SISTEMAS MULTI-ISOTERMOS (*)

por

EDWARD KASNER Y JOHN DE CICCO

1.- *Sumario de resultados.* — La teoría de las funciones de una variable compleja es esencialmente idéntica a la geometría conforme del plano real (o complejo). Sin embargo, esto *no* sucede en la teoría de las funciones de *dos o más* variables complejas. Cualquier conjunto de $n \geqq 2$ funciones de n variables complejas que no anulan al jacobiano induce una correspondencia entre los puntos de un espacio euclidiano $2n$-dimensional real (o complejo) R_{2n}. El grupo infinito G de tales correspondencias *no* es el grupo conforme de R_{2n}, el cual es simplemente el grupo de las inversiones de $(n+1)(2n+1)$ parámetros (¹). Poincaré, en su fundamental trabajo publicado en los Rendiconti de Palermo (1907), llamó a G el grupo de transformaciones *regulares*. En 1908, Kasner encontró más apropiado designarlo *el grupo pseudo-conforme* G. Esta es ahora la terminología corriente.

En su trabajo de 1908, que fué publicado completo más tarde, en 1940, Kasner mostró que el grupo pseudo-conforme G de R_l está caracterizado por la conservación del pseudo-ángulo entre cualquier curva y una hipersuperficie, en su punto común de intersección (²). Esto es una generalización directa del resultado

(*) Presentado a la American Mathematical Society, 1945.

(¹) LIOUVILLE probó que el grupo conforme del espacio euclidiano E_m de cualquier dimensión $m>2$, par o impar, es el grupo inverso de $(m+1)(m+2)/2$ parámetros. Fialkow ha estudiado la geometría conforme de una curva o superficie no solamente en un espacio euclidiano E_m sino también en cualquier espacio riemaniano V_m. Ver las memorias, *Conformal geometry of curves*, Transactions of the American Mathematical Society, Vol. 54 (1942), y *Conformal geometry of surfaces*, Transactions of the American Mathematical Society, Vol. 56 (1944).

(²) KASNER, *Conformality in connection with functions of two complex variables*, Transactions of the American Mathematical Society, Vol. 48, págs.

bien conocido que el grupo de funciones de una variable compleja es idéntico con el grupo conforme (directo) del plano. En 1945, De Cicco probó este teorema para el caso del espacio euclidiano $2n$-dimensional R_{2n} (3).

En R_{2n} hay una clase de superficies bi-dimensionales, la cual es transformada en sí misma bajo el grupo pseudo-conforme infinito G, tal que la correspondencia inducida entre cualquier par correspondiente de tal superficie es conforme. Una superficie tal es dicha ser una *superficie analítica o conforme.*

Proyectando ortogonalmente una superficie conforme sobre un conjunto elegido de n planos coordenados, las $(n-1)$ correspondencias inducidas son cada una conformes. De este modo cualquier superficie conforme puede ser definida por $(n-1)$ correspondencias conformes entre el conjunto elegido de n planos coordenados.

Diremos que es *un sistema multi-isotermo de* ∞^{2n-1} *curvas* en R_{2n}, cualquier sistema que es equivalente pseudo-conformemente a un haz de ∞^{2n-1} rectas paralelas en R_{2n}. Cualquier sistema tal consiste de ∞^{2n-2} familias isotermas de ∞^{1} curvas, cada familia contenida en una superficie conforme.

Definimos un *sistema multi-isotermo de* ∞^{1} *hipersuperficies* en R_{2n} como cualquier sistema que es pseudo-conformemente equivalente a un haz de ∞^{1} hiperplanos paralelos en R_{2n}. Cualquier sistema isotermo de hipersuperficies $(2n-1)$ dimensionales puede ser definido estableciendo igual a una constante arbitraria una función multiarmónica. En ese caso, la constante arbitraria es llamada el parámetro isotermo. En general, una familia isoterma de ∞^{1} hipersuperficies puede ser definida escribiendo igual a una constante arbitraria una función de una función multiarmónica.

Enunciaremos y demostraremos los siguientes teoremas, que son fundamentales en la teoría de funciones de n variables complejas (4).

50-62 (1940). También KASNER y DE CICCO, *Pseudo-conformal geometry: Functions of two complex variables,* Bulletin of the American Mathematical Society, Vol. 48, págs. 317-328 (1942).

(3) DE CICCO, *The pseudo-angle in space of 2n dimensiones,* Bulletin of the American Mathematical Society, Vol. 51, págs. 162-168 (1945).

(4) En esta memoria, generalizamos al espacio de $2n$ dimensiones, ciertos teoremas en el espacio cuatri-dimensional sobre funciones de dos variables com-

1. El pseudo-ángulo entre cualquier sistema multi-isotermo de hipersuperficies y cualquier sistema multi-isotermo de curvas es una función multiarmónica. Este puede ser considerado como una extensión de un teorema de Lie referente a sistemas isotermos en el plano.

2. Cualquier sistema multi-isotermo de hipersuperficies es seccionado por una superficie conforme en un sistema isotermo de curvas.

3. Si una superficie es seccionada por cada sistema multi-isotermo de hipersuperficies en un sistema isotermo de curvas, entonces la superficie es conforme.

4. Si un sistema dado de ∞^1 hipersuperficies es seccionado por cada superficie conforme en un sistema isotermo de curvas, entonces el sistema dado de ∞^1 hipersuperficies es multi-isotermo.

2. - *Coordenadas mínimas.* — Sean $(x_1, x_2, \ldots, x_n; y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_\alpha, y_\alpha)$ las coordenadas cartesianas de un espacio euclidiano o complejo $2n$-dimensional R_{2n}. Hallaremos conveniente introducir las coordenadas mínimas $(u_1, u_2, \ldots, u_n; v_1, v_2, \ldots, v_n) = (u_\alpha, v_\alpha)$, definidas por

$$u_\alpha = x_\alpha + i y_\alpha, \qquad v_\alpha = x_\alpha - i y_\alpha, \tag{1}$$

para $\alpha = 1, 2, \ldots, n$. La inversa de esta correspondencia es

$$x_\alpha = \frac{1}{2}(u_\alpha + v_\alpha), \qquad y_\alpha = \frac{1}{2i}(u_\alpha - v_\alpha). \tag{2}$$

Las relaciones siguientes son notadas entre las derivadas parciales en coordenadas mínimas y coordenadas cartesianas

$$\frac{\partial}{\partial u_\alpha} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_\alpha} - i\,\frac{\partial}{\partial y_\alpha}\right), \quad \frac{\partial}{\partial v_\alpha} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_\alpha} + i\,\frac{\partial}{\partial y_\alpha}\right). \tag{3}$$

También es notado que

---

plejas que hemos ya considerado en la memoria, *Bi-isothermal systems*, Bulletin of the American Mathematical Society, Vol. 51, págs. 169-174 (1945). Ver también Kasner, *Biharmonic functions, and certain generalizations*, American Journal of Mathematics, Vol. 58, págs. 377-390 (1936).

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha}=\frac{\partial}{\partial u_\alpha}+\frac{\partial}{\partial v_\alpha},\quad \frac{\partial}{\partial y_\alpha}=i\left(\frac{\partial}{\partial u_\alpha}-\frac{\partial}{\partial v_\alpha}\right). \tag{4}$$

Los operadores $\partial/\partial u_\alpha$ son llamados las *derivadas medias*, y los operadores $\partial/\partial v_\alpha$ son designados las *derivadas de fase*. Ellos son importantes en la teoría de las funciones polígenas (5).

En coordenadas mínimas, el cuadrado del elemento lineal ds es

$$ds^2=\sum_{\alpha=1}^{n} du_\alpha\, dv_\alpha. \tag{5}$$

El ángulo ϑ entre dos elementos curvos cualesquiera $(du_\alpha^{(1)}, dv_\alpha^{(1)})$ y $(du_\alpha^{(2)}, dv_\alpha^{(2)})$ en un punto común es

$$\cos\vartheta=\frac{\sum_{\alpha=1}^{n}[du_\alpha^{(1)}dv_\alpha^{(2)}+du_\alpha^{(2)}dv_\alpha^{(1)}]}{2[(\sum_{\alpha=1}^{n}du_\alpha^{(1)}dv_\alpha^{(1)})(\sum_{\alpha=1}^{n}du_\alpha^{(2)}dv_\alpha^{(2)})]^{1/2}}. \tag{6}$$

3. - *El grupo pseudo-conforme continuo infinito G.* — Este es dado en coordenadas mínimas por

$$U_\alpha=U_\alpha(u_1,u_2,\ldots,u_n),\quad V_\alpha=V_\alpha(v_1,v_2,\ldots,v_n), \tag{7}$$

para $\alpha=1,2,\ldots,n$, donde los jacobianos $|\partial U_\alpha/\partial u_\beta|$ y $|\partial V_\alpha/\partial v_\beta|$ son no nulos en una región dada del espacio $2n$-dimensional R_{2n}. Nuestro problema es iniciar el estudio de la geometría de este grupo en detalle.

En lo siguiente, omitiremos la consideración de los mínimos n-planos (n-flats) especiales $u_\alpha=\text{const.}$ y $v_\alpha=\text{const.}$ Nuestro grupo pseudo-conforme puede ser definido como la parte directa del grupo mixto (mixed) total de transformaciones puntuales de R_{2n} que conservan estas $2\infty^n$ n-planos (n-flats) mínimos especiales.

(5) Kasner, *The second derivative of a polygenic function*, Transactions of the American Mathematical Society, Vol. 30, págs. 803-818 (1928). Kasner y De Cicco, *The derivative circular congruence-representation of a polygenic function*, American Journal of Mathematics, Vol. 61, págs. 995-1003 (1939). Ver también la memoria próxima a aparecer, *The geometry of polygenic functions*, Revista de la Universidad Nacional de Tucumán (1943).

4. - *Pseudo-ángulo de Kasner.* — Una hipersuperficie S_{2n-1} definida por la ecuación $F(u_1, u_2, \ldots, u_n;\ v_1, v_2, \ldots, v_n) = 0$, y una curva C definida por las ecuaciones $u_\alpha = u_\alpha(t), v_\alpha = v_\alpha(t)$ para $\alpha = 1, 2, \ldots, n$, posee el invariante diferencial fundamental de primer orden

$$\vartheta = \frac{1}{2i} \log \left[- \frac{\sum_{\alpha=1}^{n} F_{v_\alpha} dv_\alpha}{\sum_{\alpha=1}^{n} F_{u_\alpha} du_\alpha} \right], \tag{8}$$

respecto al grupo pseudo-conforme continuo infinito G. Este representa el ángulo efectivo ϑ entre la curva dada C y la curva de intersección C' entre la hipersuperficie S_{2n-1} y la superficie conforme única determinada por la curva C.

Este pseudo-ángulo sirve para caracterizar el grupo pseudó-conforme continuo infinito G dentro del grupo de las transformaciones puntuales en el espacio euclidiano $2n$-dimensional R_{2n}. En coordenadas cartesianas este pseudo-ángulo es

$$\vartheta = \operatorname{arc\,tang} \frac{\sum_{\alpha=1}^{n} (F_{x_\alpha} dx_\alpha + F_{y_\alpha} dy_\alpha)}{\sum_{\alpha=1}^{n} (F_{x_\alpha} dy_\alpha - F_{y_\alpha} dx_\alpha)}, \tag{9}$$

donde la ecuación de la hipersuperficie $(2n-1)$-dimensional S_{2n-1} es $F(x_1, x_2, \ldots, x_n;\ y_1, y_2, \ldots, y_n) = 0$, y las ecuaciones paramétricas de la curva C son $x_\alpha = x_\alpha(t)$, $y_\alpha = y_\alpha(t)$, para $\alpha = 1, 2, \ldots, n$.

4. - *Sistemas multi-isotermos de* ∞^{2n-1} *curvas.* — Un sistema de ∞^{2n-1} curvas es multi-isotermo si es equivalente pseudoconformemente a un haz de ∞^{2n-1} rectas paralelas en R_{2n}. Por medio de (7), es visto que cualquier sistema multi-isotermo de ∞^{2n-1} curvas puede estar dado por un sistema de $(2n-1)$ ecuaciones de la forma

$$\begin{gathered} \lambda_\gamma(u_1, u_2, \ldots, u_n) = \text{const.} \qquad \mu_\gamma(v_1, v_2, \ldots, v_n) = \text{const.} \\ \nu(u_1, u_2, \ldots, u_n) + \omega(v_1, v_2, \ldots, v_n) = \text{const.}, \end{gathered} \tag{10}$$

donde $\gamma=1, 2, \ldots, n-1$, y los dos jacobianos $|\partial\lambda_\gamma/\partial u_\alpha|$ y $|\partial\mu_\gamma/\partial v_\alpha|$ son cada uno de característica (rank) $(n-1)$. Por lo tanto, sigue que cualquier sistema tal de ∞^{2n-1} curvas puede ser definido por un sistema de $(2n-1)$ ecuaciones diferenciales ordinarias de la forma

$$\frac{du_1}{A_1(u_1, u_2, \ldots, u_n)} = \ldots = \frac{du_\alpha}{A_\alpha(u_1, u_2, \ldots, u_n)} = \ldots = \frac{du_n}{A_n(u_1, u_2, \ldots, u_n)},$$

$$(11)\quad \frac{dv_1}{B_1(v_1, v_2, \ldots, v_n)} = \ldots = \frac{dv_\alpha}{B_\alpha(v_1, v_2, \ldots, v_n)} = \ldots = \frac{dv_n}{B_n(v_1, v_2, \ldots, v_n)}$$

$$\frac{dv_\alpha}{\delta(v_1, v_2, \ldots, v_n)\, B_\alpha(v_1, v_2, \ldots, v_n)} = \frac{du_\alpha}{\gamma(u_1, u_2, \ldots, u_n)\, A_\alpha(u_1, u_2, \ldots, u_n)}.$$

Recíprocamente las ∞^{2n-1} curvas integrales de cualquier sistema de ecuaciones diferenciales reducibles a la forma (11) es un sistema multi-isotermo.

Puesto que cualquier superficie conforme puede ser definida por ecuaciones de la forma $f_\gamma(u_1, u_2, \ldots, u_n)=0$, $g_\gamma(v_1, v_2, \ldots, v_n)=0$, para $\gamma=1, 2, \ldots, n-1$, donde los dos jacobianos $|\partial f_\gamma/\partial u_\alpha|$ y $|\partial g_\gamma/\partial v_\alpha|$ son de característica $(n-1)$, sigue por (10) que cualquier sistema multi-isotermo de ∞^{2n-1} curvas consiste de ∞^{2n-2} familias de ∞^1 curvas, cada familia yacente sobre una superficie conforme.

11. - *Sistemas multi-isotermos de* ∞^1 *hipersuperficies.* — Cualquier sistema de ∞^1 hipersuperficies, el cual es equivalente pseudo-conformemente a un haz paralelo de ∞^1 hiperplanos de $(2n-1)$ dimensiones es dicho ser multi-isotermo. La ecuación

$$(12)\qquad f(u_1, u_2, \ldots, u_n) + g(v_1, v_2, \ldots, v_n) = \text{const.},$$

define un sistema multi-isotermo de ∞^1 hipersuperficies. En esta forma, la constante es dicha ser un *parámetro multi-isotermo.* El primer miembro de la ecuación anterior representa una función multiarmónica la cual puede ser definida como la parte real (o imaginaria) de una función analítica simple de n variables complejas.

Recíprocamente, sea $F(u_1, u_2, \ldots, u_n, \; v_1, v_2, \ldots, v_n) = \text{const.}$, que representa un sistema multi-isotermo de ∞^1 hipersuperficies. Debe existir una función $\phi(F)$ la cual es función multiarmónica de (u_α, v_α). Por lo tanto las n^2 fracciones

$$(13) \qquad \Lambda = \frac{F_{u_\alpha v_\beta}}{F_{u_\alpha} F_{v_\beta}}$$

que representan $(n^2 - 1)$ ecuaciones diferenciales en derivadas parciales de segundo orden, deben representar la misma cantidad $\Lambda(u_1, u_2, \ldots, u_n; \; v_1, v_2, \ldots, v_n)$, para todos los valores de $\alpha, \beta = 1, 2, 3, \ldots, n$. También esta función simple Λ debe ser una función de F solamente. Por lo tanto Λ satisface las $(2n - 1)$ adicionales ecuaciones diferenciales en derivadas parciales de tercer orden

$$(14) \qquad \frac{\Lambda_{u_1}}{F_{u_1}} = \ldots = \frac{\Lambda_{u_n}}{F_{u_n}} = \frac{\Lambda_{v_1}}{F_{v_1}} = \ldots = \frac{\Lambda_{v_n}}{F_{v_n}}.$$

Teorema 1. — *Las condiciones necesarias y suficientes para que $F(u_1, u_2, \ldots, u_n; \; v_1, v_2, \ldots, v_n) = const.$ defina un sistema multi-isotermo de hipersuperficies es que F verifique el sistema de $(n^2 + 2n - 2)$ ecuaciones diferenciales en derivadas parciales de tercer orden, dado por* (13) *y* (14).

Sustituyendo (11) y (12) en la fórmula (8) que define el pseudo-ángulo ϑ, obtenemos el resultado siguiente.

Teorema 2. - *El pseudo-ángulo entre cualquier sistema multi-isotermo de ∞^1 hipersuperficies y cualquier sistema multi-isotermo de ∞^{2n-1} curvas es una función multiarmónica de (u_α, v_α); esto es, ϑ es de la forma $\vartheta = h(u_1, u_2, \ldots, u_n) + k(v_1, v_2, \ldots, v_n)$.*

En la parte siguiente, darémos ciertos teoremas los cuales pueden ser considerados como extensiones de ciertos teoremas de Kasner que caracterizan funciones multiarmónicas.

7. - *Sistemas multi-isotermos de ∞^1 hipersuperficies y superficies conformes.* — Una superficie conforme S_2 induce $(n - 1)$ correspondencias conformes entre el conjunto elegido de n planos coordenados cuyas coordenadas cartesianas son $(x_\alpha, \; y_\alpha)$

para $\alpha = 1, 2, \ldots, n$. Así, cualquier S_2 tal puede ser definido por las $(2n-2)$ ecuaciones $u_\gamma = u_\gamma(u_1)$, $v_\gamma = v_\gamma(v_1)$, donde $\gamma = 2, 3, \ldots, n$. Por las correspondencias conformes inducidas, es visto que un sistema isotermo en el plano coordenado (x_1, y_1) corresponde a un sistema isotermo en el plano (x_γ, y_γ), para $\gamma = 2, 3, \ldots, n$; y a un sistema isotermo sobre la superficie conforme S_2.

Teorema 3. - *Cualquier sistema multi-isotermo de* ∞^1 *hipersuperficies de* R_{2n} *es seccionado por una superficie conforme en un sistema isotermo.*

Este resultado es obtenido sustituyendo en la ecuación (12), que define un sistema multi-isotermo de hipersuperficies, las ecuaciones de una superficie conforme.

Teorema 4. - *Si una superficie es seccionada por cada sistema multi-isotermo de* ∞^1 *hipersuperficies en un sistema isotermo de curvas, entonces la superficie es una superficie conforme.*

Cualquier superficie S_2 puede ser dada por las ecuaciones $u_\gamma = u_\gamma(u_1, v_1)$, $v_\gamma = u_\gamma(u_1, v_1)$, para $\gamma = 2, 3, \ldots, n$. Sustituyendo ésta en la ecuación (12) que define cualquier sistema multi-isotermo, el sistema resultante de ∞^1 curvas debe ser isotermo. Por lo tanto

$$\frac{\partial^2}{\partial u_1 \; \partial v_1} \log \left[\frac{f_{u_1} + \sum\limits_{\gamma=2}^{n} \left(f_{u_\gamma} \frac{\partial u_\gamma}{\partial u_1} + g_{v_\gamma} \frac{\partial v_\gamma}{\partial u_1} \right)}{g_{v_1} + \sum\limits_{\gamma=2}^{n} \left(g_{v_\gamma} \frac{\partial v_\gamma}{\partial v_1} + f_{u_\gamma} \frac{\partial u_\gamma}{\partial v_1} \right)} \right] = 0. \tag{15}$$

La anterior debe ser una identidad para todos los valores de las derivadas parciales de f y g.

La ecuación precedente contiene derivadas parciales de tercer orden en f y g. Poniendo iguales a cero los coeficientes de $f_{u_1 u_1 u_\gamma}$ y $g_{v_1 v_1 v_\gamma}$, encontramos que $\partial u_\gamma / \partial v_1 = 0$ y $\partial v_\gamma / \partial u_1 = 0$. Esto prueba que la superficie S_2 es conforme. De este modo el Teorema 4 está completamente demostrado.

Teorema 5. - *Si un sistema dado de* ∞^1 *hipersuperficies es seccionado por cada superficie conforme en una familia isoterma de curvas, entonces el sistema de* ∞^1 *hipersuperficies es multi-isotermo.*

Sea $F(u_1, u_2, \ldots, u_n;\ v_1, v_2, \ldots, v_n) = \text{const.}$ el sistema dado de ∞^1 hipersuperficies. Sustituyendo en él las ecuaciones de cualquier superficie conforme $u_\gamma = u_\gamma(u_1)$, $v_\gamma = v_\gamma(v_1)$, donde $\gamma = 2$, $3, \ldots, n$, la familia resultante debe ser isoterma. De este modo tenemos

$$(16) \qquad \frac{\partial^2}{\partial u_1\ \partial v_1} \log \left[\frac{F_{u_1} + \sum\limits_{\gamma=2}^{n} F_{u_\gamma} \dfrac{du_\gamma}{du_1}}{F_{v_1} + \sum\limits_{\gamma=2}^{n} F_{v_\gamma} \dfrac{dv_\gamma}{dv_1}} \right] = 0.$$

La anterior es una ecuación diferencial de segundo orden en las derivadas totales de $u_\gamma = u_\gamma(u_1)$, $v_\gamma = v_\gamma(v_1)$, debiendo ser idénticamente cero. Poniendo iguales a cero los coeficientes de $d^2u_\gamma/du^2{}_1$ y $d^2v_\gamma/dv^2{}_1$, hallamos

$$(17) \qquad \begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial v_1}\left[F_{u_\delta} / (F_{u_1} + \sum_{\gamma=2}^{n} F_{u_\gamma} \frac{du_\gamma}{du_1}) \right] = 0, \\ &\frac{\partial}{\partial u_1}\left[F_{v_\delta} / (F_{v_1} + \sum_{\gamma=2}^{n} F_{v_\gamma} \frac{dv_\gamma}{dv_1}) \right] = 0. \end{aligned}$$

Estas identidades dan las $(n^2 - 1)$ ecuaciones (13).

Sustituyendo las ecuaciones (13) en la condición (16), tenemos

$$(18) \qquad \frac{\partial}{\partial u_1}\left[Fv_1 + \sum_{\gamma=2}^{n} Fv_\gamma \frac{dv_\gamma}{dv_1} \right] \Lambda = \frac{\partial}{\partial v_1}\left[Fu_1 + \sum_{\gamma=2}^{n} Fu_\gamma \frac{du_\gamma}{du_1} \right] \Lambda.$$

Poniendo iguales a cero los varios coeficientes de du_γ/du_1 y dv_γ/dv_1 en la ecuación anterior, obtenemos las condiciones (14).

Así la hipótesis del Teorema 5 nos ha conducido a las condiciones (13) y (14) para un sistema multi-isotermo de ∞^1 hipersuperficies. Esto completa nuestra demostración del Teorema 5.

Columbia University
New York, New York

Illinois Institute of Technology
Chicago, Illinois