneas mínimas que pasan respectivamente por Q_1 y Q_2 se cortarán en un punto P'. Este punto P' es la imagen del punto P respecto la curva base C. La reflexión de Schwarz es la única transformación conforme inversa que deja fijos los puntos de C. No pueden existir otras transformaciones conformes inversas de período dos.

En este trabajo deseo discutir el caso en que la curva base C es una curva algebraica general. Por tanto operaremos en el plano complejo completo (cuadridimensional). Schwarz consideraba únicamente el plano real de Gauss (bidimensional).

En el plano complejo completo (cuadridimensional), representemos por (x, y) las coordenadas cartesianas de un punto. Las coordenadas mínimas (u, v) están definidas por las relaciones:

$$u = x + iy, \quad v = x - iy, \quad x = \frac{1}{2}(u + v), \quad y = \frac{1}{2i}(u - v). \qquad (1)$$

Puesto que (x, y) son números complejos arbitrarios, se deduce que (u, v) son también números complejos arbitrarios.

Una curva algebraica $F(x, y) = 0$ de grado n se puede escribir en coordenadas mínimas en la forma

$$\phi(u, v) = \sum_{0 \leq k + l \leq n} a_{kl}\, u^k v^l = 0. \tag{2}$$

Por tanto, $\phi(u, v)$ es un polinómio de grado n.

Una simetría conforme con respecto la curva (2) está definida por la transformación conforme covariante

$$\phi(U, v) = 0, \quad \phi(u, V) = 0 \tag{3}$$

y por consiguiente U y V son funciones algebraicas de la forma $U = f(v)$ y $V = g(u)$.

Teorema 1. — *Si la curva algebraica C (2) es de grado n, su reflejada de Schwarz T (3), es algebraica y, en general, de grado n^2.*

En la teoría de Schwarz la transformación era uniforme, por considerarse solamente el entorno local de la curva base C. Sin embargo, en nuestro trabajó, como consideramos todo el plano, la transformación T es multiforme, como indica el Teorema 1.

Si, en particular, la curva base C es una cónica, la transformación T convertirá, en general, cada punto P en cuatro puntos P'. Pero si la cónica es un círculo, se obtiene la inversión ordinaria, la cual es uniforme. Existen casos imaginarios mixtos en que el grado no es cuatro ni uno, sino dos.

2. — Usualmente decimos que la imagen de la curva base C con respecto sí misma es C. Pero en el caso algebraico que ahora consideramos, esto ya no es exactamente cierto. La imagen completa de C consiste parcialmente de C y parcialmente de una nueva curva que definiremos como satélite de C y representaremos por S.

Según (3), la satélite S se obtendrá como parte del resultado de eliminar (u, v) entre las ecuaciones

$$\phi(U, v) = 0, \quad \phi(u, V) = 0. \quad \phi(u, v) = 0. \tag{4}$$

La eliminante con respecto u y v se descompone siempre en factores, conteniendo $\phi(U, V)$, parte que define nuestra curva original C, como factor repetido. Prescindiendo de este factor, obtenemos la ecuación

$$\sigma(U, V) = 0 \tag{5}$$

como ecuación de la satélite S de la curva original C. Esta ecuación puede escribirse en coordenadas cartesianas por medio de (1).

Teorema 2. — *El grado de la satélite S de una curve algebraica general C de grado n es, en general, $n(n-1)^2$.*

La imagen de una curva general C' de grado n con respecto a C es, en general, de grado n^3. Pero la imagen de C con respecto a sí misma es reducible, encontrándose que una rama es la curva C contada un cierto número de veces y la nueva curva satélite S la cual es, en general, de grado $n(n-1)^2$, como afirma el teorema 2.

En el caso de ser C una cónica, la curva satélite S es otra cónica, la cual es confocal con C. Si C es una hipérbola equilátera, la cónica satélite S es idéntica con C. Si C es un círculo no tiene satélite.

La curva satélite S de una cúbica C es, en general, una curva algebraica de grado 12.

Hay casos especiales en que el grado es menor que el dado por el teorema 2. Por ejemplo las cuárticas bicirculares, cuyas satélites son de grado 4 en vez de ser de grado 36.

3. — A continuación introducimos una familia de curvas dependientes de un parámetro

$$\phi(u, v) = c \tag{6}$$

que llamaremos *familia relacionada* de (2). Las simetrías conformes de esta familia relacionada son

$$\phi(U, v) = c, \quad \phi(u, V) = c. \tag{7}$$

Estas transformaciones forman un conjunto de un solo parámetro y usualmente no forman grupo.

Procedamos ahora al estudio de las satélites de una familia relacionada. Eliminando u y v de

$$\phi(U, v) = c, \quad \phi(u, V) = c, \quad \phi(u, v) = c' \tag{8}$$

obtenemos la ecuación

$$\sigma(U, V, c) = 0. \tag{9}$$

Cada curva de la familia relacionada tiene su propia satélite y el conjunto de las satélites de las ∞^1 curvas de la familia relacionada no forman, en general, una familia relacionada, puesto que c aparece en general en forma no lineal.

4. — Para la curva algebraica C, definida por (2), introduzcamos una nueva transformación, que llamaremos *transformación inducida*. Ella está definida por las ecuaciones

$$\phi(U, v) - \phi(u, v) = 0, \quad \phi(u, V) - \phi(u, v) = 0. \tag{10}$$

Escribiendo estas ecuaciones explícitamente y sacando los factores repetidos, obtenemos la forma $U = f(u, v)$, $V = g(u, v)$.

Teorema 3. — *La transformación inducida es, en general, de grado* $(n-1)^2$.

Este efecto inducido tiene la ventaja de ser de grado menor que la simetría de Schwarz, la cual es de grado n^2, pero en general no es conforme. Sin embargo, los detalles para grados superiores serían largos, excepto para el caso de una cónica, en que el proceso de inducción es lineal.

5. — Un caso notable en que el grado de la curva satélite es menor que el correspondiente al caso general, se obtiene por el siguiente resultado:

Teorema 4. — *La curva satélite S de toda curva algebraica potencial C es la misma curva C.*

La curva $\phi(x,y)=0$ donde ϕ es un polinomio de grado u en (x,y) se llama una *curva potencial* si ϕ es armónica, es decir, si $\phi_{xx} + \phi_{yy} = 0$. Toda curva potencial puede obtenerse igualando a cero la parte real o imaginaria de cualquier polinomio de grado n en $u = x + iy$.

En este caso, aunque la transformación T asociada con la curva potencial C es de grado n^2, estudiando su reductibilidad se demuestra que la curva satélite es de grado excepcionalmente bajo. Cuando el grado es 2, se obtiene el ejemplo ya citado de la hipérbola equilátera.

6. — Ya hemos observado que si el grado de C es n, el grado de T es n^2. ¿Cuál será el grado de T^2? Podría suponerse que este grado sea n^4. Sin embargo hemos demostrado la siguiente proposición:

Teorema 6. — *El grado de T^2 es, en general, $n^2(n-1)^2$.*

Toda esta teoría depende del hecho de que las transformaciones son multivalentes y aparecen fenómenos de reductibilidad.

Teorema 7. — *Si la curva base C es una cónica, T es de grado 4, como ya observamos, pero además T^2 es también de grado 4 y todas las iteraciones de T dan transformaciones de grado 4.*

De aquí se deduce que las distintas potencias de T forman un conjunto discontinuo. Este conjunto tiene la propiedad combinatoria, pero ninguna potencia de T es la identidad. Por tanto el conjunto no puede ser un grupo.

Un caso interesante ocurre en el campo imaginario cuando la cónica base C pasa por uno de los puntos circulares del infinito, pero no por el otro. La transformación T es entonces de grado 2 y se encuentra que todas las potencias de T son también de grado 2. De aquí resulta que $T^3 = T$, pero ninguna potencia de T es la identidad. El conjunto completo de todas las potencias de T consiste esencialmente de solamente las transformaciones T y T^2.

7. — Como ejemplo, vamos a ilustrar la teoría general con el caso de una cónica. La simetría conforme es de grado 4 y la satélite es de grado 2. Por tanto, *la satélite de una cónica es una cónica*. La familia relacionada de cónicas es este caso particular está formada por curvas congruentes o semejantes. La transformación inducida es de grado uno y en este caso es una transformación afín.

Consideremos la parábola

$$F(x, y) = y^2 - 2px = 0. \tag{11}$$

En coordenadas mínimas se puede escribir

$$\phi(u, v) = (u - v)^2 + 4p(u + v) = 0. \tag{12}$$

La curva satélite de esta parábola es la nueva parábola

$$\sigma(U, V) = (U - V)^2 + 36p(U + V + 8p) = 0, \tag{13}$$

o sea, en coordenadas cartesianas

$$S(x, y) = y^2 - 18p\,(x + 4p) = 0. \tag{14}$$

La familia relacionada de parábolas es

$$(u - v)^2 + 4p\,(u + v) = c \tag{15}$$

que tienen el conjunto de satélites

$$(U - V)^2 + 36p\,(U + V + 8p) + 36c = 0. \tag{16}$$

En este caso particular las satélites forman una familia relacionada.

La transformación inducida, escrita explícitamente, es

$$U = 2v - u - 4p, \quad V = 2u - v\ 4p, \tag{17}$$

o sea, en coordenadas cartesianas

$$X = x - 4p, \qquad Y = -3y \tag{18}$$

que es una traslación.

Columbia University,
New York, N. Y.

BIBLIOGRAFIA

1. KASNER, *Algebraic potential curves*, Bulletin of the Americain Mathematical Society, 1901. La inversa de una curva potencial es también su propia satélite. La lemniscata es un ejemplo.

2. KASNER, *Conformal Geometry*, Proceedings of the Fifth International Congress of Mathematicians, Vol. 2, p. 81, 1912.

3. KASNER, *Geometry of conformal symetry (Schwarzian reflection)*. Annals of Mathematics, Vol. 38, p. 873, 1937.

4. KASNER, *The two conformal invariants of fifth order*, Transactions of the American Mothematical Society, Vol. 44, p. 25, 1938.

5. COMENETZ, *Conformal Geometry on a surface*, Annals of Mathematics, Vol. 39, p. 863, 1938.

6. Deseo agradecer a Aida Kalish y Fred Supnick por su ayuda en la elaboración de la teoría de los satélites.

7. Ver los escritos de DE CICCO sobre *Multi-isothermal Systems* y *Scale curves*.

8. Ver los últimos escritos sobre satélites aparecidos en Proceetings of National Academy of Sciences, U. S. A.