SOBRE UN PROBLEMA DE JUAN BERNOULLI

(Primera Parte)

por J. V. USPENSKY

1. — Juan Bernoulli referido en el título no era aquel matemático famoso que tanto contribuyó al desarrollo del cálculo infinitesimal, sino su nieto Juan Bernoulli III (1744 - 1807), socio de la Real Academia de Berlín en cátedra de Astronomía. En el año 1772 él publicó un libro, *Recueil pour les Astronomes,* donde se trata principalmente de cuestiones astronómicas. Lo que nos interesa particularmente es el capítulo *Sur une nouvelle espèce de calcul,* donde encontramos un problema matemático muy curioso y útil.

Sea x un número real y positivo. Muy a menudo se necesita construir una tabla de los enteros próximos a múltiplos de x:

$$x,\ 2x,\ 3x,\ 4x,\ \ldots$$

Llamando a a la parte entera de x se ve fácilmente que al pasar de un múltiplo al múltiplo siguiente el aumento del entero próximo es a o $a+1$. Si tuviéramos reglas expeditas para juzgar cuándo el tal aumento es a o $a+1$, podríamos construir rápidamente la tabla requerida empleando sólo adiciones. Con tal objeto Juan Bernoulli propone, sólo para x racional, reglas muy cómodas, pero sin demostración. La demostración de estas reglas con algunas consideraciones generales y muy importantes sobre el problema de Bernoulli se halla en un artículo interesante de A. Markoff: *Sur une question de Jean Bernoulli* (*), el único trabajo sobre dicho problema que conocemos. Como la solución del problema de Bernoulli proporciona una aplicación hermosa de las fracciones continuas no juzgamos sin interés presentar en este artículo la solución detallada principalmente interesante en caso de x irracional o racional, pero expresado como razon de grandes números.

(*) Mathematische Annalen 19 (1882), p. 26-36.

2. — Según costumbre designaremos con $[\xi]$ la parte entera de un número real ξ, es decir el único entero tal que

$$[\xi] \leqq \xi < [\xi] + 1.$$

El entero próximo a ξ, para lo cual emplearemos el signo $\{\xi\}$, está únicamente determinado por dos desigualdades

$$\{\xi\} - \frac{1}{2} \leqq \xi < \{\xi\} + \frac{1}{2}$$

de donde sigue que siempre

$$\{\xi\} = \left[\xi + \frac{1}{2}\right].$$

Consideremos ahora la función lineal

$$mx + b$$

de un entero variable m, donde x y b son números reales dados. Tenemos

$$mx + b = [mx + b] + \vartheta$$

donde

$$0 \leqq \vartheta < 1.$$

Llamando a a la parte entera de x tenemos también

$$x = a + \omega, \quad 0 \leqq \omega < 1.$$

Puesto que

$$(m + 1)\, x + b = [mx + b] + a + \vartheta + \omega$$

y la parte entera de $\vartheta + \omega$, por ser

$$0 \leqq \vartheta + \omega < 2,$$

no tiene otro valor sino 0 o 1, concluimos que la cantidad

$$K_m = [(m+1)\,x + b] - [mx + b]$$

tiene uno de dos valores: a o $a+1$. A la serie

$$K_0,\ K_1,\ K_2,\ \ldots$$

compuesta sólo de números a o $a+1$ llamaremos en lo sucesivo serie de Bernoulli (x, b).

Ganaremos en simplicidad de escritura sin perder nada en generalidad suponiendo de ahora en adelante que

$$0 < x < 1.$$

Entonces la serie de Bernoulli (x, b)

$$K_0,\ K_1,\ K_2,\ \ldots$$

aparece como una sucesión determinada de ceros y unidades. Puede ser que cero se repite sucesivamente, por ejemplo, 7 veces. En vez de escribirlo 7 veces, escribiremos 0^7 y lo mismo haremos con unidades que ocurren en sucesión. También puede ser que un grupo de ceros y unidades se repite sucesivamente, por ejemplo el grupo $0^3\,1\,0^2\,1$ se repite tres veces. En tal caso en vez de escribir

$$0^3\,1\,0^2\,1\,0^3\,1\,0^2\,1\,0^3\,1\,0^2\,1$$

escribiremos

$$(0^3\,1\,0^2\,1)^3.$$

Con tal convenio presentaremos la estructura de una serie de Bernoulli con mayor simplicidad. Por ejemplo

$$0^2\,1\,(0\,1)^2\,(0^2\,1\,(0\,1)^3)^4$$

representa 43 términos de la serie de Bernoulli $\left(\frac{19}{43}, 0\right)$.

3. — Para x racional representado por una fracción irreducible $\frac{P}{Q}$ la serie de Bernoulli (x, b) tiene algunas propiedades que vale la pena de mencionar.

1. La serie $\left(\frac{P}{Q}, b\right)$ es periódica y su período consta de Q términos

$$K_0, \; K_1, \; \ldots, \; K_{Q-1}$$

En efecto, para cada valor entero de m tenemos

$$[(m+Q)\frac{P}{Q}+b]=[m\frac{P}{Q}+b]+P,$$

de lo que sigue

$$K_{m+Q}=K_m; \quad m=0, \; 1, \; 2, \; \ldots$$

2°. En el período

$$K_0, \; K_1, \; \ldots, \; K_{Q-1}$$

hay siempre P unidades y, por consiguiente, $Q-P$ ceros, pues de la definición misma de K_m se deduce

$$K_0+K_1+\ldots+K_{Q-1}=[Q\,.\,\frac{P}{Q}+b]-[b]=P.$$

3°. Sea ρ la parte entera de Qb de modo que

$$Qb=\rho+\vartheta; \quad 0\leqq\vartheta<1.$$

Entonces

$$m\frac{P}{Q}+b=m\frac{P}{Q}+\frac{\rho}{Q}+\frac{\vartheta}{Q}$$

y como

$$m\frac{P}{Q}+\frac{\rho}{Q}=[m\frac{P}{Q}+\frac{\rho}{Q}]+\frac{r_m}{Q},$$

donde

$$0 \leqq r_m \leqq Q-1,$$

tendremos

$$m\frac{P}{Q}+b=\left[m\frac{P}{Q}+\frac{\rho}{Q}\right]+\frac{r_m+\vartheta}{Q}.$$

Pero siempre

$$0 \leqq r_m+\vartheta < Q$$

y por consiguiente

$$\left[m\frac{P}{Q}+b\right]=\left[m\frac{P}{Q}+\frac{\rho}{Q}\right]$$

para cada valor entero de m, y ello significa que la serie $\left(\frac{P}{Q}, b\right)$ cualquiera que sea b es idéntica con alguna serie $\left(\frac{P}{Q}, \frac{\rho}{Q}\right)$ donde el entero ρ está convenientemente elegido.

4º. Sea

$$c_0, \; c_1, \; \ldots, \; c_{Q-1}$$

el período de la serie de Bernoulli $\left(\frac{P}{Q}, 0\right)$ que debe considerarse como más sencilla. Una vez conocido este período el período de cada serie $\left(\frac{P}{Q}, \frac{\rho}{Q}\right)$ se hallará casi inmediatamente. En efecto, sea ν el número no negativo y menor de Q únicamente determinado por la congruencia

$$P\nu \equiv \rho \pmod{Q}.$$

Entonces

$$m\frac{P}{Q}+\frac{\rho}{Q}=(m+\nu)\frac{P}{Q}+h$$

con h cierto entero fijo y por consiguiente

$$\left[m\frac{P}{Q}+\frac{\rho}{Q}\right]=\left[(m+\nu)\frac{P}{Q}\right]+h,$$

de donde resulta

$$K_m=c_{m+\nu}$$

y ello quiere decir que el período de la serie $\left(\frac{P}{Q},\frac{\rho}{Q}\right)$ será

$$c_\nu,\ c_{\nu+1},\ldots\ c_{Q-1},\ c_0,\ c_1,\ \ldots,\ c_{\nu-1}$$

y se obtiene del período

$$c_0,\ c_1,\ \ldots,\ c_{\nu-1},\ c_\nu,\ \ldots,\ c_{Q-1}$$

trasponiendo ν primeros términos a la derecha sin alterar su orden.

5º. El período

$$c_0,\ c_1,\ \ldots,\ c_{Q-1}$$

de la serie $\left(\frac{P}{Q},0\right)$ se empieza en 0 y se acaba en 1 y la parte

$$c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_{Q-2},$$

que existe sólo cuando $Q>2$, es simétrica, es decir

$$c_{Q-1-\rho}=c_\rho$$

para $\rho=1,\ 2,\ \ldots,\ Q-2$. En efecto, tenemos primero

$$c_0=\left[\frac{P}{Q}\right]=0 \text{ por ser } 0<\frac{P}{Q}<1$$

$$c_{Q-1}=\left[\frac{Q}{Q}\cdot P\right]-\left[(Q-1)\frac{P}{Q}\right]=P-(P-1)=1.$$

Luego

$$\left[(Q-\rho)\frac{P}{Q}\right]=P-\left[\rho\frac{P}{Q}\right]-1.$$

$$\left[(Q-1-\rho)\frac{P}{Q}\right]=P-\left[(\rho+1)\frac{P}{Q}\right]-1$$

por no ser ninguno de los dos números

$$\rho\frac{P}{Q},\ (\rho+1)\frac{P}{Q}$$

entero, de donde

$$c_{Q-1-\rho}=\left[(Q-\rho)\frac{P}{Q}\right]-\left[(Q-1-\rho)\frac{P}{Q}\right]=$$

$$=\left[(\rho+1)\frac{P}{Q}\right]-\left[\rho\frac{P}{Q}\right]=c_\rho$$

lo que queríamos demostrar.

4. — Para investigar la estructura del período de la serie $\left(\frac{P}{Q},0\right)$ empecemos con el caso más sencillo $P=1$, $Q=s$. Entonces

$$\left[\frac{m}{s}\right]=0$$

para $m=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ s-1$, pero $\left[\frac{s}{s}\right]=1$ y por tanto el período buscado será

$$0^{s-1}\,1$$

Sea luego $P>1$; siendo s la parte entera del cociente $\frac{Q}{P}$ podemos escribir

$$\frac{P}{Q}=x=\frac{1}{s+x'}$$

donde $0<x'<1$. El número racional x' tendrá P por denominador como se ve fácilmente y el período de la serie $(x', 0)$:

$$c'_0,\ c'_1,\ \ldots,\ c'_{P-1}$$

constará de P términos. Vamos a ver cómo, conociendo este período, se halla el de la serie $(x, 0)$. Al variar m de 0 a $Q-1$ la parte entera de

$$m\frac{P}{Q}$$

toma valores 0, 1, 2, ..., $P-1$. Sea h uno de estos números y m_h el máximo entero tal que todavía tenemos

$$\left[m_h\frac{P}{Q}\right]=h.$$

Conociendo la sucesión

$$m_0,\ m_1,\ \ldots,\ m_{P-1}$$

conoceremos inmediatamente el período de la serie $(x, 0)$ el cual será

$$0^{m_0}\,1\,0^{m_1-m_0-1}\,1\,0^{m_2-m_1-1}\,1\ \ldots\ 0^{m_{P-1}-m_{P-2}-1}\,1.$$

De la definición de m_h sigue

$$m_h x<h+1,\quad (m_h+1)\,x\geqq h+1$$

de donde

$$m_h<\frac{h+1}{x}=(h+1)\,s+(h+1)\,x'$$

$$m_h\geqq\frac{h+1}{x}-1=(h+1)\,s+(h+1)\,x'-1.$$

El producto $(h+1)x'$ no es entero para $h=0, 1, 2, \ldots, P-2$ y entonces

$$m_h = (h+1)s + [(h+1)x']$$

de modo que

$$m_h - m_{h-1} - 1 = s - 1 + [(h+1)x'] - [hx']$$

o bien

$$m_h - m_{h-1} - 1 = s - 1 + c'_h$$

en tanto que $h=1, 2, \ldots, P-2$. Al contrario para $h=P-1$ tenemos

$$m_{P-1} = Ps + [Px'] - 1$$

siendo Px' entero y

$$m_{P-1} - m_{P-2} - 1 = s - 2 + [Px'] - [(P-1)x'] = s - 1.$$

Además

$$m_0 = s + [x'] = s$$

y por lo tanto el período buscado de la serie $(x, 0)$ será

$$0^s\, 1\, 0^{s-1+c'_1}\, 1\, 0^{s-1+c'_2}\, 1 \ldots 0^{s-1+c'_{P-2}}\, 1\, 0^{s-1}\, 1$$

o bien

$$0^s\, 1\, 0^{s-1+c'_{P-2}}\, 1\, 0^{s-1+c'_{P-3}}\, 1 \ldots 0^{s-1+c'_1}\, 1\, 0^{s-1}\, 1$$

teniendo en cuenta la simetría del grupo

$$c'_1,\ c'_2,\ \ldots,\ c'_{P-2}.$$

Presentado el período buscado en segunda forma resulta, como se ve fácilmente, del período de la serie $(x', 0)$ según la regla siguiente:

Siguiendo los términos del período

$$c'_0,\ c'_1,\ \ldots,\ c'_{P-1}$$

de derecha a izquierda se sustituye $0^s 1$ para cada unidad y $0^{s-1} 1$ para cada cero y se escriben dichos grupos de izquierda a derecha.

Sentado esto sea

$$x = \cfrac{1}{s + \cfrac{1}{s_1 + \ldots + \cfrac{1}{s_n}}}$$

el desarrollo del número x en una fracción continua. Saliendo del período correspondiente a $\frac{1}{s_n}$ que es

$$0^{s_n - 1} 1$$

según la regla hallamos el período correspondiente a

$$\cfrac{1}{s_{n-1} + \cfrac{1}{s_n}}.$$

Más adelante, con ayuda de la misma regla encontraremos el período correspondiente a

$$\cfrac{1}{s_{n-2} + \cfrac{1}{s_{n-1} + \cfrac{1}{s_n}}}$$

y así sucesivamente hasta que llegamos al período buscado.

5. — Consideremos ahora algunos ejemplos numéricos

Ejemplo 1. Encontrar el período de la serie $\left(\frac{37}{50}, 0\right)$ Tenemos

$$\frac{37}{50} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{2}}}}}$$

y haciendo uso de la regla se encuentra sucesivamente

Período	correspondiente a
$0\,1$	$\frac{1}{2}$
$0^5\,1\,0^4\,1$	$\frac{1}{5}+\frac{1}{2}$
$0\,1^5\,0\,1^6$	$\frac{1}{1}+\frac{1}{5}+\frac{1}{2}$
$(0^2\,1)^6\,0\,1\,(0^2\,1)^5\,0\,1$	$\frac{1}{2}+\frac{1}{1}+\frac{1}{5}+\frac{1}{2}$
$0\,1^2\,(0\,1^3)^5\,0\,1^2\,(0\,1^3)^6$	$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{1}+\frac{1}{5}+\frac{1}{2}$

de modo que

$$0\,1^2\,(0\,1^3)^5\,0\,1^2\,(0\,1^3)^6$$

es el período buscado.

Ejemplo 2. Deseamos construir la tabla de enteros próximos a los múltiplos del número $\frac{13}{17}$. Busquemos en primer lugar el período de la serie $\left(\frac{13}{17}, 0\right)$. Tenemos

$$\frac{13}{17}=\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$$

y hallamos sucesivamente

$$0^3\,1$$
$$0^3\,1\,(0^2\,1)^3$$
$$(0\,1^3)^3\,0\,1^4$$

lo que es el período deseado. Ahora debemos buscar el período de la serie $\left(\frac{13}{17}, \frac{1}{2}\right)$. Tenemos

$$\rho = \left[\frac{17}{2}\right] = 8$$

$$13\,\nu \equiv 8 \pmod{17}$$

donde

$$\nu \equiv \frac{8}{13} \equiv \frac{-8}{4} \equiv -2 \equiv 15 \pmod{17}.$$

Separando en

$$(0\,1^3)^3\,0\,1^4$$

15 primeros términos $(0\,1^3)^3\,0\,1^2$ y escribiéndolos detrás de dos términos 1^2 que quedan logramos por fin el período deseado

$$1^2\,(0\,1^3)^3\,0\,1^2$$

y la tabla de enteros próximos se construye empleando sólo adiciones como se ve:

$$\begin{array}{c}
m = 0\;1\;2\;3\;4\;5\;6\;7\;8\;9\;10\;11\;12\;13\;14\;15\;16\;17 \\
\hline
1\;1\;0\;1\;1\;1\;0\;1\;1\;1\;\;0\;\;1\;\;1\;\;1\;\;0\;\;1\;\;1
\end{array}$$

$$\left\{\frac{13}{17}m\right\} = 0, 1, 2, 2, 3, 4, 5, 5, 6, 7, 8, 8, 9, 10, 11, 11, 12, 13.$$

6. — La solución expuesta del problema de Bernoulli es bastante sencilla y cómoda si deseamos hallar el período completo. Pero, aunque sea x racional, puede ser que necesitamos mucho menos términos de lo que contiene este período. En tal caso y aún en caso de x irracional el problema debe plantearse de otro modo. En aplicaciones prácticas el número de términos que es preciso encontrar es siempre dado de antemano, sea N.

Entonces necesitamos buscar medios más expeditos para hallar N términos

$$K_0,\ K_1,\ \ldots,\ K_{N-1}$$

de la propuesta serie de Bernoulli (x, b). Con tal propósito introducimos el concepto del período mínimo de la dada sección

$$K_\lambda,\ K_{\lambda+1},\ \ldots,\ K_\nu$$

de la serie de Bernoulli. Llamamos el período mínimo a la más corta parte de ella

$$K_\lambda,\ K_{\lambda+1},\ \ldots,\ K_\mu$$

que, repetida periódicamente, cubre todos los términos K_λ, $K_{\lambda+1}$, $\ldots$, K_ν.

Una vez que tengamos reglas para hallar el período mínimo de la sección

$$K_0,\ K_1,\ \ldots,\ K_{N-1}$$

el problema planteado estará resuelto. En el estudio de propiedades del período mínimo podemos limitarnos al caso de x racional. En efecto, sea x irracional, b un número real cualquiera y

$$mx+b=[mx+b]+\vartheta_m$$

donde $0 \leqq \vartheta_m < 1$. Sea ω el máximo de los números ϑ_0, ϑ_1, $\ldots$, ϑ_N y $\frac{P}{Q}$ una convergente (*) del orden par a la fracción continua

$$x=\cfrac{1}{s+\cfrac{1}{s_1+\cfrac{1}{s_2+\ldots}}}$$

de modo que

$$\frac{P}{Q}=x+\frac{\epsilon}{Q^2},\quad 0<\epsilon<1.$$

(*) El autor llama convergente principal y convergente intermedia a la reducida principal y reducida intercalada, respectivamente.

Entonces

$$m\frac{P}{Q}+b=[mx+b]+\vartheta_m+\frac{m\epsilon}{Q^2}$$

Pero

$$\vartheta_m+\frac{m\epsilon}{Q^2}\leqq\omega+\frac{m\epsilon}{Q^2}$$

y eligiendo Q bastante largo para que sea

$$\omega+\frac{N\epsilon}{Q^2}<1$$

tendremos

$$[m\frac{P}{Q}+b]=[mx+b]$$

para $m=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ N$ de modo que N términos de ambas series (x, b) y $\left(\frac{P}{Q}, b\right)$ son idénticos. La última serie será idéntica con la serie $\left(\frac{P}{Q}, \frac{\rho}{Q}\right)$ donde ρ está convenientemente elegido o con la serie

$$\left(\frac{P}{Q}, \frac{2\rho+1}{2Q}\right)$$

por ser

$$\left[m\frac{P}{Q}+\frac{\rho}{Q}\right]=\left[m\frac{P}{Q}+\frac{\rho}{Q}+\frac{1}{2Q}\right]$$

para cada valor de m. Por razones teóricas conviene considerar la serie $\left(\frac{P}{Q}, \frac{2\rho+1}{2Q}\right)$ en vez de $\left(\frac{P}{Q}, \frac{\rho}{Q}\right)$ porque nunca

$$m\frac{P}{Q}+\frac{\rho}{Q}+\frac{1}{2Q}$$

es un número entero.