SOBRE LAS SOLUCIONES DE LA ECUACION $yy''=\phi(y')$ QUE PASAN POR DOS PUNTOS DEL SEMI-PLANO $y>0$

por

MAURICIO MATOS PEIXOTO

1. — *Introducción.* — Consideremos un conjunto de puntos γ situado en el semiplano $y>0$. Indiquemos con F la familia de los conjuntos que se obtienen de γ por medio de una homotecia de razón positiva arbitraria con relación al origen, seguida de una traslación arbitraria paralelamente al eje $0x$. Observemos que F también puede ser definida como la familia de los conjuntos que se obtienen de γ por medio de una homotecia de razón positiva arbitraria con relación a un punto fijo del eje $0x$ seguida de una traslación arbitraria paralelamente a $0x$; o también, como la familia de los conjuntos que se obtienen de γ por medio de una homotecia de razón positiva arbitraria con relación a un punto arbitrario del eje $0x$. Finalmente notemos que, indicando con γ_1 un conjunto de F, la familia que de él se obtiene mediante una de las tres operaciones indicadas es la misma F. Un conjunto cualquiera de F se dirá un transformado de γ. El problema que se presenta en algunas aplicaciones es el siguiente: dados dos puntos A y B del semiplano $y>0$, de abscisas distintas, verificar si existen, y cuántos de ellos, conjuntos de F pasando por A y B. Aquí estudiaremos únicamente el caso en que γ es una curva normal con relación al eje $0x$, de ecuación $y=f(x)$, $x_1<x<x_2$, del semiplano $y>0$, siendo $f(x)$ continua y con derivada $f'(x)$ continua en el intervalo abierto, finito o infinito (x_1, x_2). Supondremos también que la concavidad de γ está siempre dirigida hacia abajo o hacia arriba ($f'(x)$ monótona creciente o decreciente). Demostraremos que, si la concavidad está dirigida hacia abajo, por dos tales puntos A y B pasa 0 o 1 curva transformada de γ, y si la concavidad está dirigida hacia arriba pasan 0, 1 o 2 transformadas. Caracterizaremos geométricamente estos diversos

casos. Estas consideraciones se aplican al estudio de las soluciones de la ecuación $yy''=\varphi(y')$ situadas en el semiplano $y>0$ y pasando por A, B, siendo φ una función definida, continua y siempre positiva o siempre negativa en un cierto intervalo abierto. Ecuaciones de este tipo aparecen como ecuación de Euler de algunos funcionales del Cálculo de Variaciones. Un ejemplo es el funcional $\int_a^b y\sqrt{1+y'^2}\,dx$ cuya ecuación de Euler $yy''=\alpha(1+y'^2)$ tiene como soluciones las curvas de Ribacour, a las cuales se aplican todas nuestras consideraciones (¹).

En lo que sigue supondremos siempre que la curva γ satisface a las condiciones arriba indicadas. Dados dos puntos A y B del semiplano $y>0$, de abscisas diferentes, y tales que la recta AB encuentra al eje $0x$ en C, llamaremos razón del segmento AB al cociente $r(AB)=AC/BC$. Observemos que, por dos puntos A y B en las condiciones dichas, pasan exactamente tantas transformadas de γ como cuerdas ab haya de γ tales que $r(ab)=r(AB)$.

2. — *Caso de la concavidad hacia abajo.* — Supongamos que la curva γ tenga su concavidad siempre dirigida hacia abajo.

Entre las diversas configuraciones que se pueden presentar consideremos aquella en que el intervalo (x_1, x_2) es finito y además:

$$f'(x_1+0)=+\infty,\quad f(x_1+0)=f(x_2-0)=0,\quad f'(x_2-0)=-\infty.$$

Distinguiremos dos casos según que AB sea o no paralela al eje $0x$.

1er. caso. AB es paralela al eje x a distancia H (fig. 1). En este caso existe una y una única tangente T a γ paralela a $0x$ y toda recta paralela a $0x$ comprendida entre T y $0x$ encuentra a γ en dos puntos cuya distancia crece continuamente desde 0 hasta x_2-x_1. Consideremos una cuerda variable ab paralela a

(¹) Ver: 1. E. Goursat, *Cours d'Analyse Mathématique*, t. 3, pág. 555, 4-me. ed. 2. G. Mammana, *Sopre una notevole propietá delle curve di Ribacour*, Rend. Circolo Matematico di Palermo, t. 49, 1925, donde se encuentra un estudio analítico minucioso.

$0x$ cuya ordenada decrece continuamente desde la ordenada de T hasta cero. Sea $A'B'$ la proyección de ab sobre la recta AB hecha desde un punto fijo P de $0x$. Como $A'B'=ab\,.\,H/h$, ve-

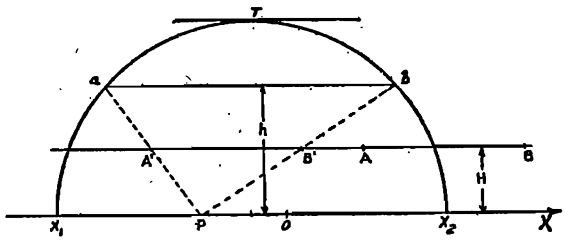

Fig. 1

mos que $A'B'$ crece continuamente desde 0 a $+\infty$. Luego existe una y una única cuerda ab de γ paralela a $0x$ que proyectada desde P sobre AB da un segmento $A'B'=AB$. Una homotecia de centro P que transforme ab en $A'B'$ seguida de una traslación que transforme $A'B'$ en AB nos da una transformada de γ que pasa por A y B. Esta transformada es única, puesto que únicamente existe una homotética directa de γ de centro P que sea encontrada por la recta AB en dos puntos A' y B' tales que $A'B'=AB$.

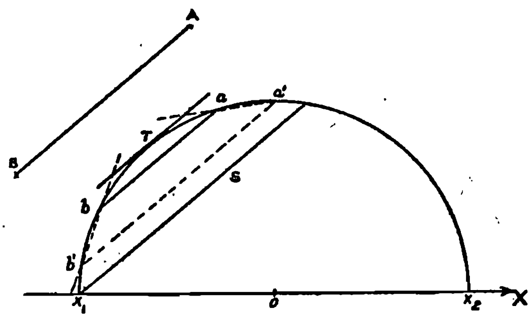

Fig. 2

2º. *caso.* AB no es paralela a $0x$ (fig. 2). En este caso tenemos que determinar las eventuales cuerdas ab de γ paralelas a AB tales que $r(ab)=r(AB)$. Para fijar las ideas, supondremos que el coeficiente angular de AB sea positivo y que la ordenada de A sea mayor que la de B. Consideremos la tangente T a γ paralela a AB y una secante S paralela a AB que pase por el punto de abscisa x_1 del eje $0x$. Cualquier recta paralela a AB comprendida entre T y S encuentra a γ en dos puntos a y b (a indica el de ordenada mayor) de los cuales el segundo está en la rama ascendente de γ_1 y cuando esta recta se desplaza de T a S, $r(ab)$ varía continuamente de 1 a $+\infty$. Por tanto existe por lo menos una cuerda ab de γ paralela a AB tal que $r(ab)=r(AB)>$ >1. Una tal cuerda es única. En efecto, supongamos que exista otra cuerda $a'b'$ (a' indica el extremo de mayor ordenada) de γ paralela a AB y tal que $r(a'b')=r(ab)=r(AB)$. Como ab es paralela a $a'b'$, por una propiedad de las curvas convexas, uno de los arcos, $a'b'$, por ejemplo, contiene al otro ab de manera que las abscisas de los puntos b', b, a, a' se suceden por valores crecientes. Como los puntos b y b' están ambos en el ramo ascendente de γ, la recta bb' encuentra al eje $0x$. Por otro lado, siendo ab paralela a $a'b'$ y las dos razones de estas cuerdas iguales, por una propiedad de geometría elemental las rectas aa' y bb' concurren sobre $0x$. Pero esto es absurdo, pues si a y a' tienen una misma ordenada, la recta aa' no encuentra a $0x$; si a' tiene ordenada mayor que a, este punto está en la rama ascendente de γ y aa' encuentra a $0x$ a la izquierda del punto en que la tangente de γ en b encuentra a $0x$ y por tanto a la izquierda del punto en que bb' encuentra a $0x$; finalmente, si a' tiene ordenada menor que a, la recta aa' encuentra a $0x$ a la derecha de x_2, mientras que bb' encuentra a $0x$ a la izquierda de x_1.

De esta manera vemos que si la curva γ tiene la concavidad dirigida hacia abajo y presenta la configuración arriba indicada, por dos puntos del semiplano $y>0$ de abscisas diferentes pasa siempre una y una única transformada de γ (2).

Puede hacerse un estudio análogo para cada una de las otras configuraciones posibles de la curva γ de concavidad dirigida hacia abajo: en todos estos casos se llega a la conclusión de que existen 0 o 1 transformada de γ pasando por A y B.

3. *Caso de la concavidad hacia arriba.* — Supongamos que la curva γ tenga la concavidad dirigida siempre hacia arriba.

---

(2) Esta conclusión subsiste si por lo menos uno de los puntos A, B, está sobre el eje x, mientras se consideren los puntos extremos $(x_1, f(x_1+0))$ y $(x_2, f(x_2-0))$ como formando parte de la curva.

Entre las diferentes configuraciones que se pueden presentar, consideraremos aquella en que $f(x_1 + 0) = f(x_2 - 0) = +\infty$, $f'(x_1 + 0) = -\infty$, $f'(x_2 - 0) = +\infty$. Vamos también a distinguir dos casos, según que AB sea o no paralela a Ox.

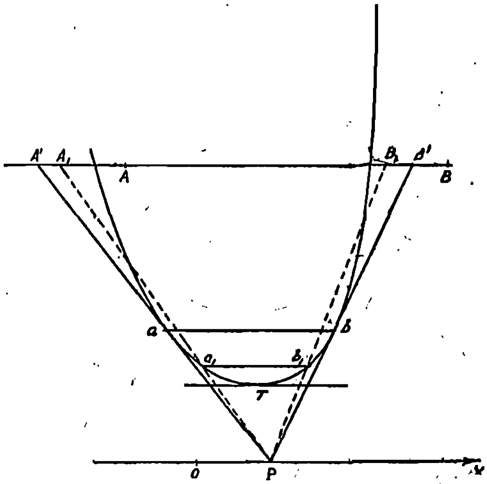

Fig. 3

1er. caso. AB es paralela a Ox (fig. 3). En este caso existe una y una única tangente T a γ paralela a Ox y toda recta paralela a Ox por encima de T encuentra a γ en dos puntos cuya distancia crece continuamente desde cero hasta $x_2 - x_1$. Cuando una cuerda ab de γ, paralela a Ox (con a indicamos el extremo de menor abscisa), se desplaza de manera continua apartándose de T, los puntos de encuentro de las tangentes a γ en a y b con el eje Ox (tangentes que nunca son paralelas a Ox) se desplazan monótonamente de manera continua desde $-\infty$ hasta x_2 y desde $+\infty$ hasta x_1, respectivamente, de manera que hay una y una única posición de ab para la cual estas tangentes se encuentran sobre Ox. Sea P el punto de concurso de estas tangentes con Ox, y A', B' los puntos de encuentro con AB de estas tangentes. Consideremos una cuerda variable a_1b_1 de γ paralela a Ox y sea A_1B_1 su proyección, desde P, sobre la recta OAB. Cuando a_1b_1 se desplaza continuamente desde T hasta ab, las rectas Pa_1 y Pb_1 giran continuamente, la primera en el sentido positivo de las rotaciones y la segunda en el sentido negativo, de modo que A_1B_1 crece continuamente desde 0 hasta $A'B'$; por otra parte, cuando a_1b_1 se desplaza de manera continua por encima de ab, apartándose infinitamente de ab, las rectas Pa_1 y Pb_1 giran continuamente en sentido contrario a los primitivos tendiendo a la posición vertical, de manera que AB decrece continuamente desde $A'B'$ hasta cero. Cuando $AB < A'B'$, existen por tanto dos posiciones de a_1b_1 tales que $A_1B_1 = AB$. Consideremos una de estas dos posiciones de a_1b_1. Sometiendo γ a una homotecia directa de centro P que transporte a_1b_1 sobre A_1B_1 y en seguida a una traslación que transporte A_1B_1 sobre AB, obtenemos una transformada de γ que pasa por A y B. Luego existen dos transformadas de γ que pasan por A y B. Estas dos transformadas son las únicas, puesto que únicamente existen dos homotéticas directas de γ que sean encontradas por la recta AB en dos puntos a distancia igual a AB.

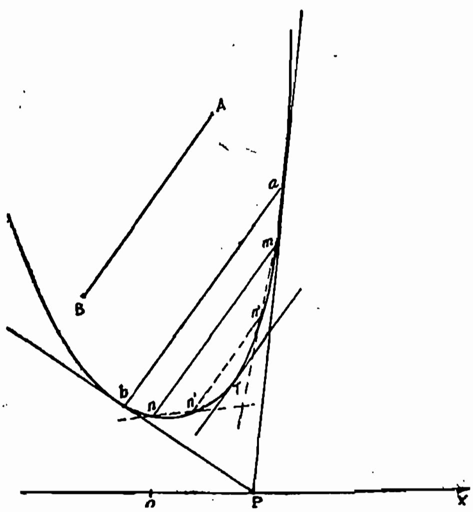

Fig. 4

2o. *caso*. AB no es paralela a Ox (fig. 4). En este caso deberemos determinar las cuerdas ab de γ paralelas a AB y tales que $r(ab) = r(AB)$. Supondremos, para fijar las ideas, que el coeficiente angular de AB es positivo y que la ordenada de A es mayor que la de B. Sea T la tangente a γ paralela a AB. Cualquier recta paralela a AB por encima de T encuentra γ en dos puntos a y b (a indica el de ordenada mayor) de los cuales el primero está en la parte ascendente de γ. Por un raciocinio análogo al anterior vemos que hay una y una única posición de ab para la cual las tangentes a γ en a y b se encuentran sobre Ox.

Sea P este punto de concurso. Pongamos $\lambda = r(ab) > 1$. Demostraremos ahora que dos cuerdas de γ paralelas a AB, ambas por debajo de ab, tienen razones diferentes. En efecto, supongamos que existan dos cuerdas mn y $m'n'$ de γ paralelas a AB, de la misma razón, ambas por debajo de ab (con m y m' indicamos los extremos de ordenada mayor). Como mn es paralela a $m'n'$, uno de los dos arcos, mn por ejemplo, contiene al otro $m'n'$, de manera que las abscisas de n, n', m', m se suceden por valores crecientes. Como los puntos m y m' están en la parte ascendente de la curva, la recta mm' encuentra a Ox. Por otra parte, siendo mn paralela a $m'n'$ y siendo las razones de ambas cuerdas iguales, las rectas mm' y nn' concurren sobre Ox. Esto es absurdo. En efecto, si n y n' tienen la misma ordenada, la recta nn' no encuentra a Ox. Si n' tiene la ordenada mayor que la de n, el punto n' está en la parte ascendente de γ y $n'n$ encuentra a Ox a la izquierda del punto en que la tangente a γ en n' encuentra a Ox, y este punto está a la izquierda del punto en que la tangente a γ en m' encuentra a Ox; finalmente, este punto está a la izquierda del punto donde mm' encuentra a Ox. En fin, si n tiene la ordenada mayor que la de n', la recta nn' encuentra Ox a la derecha de P, mientras que mm' encuentra Ox a la izquierda de P. De modo análogo se verifica que dos cuerdas de γ paralelas a AB, ambas por encima de ab, tienen razones diferentes. Demostremos ahora que dada una cuerda mn de γ paralela a AB, distinta de ab, existe otra cuerda pq de γ, paralela a AB, de la misma razón que mn (con m y p indicamos los extremos de mayor ordenada). En efecto, consideremos una cuerda variable pq, paralela a AB, distinta de mn; cuando pq es suficientemente próxima a la tangente T, el punto de concurrencia de pm con qn está tan próximo como se quiera del punto de tangencia de T, de manera que dicho punto de concurrencia tiene ordenada positiva; por otro lado, cuando pq sea suficientemente apartado de T, el punto de encuentro de pm con qn tiene ordenada negativa. Luego existe una posición de pq para la cual pm y qn concurren en Ox y entonces $r(mn) = r(pq)$. De las consdieraciones anteriores resulta que las cuerdas mn y

pq están de lados opuestos con relación a ab, y que dada una, la otra queda unívocamente determinada. Considerando entonces una cuerda variable de γ paralela a AB, que se desplace continuamente a partir de la posición de tangencia y se aparte indefinidamente de T, la razón de esta cuerda crece con continuidad de 1 a λ mientras la cuerda está por debajo de ab y en seguida decrece continuamente de λ a 1 cuando la cuerda variable está por encima de ab. De aquí resulta que existen 0, 1 o 2 transformadas de γ que pasan por A y B según que $r(AB)$ sea mayor, igual o menor que λ.

Con un estudio análogo se llega a la misma conclusión en el caso de las demás configuraciones posibles de la curva γ con concavidad dirigida hacia arriba; es decir, pueden existir 0, 1 o 2 transformadas de γ pasando por A y B.

4. — *Aplicación a las ecuaciones diferenciales* $yy''=\phi(y')$. — Las consideraciones anteriores se aplican a la determinación de las soluciones de la ecuación diferencial (cuya solución se obtiene por cuadraturas) de 2º orden $yy''=\phi(y')$ que pasan por dos puntos del semiplano $y>0$, donde ϕ es una función definida, continua y siempre positiva o siempre negativa en un intervalo abierto, finito o infinito. En efecto, una curva integral γ de esta ecuación diferencial, situada en el semiplano $y>0$ tiene la concavidad siempre dirigida hacia abajo si $\phi<0$ y siempre dirigida hacia arriba si $\phi>0$. Además, la familia Γ relativa á γ coincide con la familia de las integrales de la ecuación diferencial.

Recíprocamente, dada una curva γ de ecuación $y=f(x)$, $x_1<x<x_2$, del semiplano $y>0$, siendo $f(x)$ continua y con derivadas $f'(x)$, $f''(x)$ continuas y $f''(x)$ siempre positiva o siempre negativa en $x_1<x<x_2$, existe una y una sola ecuación diferencial en las condiciones arriba mencionadas cuya familia de integrales coincide con la familia Γ.

Deseo expresar a mi amigo Leopoldo Nachbin mi gratitud por sus sugestiones.

Escola Nacional de Engenharia.
Universidade do Brasil, Rio de Janeiro.