MOVIMIENTO DE FOTONES EN UN MEDIO MATERIAL

por

A. Battig

Instituto de Física; Universidad Nacional de Tucumán

Summary. — The well-known transformation properties of energy, momentum, frequency and wave vector of particles and electromagnetic radiation can be systematically derived from the transformation properties of the energy-momentum vector entering the relation

$$p_0^2 - p^2 = m^2c^2.$$

While real values of m correspond to material particles and photons ($m=0$) in vacuum, imaginary values of m correspond to photons in a continously distributed medium of refracting index n. The particle picture of radiation can be maintained even in a material medium and remains compatible with energy and momentum expressions resulting from Maxwell's theory. Applied to the Cherenkov effect (R. T. Cox) the particle picture permits to account for the recoil of Cherenkov's electrons. The quantised expressions for energy and momentum of a photon in a material medium refer, however, not to total energy and momentum of the system, but rather to *free* energy (aud momentum) in the sense of thermodynamics.

Introducción. — El descubrimiento del efecto de *Cherenkov* motivó un estudio más profundo de los fenómenos electromagnéticos en medios materiales. Recién, *R. T. Cox* (2) mostró que el concepto de fotón se presta para ser empleado con éxito, incluso el caso del mencionado efecto. Por otra parte, *J. Würschmidt* (1) acaba de estudiar en un interesante artículo, las fórmulas del efecto *Doppler*, de la aberración de la luz y de la presión luminosa, desde el punto de vista de la imagen de los fotones.

El propósito del presente trabajo es vincular las fórmulas obtenidas, con las correspondientes del campo electromagnético y las de las partículas materiales estudiando en detalle el significado físico de las magnitudes introducidas.

§ 1. *Definiciones generales.* — Sabemos por el dualismo ondulatorio corpuscular que a una partícula material de masa m, que se mueve con velocidad constante v, debemos asignarle una onda que se propaga en la dirección de movimiento y cuyas características físicas son las siguientes:

(por la teoría de la Relatividad) $$W=\frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \vec{p}=\frac{m.\vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \beta=\frac{v}{c}$$

donde W es la energía de la partícula y $\vec{p}$ es el impulso. Por el concepto dualista tenemos:

(por la teoría ondulatoria) $$W=h.\nu, \quad \vec{p}=\frac{h.\nu}{V}.\vec{j}$$

siendo ν la frecuencia de la onda asociada, $\vec{j}$ el vector unitario de dirección y V la velocidad de fase.

Una onda plana monocromática se expresa por la ecuación siguiente:

$$\vec{E}=\vec{E}_0\, e^{i(k_0 ct-\vec{k}\vec{r})}$$

donde $\vec{E}_0$ es un vector constante que mide la amplitud de la onda. El frente de onda está determinado por el exponente, en el cual $k_0, \vec{k}$ constituye el cuadrivector de onda. Por el dualismo ondulatorio-corpuscular definimos las siguientes magnitudes:

(I) cuadrivector de onda $\left\{\begin{array}{l} k_0 \\ \vec{k} \end{array}\right.$ cuadrivector de energía impulso de una partícula $\left\{\begin{array}{l} p_0=\dfrac{h}{2\pi}k_0 \\ \vec{p}=\dfrac{h}{2\pi}\vec{k} \end{array}\right.$

Observamos que las magnitudes $k_0, \vec{k}$ están relacionadas con las magnitudes $p_0, \vec{p}$ por medio de la constante $\frac{h}{2\pi}$, de modo que toda relación establecida entre las primeras nos determina la relación entre las últimas. De las magnitudes definidas en (I) podemos escribir:

$$\frac{v}{c}=\frac{p}{p_0}\,, \quad \frac{V}{c}=\frac{k_0}{k}\,;$$

luego, de estas dos expresiones, obtenemos inmediatamente:

$$\text{(A)} \qquad V \, . \, v = c^2 .$$

Por las relaciones generales que existen entre las cantidades dadas por la teoría corpuscular (I) podemos escribir:

$$\text{(1)} \qquad p_0^2 - p^2 = m^2 c^2 ,$$

esta ecuación determina la masa m que es invariante respecto a una transformación de *Lorentz.*

De la ecuación (1) podemos considerar dos casos:

a) *Partículas de masa* $m > 0$. - Este caso corresponde a partículas como ser electrones, protones, etc. Sabemos que la velocidad de fase V es mayor que la velocidad de la luz y que la velocidad de grupo v es menor. Si se considera el movimiento de electrones, las ondas electrónicas asociadas tienen velocidad de fase $V > c$. Para el caso de electrones en reposo corresponde $V = \infty$.

b) *Partículas de masa* $m = 0$. - Este caso corresponde a «fotones». La velocidad de propagación de fotones en el vacío es c y por lo tanto la velocidad de fase será $V = c$. Hacemos notar que en este caso las ondas asociadas son las ondas electromagnéticas en el vacío.

Los casos a) y b) han sido estudiados en detalle y constituyen aplicaciones particulares de la ecuación general (1). De esta misma ecuación deduciremos otro caso, que es el que nos interesa, correspondiente a *fotones en un medio material,* en la aproximación para la cual el medio puede ser esquematizado por un continuo y caracterizado por un índice de refracción $n > 1$.

§ 2. *Fotones en un medio material de índice de refracción n. Angulo de aberración. Efecto Doppler.* — Consideremos nuevamente la ecuación general (1). Por medio del cuadrivector k_0, k definimos el índice de refracción n en un medio material en reposo, por la siguiente relación:

$$n = \frac{k}{k_0},$$

o sea que

$$n^2 k_0^2 - k^2 = 0$$

luego

$$(1\,a) \qquad k_0^2 - k^2 = (1 - n^2)\, k_0^2; \quad p_0^2 - p^2 = (1 - n^2)\, p_0^2$$

pero por ser $(1 - n^2)$ una magnitud negativa, podemos escribir la relación anterior como sigue:

$$k_0^2 - k^2 = - \varkappa^2, \ (*)$$

siendo $-\varkappa^2 = \left(\frac{2\pi mc}{h}\right)^2$. La ecuación (1) es invariante, y se cumple en este caso para la masa imaginaria $m = i\,.\,\mu$. Observamos, pues, que a fotones en un medio material de índice $n > 1$, debemos asignarle una masa imaginaria. De este modo tenemos los casos posibles comprendidos en la ecuación (1) y los agrupamos de la manera siguiente:

$$k_0^2 - k^2 = \begin{cases} 0 \\ \varkappa^2 \\ -\varkappa^2 \end{cases} \quad p_0^2 - p^2 = \begin{cases} 0 & p_0 = p \quad m = 0 \\ m^2 c^2 & p_0 > p \quad m > 0 \\ -\mu^2 . c^2 & p_0 < p \quad m = i\,.\,\mu. \end{cases}$$

Los dos primeros casos corresponden a los mencionados en el § 1. El último corresponde al encabezamiento de este parágrafo.

Hemos dicho que a una partícula de energía W debemos asignarle una onda asociada de frecuencia ν. La velocidad de la luz en el medio material es $\frac{c}{n}$, luego, por la ecuación (A) debemos asignarle a la partícula asociada al fotón la velocidad

(*) Esta invariante es equivalente a la última relación del trabajo citado del Dr. Würschmidt (esta revista, p. 68) y aclara su significado físico.

$v = \frac{c^2}{V}$, siendo $V = \frac{c}{n}$; la energía y el impulso del fotón serán:

$$W = h \cdot \nu, \qquad \vec{p} = \frac{h\nu}{V} = n \cdot \frac{h\nu}{c} \neq n \cdot \vec{p}_0 \ (**)$$

siendo $\vec{p}_0 = \frac{h.\nu}{c}$. Si consideramos un medio material *no-dispersivo,* la velocidad de grupo será $V < c$.

Observamos, entonces, que un fotón al pasar del vacío al medio material de índice n varía su impulso de p_0 a $n \cdot p_0$.

Pasaremos, ahora, a considerar expresiones que nos darán el ángulo de aberración y el efecto Doppler. Para ello consideremos dos sistemas de referencia, S y S'. Sea el primero fijo al medio material y el segundo se mueve respecto al primero con una velocidad constante u, de modo tal, que los ejes $z - z'$ permanecen superpuestos y los otros dos paralelos entre sí. Un observador de S' observará un ángulo de aberración y, además, un efecto Doppler. Llamaremos V', v', ϑ', φ' las magnitudes definidas en el sistema S' y cuyo significado es el siguiente:

(2) $V' = c \frac{k_0'}{k'}$ velocidad de fase de la onda

(3) $v' = c \frac{p'}{p_0'} = c \frac{k'}{k_0'}$ velocidad de la partícula

(4) $\cos \vartheta' = \frac{k_z'}{k'} = \frac{p_z'}{p'}$ ángulo de aberración

---

(**) Según esta relación resulta siempre, aunque pequeño sea el valor de V, la expresión de MAXWELL,

$$P = 2.D \quad (D = \text{densidad de energía})$$

para la presión P de luz reflejada perpendicularmente por un espejo perfecto al reposo en el medio, de acuerdo con la electrodinámica. Efectivamente, incluso en el caso $V/c \ll 1$, los corpúsculos asociados obedecen fórmulas relativistas,

$$p_0 = \frac{i \mu c}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad \vec{p} = \frac{i \mu \vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}; \quad v/c = c/V > 1$$

cualquiera sea el valor de V. El Dr. Würschmidt, l. c. pág. 64 fórmula (1,8), llega formalmente a una relación distinta, la de NEWTON, porque define, en este caso particular, otra densidad de energía, considerando la energía cinética $p^2/2m$ para partículas de masa real m.

(5) $\operatorname{tg} \varphi' = \frac{k_\gamma'}{k_x'} = \frac{p_\gamma'}{p_x'}$ ángulo de dirección de movimiento.

La transformación de *Lorentz* para el cuadrivector de energía-impulso nos da:

$$p_x = p_x', \quad p_\gamma = p_\gamma', \quad p_z' = \frac{p_z - \beta p_0}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad p_0' = \frac{p_0 - \beta p_z}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Reemplazando en la fórmula (2) los valores anteriores obtenidos de la transformación de *Lorentz,* encontramos después de algunas simplificaciones el siguiente resultado:

$$(6) \qquad V' = c \frac{1 - n\beta \cos \vartheta}{\sqrt{n^2(1-\beta^2 \operatorname{sen}^2 \vartheta) - 2n\beta \cos \vartheta + \beta^2}}$$

Por las fórmulas (4) y (5) tenemos:

$$(7) \qquad \cos \vartheta' = \frac{n \cos \vartheta - \beta}{\sqrt{n^2(1-\beta^2 \operatorname{sen}^2 \vartheta) - 2n\beta \cos \vartheta + \beta^2}}, \qquad \varphi' = \varphi.$$

Para el efecto *Doppler* obtenemos inmediatamente:

$$(8) \qquad \nu' = \nu \frac{1 - n\beta \cos \vartheta}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

El impulso p' es:

$$p' = \sqrt{p_0'^2 + \mu^2 c^2}$$

Teniendo presente que $\mu c = \sqrt{\left(n \frac{h\nu}{c}\right)^2 - \left(\frac{h\nu}{c}\right)^2}$ y el valor de p_0' determinado anteriormente, obtenemos:

$$(9) \qquad p' = \frac{p_0}{\sqrt{1-\beta^2}} \sqrt{n^2(1-\beta^2 \operatorname{sen}^2 \vartheta) - 2n\beta \cos \vartheta + \beta^2}$$

Las fórmulas (6) — (9) presentan particular interés para $1 - n\beta \cos \vartheta = 0$

$$(6') \qquad V' = 0$$

$$(7') \qquad \cos\vartheta' = \frac{1}{\beta}\sqrt{\frac{1-\beta^2}{n^2-1}}$$

$$(8') \qquad \nu' = 0$$

$$(9') \qquad p' = p_0\sqrt{n^2-1}.$$

Concluímos que en S' la onda electromagnética tiene una velocidad nula, a pesar que el observador se desplaza con respecto al sistema S en una dirección que forma un ángulo ϑ con la normal de la onda. Además, en el sistema S' se anula la frecuencia ν' y, en consecuencia, la energía $h \cdot \nu'$. No se anula, sin embargo, el impulso p'. El cono,

$$\cos\vartheta = \frac{1}{n\beta}$$

sobre el cual se anula la velocidad V', determina la dirección de la radiación de *Cherenkov* emitida por un electrón en reposo en este sistema, como se verá, más en detalle, en el parágrafo 4.

Las fórmulas (6), (7) y (8) corresponden a las fórmulas (2, 2) y (2, 5) dadas por el Prof. J. Würschmidt, l. c. pág. 55.

§ 3. *Cálculo de la densidad de energía e impulso de la radiación.* — Un campo electromagnético caracterizado por las intensidades $\vec{E}$, $\vec{H}$, por la densidad de carga ρ y por la densidad de corriente $\vec{i}$, está completamente determinado por las ecuaciones de *Maxwell-Lorentz* en un sistema $S(x, y, z, t)$ respecto al cual el medio está en reposo:

$$(10) \qquad \operatorname{rot}\vec{H} - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{D}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\vec{i}$$

$$(11) \qquad \operatorname{rot}\vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = 0$$

$$(12) \qquad \operatorname{div}\vec{B} = 0$$

$$(13) \qquad \operatorname{div} \vec{D} = 4\pi\rho$$

$$(14) \qquad \vec{B} = \mu \vec{H}$$

$$(15) \qquad \vec{D} = \varepsilon \vec{E}$$

$$(16) \qquad \vec{i} = \rho \vec{v}.$$

Multiplicando escalarmente (10) por $\vec{E}$ y (11) por $\vec{H}$ y simplificando tenemos:

$$(17) \qquad \frac{1}{4\pi}\left(\vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right) + \operatorname{div} \frac{4\pi}{c} [\vec{E}, \vec{H}] + \rho \cdot \vec{v} \cdot \vec{E} = 0.$$

El primer sumando de la ecuación (17) representa el cambio de la energía electromagnética. Si consideramos variaciones de $\vec{B}$ y $\vec{D}$ infinitesimales, podemos escribir el incremento de la energía electromagnética por unidad de volumen:

$$\frac{1}{4\pi}(\vec{H} \cdot d\vec{B} + \vec{E} \cdot d\vec{D}),$$

o, en forma integral:

$$(18) \qquad \frac{1}{4\pi} \int_0^B \vec{H} \cdot d\vec{B} + \int_0^D \vec{E} \cdot d\vec{D}.$$

Por las relaciones (14), (15) tenemos:

$$(19) \quad \int_\tau d\tau \left(\frac{\mu}{4\pi} \int_0^H \vec{H} \cdot d\vec{H} + \frac{\varepsilon}{4\pi} \int_0^E \vec{E} \cdot d\vec{E}\right) = \frac{1}{8\pi} \int_\tau (\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{H} \cdot \vec{B})\, d\tau.$$

Determinaremos, ahora, en forma breve, el impulso electromagnético. La fuerza que actúa sobre todas las cargas contenidas en el volumen τ se expresa por la ecuación de *Lorentz*:

$$(20) \qquad \vec{F} = \int_\tau \rho\left(\vec{E} + \frac{1}{c}[\vec{v}, \vec{B}]\right) d\tau.$$

Reemplazando los valores de ρ y $\frac{v}{c}$ dados por (13) y (10) se obtiene

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi}\int_\tau \left\{\vec{E}\,.\,\operatorname{div}\vec{D} + [\operatorname{rot}\vec{H}, \vec{B}] - \frac{1}{c}\left[\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \vec{B}\right]\right\} \vec{d\tau},$$

de las ecuaciones (11) — (12) tenemos:

$$0 = \int_\tau \left\{\vec{H}\,.\,\operatorname{div}\vec{B} + [\operatorname{rot}\vec{E}, \vec{D}] + \frac{1}{c}\left[\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \vec{D}\right]\right\} d\tau,$$

y sumando estas dos últimas ecuaciones:

$$(21) \qquad 4\pi\vec{F} = \int_\tau \left\{\vec{E}\,.\,\operatorname{div}\vec{D} + [\operatorname{rot}\vec{H}, \vec{D}] + [\operatorname{rot}\vec{E}, \vec{D}] - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}[\vec{D}, \vec{B}]\right\} d\tau.$$

La integral sobre los términos que contienen derivadas espaciales corresponde a las tensiones de *Maxwell*, $\int \operatorname{div}\overrightarrow{T}\,.\,d\tau$, y se anula en el caso de un sistema finito. El valor de $\frac{1}{4\pi c}\int_\tau [\vec{D}, \vec{B}]\, d\tau$ se interpreta como impulso electromagnético contenido en el volumen τ. La densidad de impulso será entonces

$$(22) \qquad \vec{g} = \frac{1}{4\pi c}[\vec{D}, \vec{B}].$$

Demostraremos, ahora, la equivalencia entre la imagen corpuscular adoptada y la imagen ondulatoria clásica. Consideremos la propagación de una onda electromagnética plana que forma con el eje z un ángulo ϑ. Admitamos que el dieléctrico en el cual se propaga la perturbación electromagnética es homogéneo y que no contiene cargas libres. En estas condiciones, se obtiene de las ecuaciones (10) — (15) con un vector $\vec{A}$ convenientemente introducido:

$$\text{(II)} \qquad \vec{E} = \frac{\vec{A}}{\sqrt{\varepsilon}} \qquad \vec{D} = \sqrt{\varepsilon}\,\vec{A}$$

$$\vec{H} = + \frac{[\vec{j}, \vec{A}]}{\sqrt{\mu}} \qquad \vec{B} = + \sqrt{\mu}\,[\vec{j}, \vec{A}],$$

donde $\vec{j}$ es el versor de dirección. Si, en particular, el plano de polarización de la onda es $(x - z)$, se tiene:

$$\text{(III)} \qquad \begin{array}{lll} j_x = \operatorname{sen} \vartheta & j_\gamma = 0 & j_z = \cos \vartheta \\ A_x = A \,.\, \cos \vartheta & A_\gamma = 0 & A_z = - A \,.\, \operatorname{sen} \vartheta \end{array}$$

siendo $A^2 = \varepsilon\,(E_x{}^2 + E_\gamma{}^2 + E_z{}^2) = \mu\,(H_x{}^2 + H_\gamma{}^2 + H_z{}^2)$.

Las ecuaciones (II) se refieren al sistema S, fijo en el medio material. Para el sistema S' que se mueve respecto a S con velocidad constante u, los vectores eléctrico y magnético se transforman según:

$$\text{(IV)} \qquad \begin{array}{ll} E'_x = \dfrac{E_x - \beta B_\gamma}{\sqrt{1-\beta^2}} & D'_x = \dfrac{D_x - \beta H_\gamma}{\sqrt{1-\beta^2}} \\[2ex] E'_\gamma = \dfrac{E_\gamma + \beta B_x}{\sqrt{1-\beta^2}} & D'_\gamma = \dfrac{D_\gamma + \beta H_x}{\sqrt{1-\beta^2}} \\[2ex] E'_z = E_z & D'_z = D_z \\[3ex] B'_x = \dfrac{B_x + \beta E_\gamma}{\sqrt{1-\beta^2}} & H'_x = \dfrac{H_x + \beta D_\gamma}{\sqrt{1-\beta^2}} \\[2ex] B'_\gamma = \dfrac{B_\gamma - \beta E_x}{\sqrt{1-\beta^2}} & H'_\gamma = \dfrac{H_\gamma - \beta D_x}{\sqrt{1-\beta^2}} \\[2ex] B'_z = B_z & H'_z = H_z. \end{array}$$

Reemplazando en (IV) las respectivas componentes dadas por las relaciones (II)—(III), obtenemos las componentes de la densidad de impulso electromagnético transformada

$$g'_x = \frac{1}{4\pi c}[\vec{D'}, \vec{B'}]_x = \frac{A^2}{4\pi c\sqrt{1-\beta^2}}(n - \beta\cos\vartheta)\,.\,\mathrm{sen}\,\vartheta$$

$$g'_Y = \frac{1}{4\pi c}[\vec{D'}, \vec{B'}]_Y = 0$$

$$g'_z = \frac{1}{4\pi c}[\vec{D'}, \vec{B'}]_z = \frac{A^2}{4\pi cn(1-\beta^2)}(n - \beta\cos\vartheta)\,.\,(n\,.\cos\vartheta - \beta)$$

$$g' = \frac{A^2\left(1-\frac{\beta}{n}\cos\vartheta\right)}{4\pi c(1-\beta^2)}\sqrt{n^2\,.\,(1-\beta^2\,\mathrm{sen}^2\,\vartheta) - 2n\beta\cos\vartheta + \beta^2}$$

y para la densidad de energía:

$$w' = \frac{A^2}{4\pi n(1-\beta^2)}(1 - n\beta\cos\vartheta)(n - \beta\cos\vartheta)$$

Si consideramos un volumen τ de radiación y observando que:

$$\tau' = \tau\,\frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1-\frac{\beta}{n}\cos\vartheta},$$

obtenemos para el impulso y la energía:

$$G' = \int_\tau g'\,d\tau' = \frac{G}{n}\,\frac{\sqrt{n^2(1-\beta^2\,\mathrm{sen}^2\,\vartheta) - 2n\beta\cos\vartheta + \beta^2}}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{G}{n}\,\frac{R}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$W' = \int_{\tau'} w'\,.\,d\tau' = W\,\frac{1-n\beta\cos\vartheta}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

con

$$R = \sqrt{n^2(1-\beta^2\,\mathrm{sen}^2\,\vartheta) - 2n\beta\cos\vartheta + \beta^2}$$

y mediante las ecuaciones (II)—(III):

$$G = \frac{n \,.\, A^2 \,.\, \tau}{4\pi c}$$

$$W = \frac{A^2 \,.\, \tau}{4\pi}.$$

Calculando las mismas magnitudes por medio de la imagen corpuscular, adoptada anteriormente, tenemos para el sistema S':

(según (9))

$$p' = \frac{p}{n} \frac{\sqrt{n^2(1-\beta^2 \operatorname{sen}^2 \vartheta) - 2n\beta \cos \vartheta + \beta^2}}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{G}{n} \cdot \frac{R}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

(según (8)) $$c \,.\, p_0' = h\nu \frac{1 - n\beta \cos \vartheta}{\sqrt{1-\beta^2}} = W \frac{1 - n\beta \cos \vartheta}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

y para el sistema S:

$$p = n \frac{h\nu}{c} = G$$

$$c \,.\, p_0 = h \,.\, \nu = W.$$

Comparando, entonces, los resultados obtenidos para el impulso electromagnético y la energía por medio de la imagen ondulatoria clásica y la corpuscular, observamos que existe identidad entre G' con p', y entre W' con $c \,.\, p'_0$. Esto nos demuestra la compatibilidad entre las dos imágenes adoptadas.

§ 4. *Cálculo del retroceso del electrón* (2). — Admitiendo que que el electrón (bajo ciertas condiciones) emite espontáneamente un fotón, podemos calcular el retroceso que sufre a causa de la emisión, partiendo de las ecuaciones de conservación de energía y de impulso del electrón y del fotón. En el sistema de referencia S', en el cual el electrón está inicialmente en reposo, la conservación de energía e impulso se expresa respectivamente por las ecuaciones

$$m \cdot c = P'_0 + p'_0$$
$$P'^2 = p'^2$$

donde $cP_0' = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}}$ y $cp_0' = h\nu'$ representan respectivamente la energía del electrón y del fotón, después de la emisión, en el sistema S'. P' y p' representan los impulsos después de la emisión. Se observa inmediatamente que las dos ecuaciones no pueden tener solución si no podemos atribuir un valor negativo a p'_0. Tal signo de la energía puede ocurrir solamente en un medio material en las condiciones determinadas por la relación (8).

Tomando el cuadrado de la primera ecuación y restando la segunda obtenemos fácilmente

$$m^2 c^2 - 2 \cdot m \cdot c \cdot p_0' + p_0'^2 - p'^2 = P_0'^2 - P'^2 = m^2 c^2$$

y dado que según (1 a),

$$p'_0{}^2 - p'^2 = (1 - n^2) \cdot p_0^2$$

(cp_0 = energía del fotón en el sistema de reposo S del medio), concluímos

$$(1 - n^2) \cdot p_0^2 = 2 \cdot m \cdot c \cdot p_0'.$$

Recordando que, según (8),

$$p'_0 = p_0 \frac{1 - n\beta \cos \vartheta}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

obtenemos la fórmula de *Cox* para el efecto de *Cherenkov*:

$$\cos \vartheta = \frac{1}{n\beta} + \left(n - \frac{1}{n}\right) \cdot \frac{p_0 \sqrt{1-\beta^2}}{2m.\beta.c} \quad .$$

La emisión espontánea del fotón se efectúa, pues, en una dirección muy próxima a la del cono de *Cherenkov*. El segundo término, que representa la corrección de *Cox*, debido al retroceso del electrón, es prácticamente despreciable frente al primero, puesto que $p_0/m \, . \, c = h\nu/mc^2 \ll 1$ para fotones de luz visible.

§ 5. *Algunas observaciones sobre la energía.* — La interpretación de las expresiones

$$\frac{1}{8\pi}\int_{\tau} (\vec{E} \, . \, \vec{D} + \vec{H} \, . \, \vec{B}) \, . \, d\tau \tag{23}$$

$$\frac{1}{4\pi c}\int [\vec{D}, \vec{B}] \, d\tau \tag{24}$$

como energía e impulso del sistema, se justifica por las relaciones (17) y (21), según las cuales la derivada de las cantidades mencionadas equivalen a la potencia y a la fuerza ejercidas por el sistema. Como observó *R. Becker* ([3]), no es unívoca si no fijamos simultáneamente las características termodinámicas del medio material. *Becker* muestra, en el caso restringido de la electro y magnetostática, que las relaciones (17) y (21) pueden ser aplicadas unívocamente sólo a procesos isotérmicos, es decir, que la expresión (23) representa la energía *libre* del sistema,

$$\frac{1}{8\pi}\int (\vec{E} \, . \, \vec{D} + \vec{H} \, . \, \vec{B}) \, . \, d\tau = U - TS = F$$

(U = energía interna, T = temperatura absoluta, S = entropía).

Los procesos que hemos discutido más arriba, permiten añadir que un fotón que entra en un medio material, cambia en general su energía y su impulso (*) e intercambia, pues, energía e impulso con el medio. Luego las expresiones (23) y (24) no representan la energía y el impulso total del sistema y tienen, más bien, que ser interpretadas como generalizaciones relativistas de la *energía libre.*

Notamos, en particular, que el tensor de energía e impulso «libre» deja de ser simétrico y que el flujo de energía libre no es igual al «impulso libre».

(*) En el caso particular de un medio material en reposo, la energía y la frecuencia del fotón no sufren cambio, sin embargo el impulso aumenta en un factor n.

Concluímos, entonces, que la energía $h\nu$ y el impulso $n.\frac{h\nu}{c}$, que tenemos que atribuir a un fotón en un medio material, no representan la energía y el impulso total, sino energía e impulso «libre» del sistema. Este resultado aclara el hecho, a primera vista sorprendente, que tenemos que atribuir, en ciertos casos, a un campo electromagnético en un medio material valores negativos de la energía (libre).

CONCLUSIONES

1. - El movimiento de una partícula material, de un fotón en el vacío y de un fotón en un medio material, pueden ser considerados desde un punto de vista uniforme, correspondiendo respectivamente a una masa positiva, cero e imaginaria.

2. - Las fórmulas de transformación de *Lorentz* aplicadas a los cuadrivectores de onda y de energía-impulso, nos conducen inmediatamente a las fórmulas del efecto *Doppler*, de la aberración y del impulso de la radiación. Estas fórmulas han sido obtenidas recientemente por el Prof. J. Würschmidt.

3. - Aplicados a ondas emitidas por una carga en movimiento rápido $u > V$, los fotones definidos anteriormente permiten dar una interpretación corpuscular del efecto de *Cherenkov* y tener en cuenta, además, el retroceso del electrón emisor (Cox).

4. - Las cantidades de energía e impulso atribuídas a los fotones en un medio material, se refieren a la energía e impulso «libre» y no a la energía e impulso total.

Agradecimientos. — Deseo expresar mis agradecimientos al Director del Instituto de Física Prof. Dr. J. Würschmidt y al Prof. Dr. G. Beck por las numerosas indicaciones sugeridas durante la realización de este trabajo.

REFERENCIAS

(1) J. WÜRSCHMIDT. *Aberración, efecto Doppler y presión de luz.* Revista de la Unión Matemática Argentina. Vol. XI, págs. 47-68 (1945).

(2) R. T. COX. Phys. Rev., *66*, 106 (1944).

(3) R. BECKER. *Theorie der Electrizität.* Leipzig, B. G. Teubner, Berlin. 1933. Band I.