SOBRE UN PROBLEMA DE JUAN BERNOULLI

(Segunda Parte)

por J. V. USPENSKY

7. — No perdemos nada en generalidad si en vez de una sección cualquiera dada de la serie de Bernoulli $\left(\frac{P}{Q}, \frac{2\rho+1}{2Q}\right)$, consideramos la sección

$$K_0,\ K_1,\ \ldots,\ K_{q-1} \tag{A}$$

lo cual se obtiene con cambio de ρ. También está permitido suponer $0 \leqq \rho < Q$. Las partes enteras

$$\left[mx + \frac{2\rho+1}{2Q}\right]; \quad x = \frac{P}{Q} \tag{B}$$

al recorrer m los valores 0, 1, 2, ..., g crecen desde

$$\left[0x + \frac{2\rho+1}{2Q}\right] = 0$$

hasta

$$\left[gx + \frac{2\rho+1}{2Q}\right] = g'$$

y será $g' \geqq 2$ si la sección (A) tiene al menos dos unidades. Veamos ahora cuántas partes enteras sean 0, cuántas sean g' y cuántas iguales a un número dado h, donde $0 < h < g'$.

Para que sea

$$\left[mx + \frac{2\rho+1}{2Q}\right] = 0$$

es preciso que

$$mx + \frac{2\rho+1}{2Q} < 1$$

de donde

$$m < \frac{1}{x} - \frac{2\rho+1}{2P} = s + x' - \frac{2\rho+1}{2P}$$

puesto que

$$x = \frac{1}{s+x'}, \quad 0 < x' < 1.$$

Ya que

$$x' - \frac{2\rho+1}{2P}$$

no es entero la desigualdad precedente equivale a

$$m \leqq s + \left[x' - \frac{2\rho+1}{2P}\right]$$

y por tanto hay precisamente

$$\alpha + 1 = s + 1 + \left[x' - \frac{2\rho+1}{2P}\right]$$

partes enteras (B) iguales a cero. Para que sea

$$\left[mx + \frac{2\rho+1}{2Q}\right] = g'$$

es preciso que

$$g' < mx + \frac{2\rho+1}{2Q}$$

por no ser la parte derecha entera, de donde

$$m > \frac{g'}{x} - \frac{2\rho+1}{2P} = g's + g'x' - \frac{2\rho+1}{2P}$$

o bien

$$m \geqq g's + \left[g'x' - \frac{2\rho+1}{2P}\right] + 1.$$

Ya que por otra parte $m \leqq g$ hay

$$\beta + 1 = g - g's - \left[g'x' - \frac{2\rho+1}{2P}\right]$$

partes enteras (B) iguales a g'. Sea ahora $0 < h < g'$. Para que sea

$$\left[mx + \frac{2\rho+1}{2Q}\right] = h$$

es preciso que

$$h < mx + \frac{2\rho+1}{2Q} < h + 1$$

o bien

$$hs + hx' - \frac{2\rho+1}{2P} < m < (h+1)s + (h+1)x' - \frac{2\rho+1}{2P}$$

y, no siendo ni la parte izquierda ni la parte derecha enteros, vemos que hay

$$s + \left[(h+1)x' - \frac{2\rho+1}{2P}\right] - \left[hx' - \frac{2\rho+1}{2P}\right]$$

partes enteras (B) iguales a h. Designando con

$$K'_1, \ K'_2, \ \ldots, \ K'_{g'-1}$$

términos de la serie de Bernoulli$\left(x' - \frac{2\rho+1}{2P}\right)$ conocidos dada la sección (A) vemos que ella posee la estructura siguiente

$$0^{\alpha} \ 1 0^{s_1} \ 1 0^{s_2} \ 1 \ldots 0^{s_{g'-1}} \ 1 0^{\beta}$$

donde

$$s_\nu = s - 1 \quad \text{o} \quad s_\nu = s$$

según que

$$K'_\nu = 0 \quad \text{o} \quad K'_\nu = 1.$$

Es fácil ver que en el caso $\alpha = s$ conoceremos $K'_0 = 1$; lo mismo en el caso $\beta = s$ conoceremos $K'_g = 1$.

De tal manera dada la sección (A) podemos distinguir cuatro casos:

1°. En el caso $\alpha = s$, $\beta = s$ con la sección (A) está determinada la sección

$$K'_0 = 1,\ K'_1,\ \ldots,\ K'_{q'-1}, K'_{q'} = 1$$

de la serie $\left(x', -\dfrac{2\rho+1}{2P}\right)$.

2°. En el caso $\alpha = s$, $\beta < s$ está determinada la sección

$$K'_0 = 1,\ K'_1,\ \ldots,\ K'_{q'-1}.$$

3°. En el caso $\alpha < s$, $\beta = s$ está determinada la sección

$$K'_1,\ K'_2,\ \ldots,\ K'_{q'} = 1.$$

4°. En el caso $\alpha < s$, $\beta < s$ está determinada la sección

$$K'_1,\ K'_2,\ \ldots,\ K'_{q'-1}.$$

8. — Sentado esto ya podemos proceder a la demostración del teorema siguiente:

Teorema 1 (*). El período mínimo de cada sección dada de la serie (x,b) és el período de alguna serie de Bernoulli $\left(\dfrac{p}{q}, \dfrac{2\sigma+1}{2q}\right)$.

Demostración. Si la sección considerada no tiene más de una unidad el teorema es cierto. En efecto, para una sección del tipo 0^α o 1^α el período mínimo es 0 o 1 y en ambos casos período de una serie de Bernoulli. Si la sección es del tipo $0^\alpha\,1$ o $1\,0^\alpha$ con $\alpha > 0$ el período mínimo que es $0^\alpha\,1$ o $1\,0^\alpha$ otra vez es período de una serie de Bernoulli. Si la sección es del tipo $0^\alpha 1 0^\beta$ con $\alpha > 0$, $\beta > 0$ distinguimos dos casos:

$$\alpha \geqq \beta \ \text{ y } \ \alpha < \beta.$$

(*) Véase A. Markoff, *loc. cit.*, pág. 32-34.

Según que tiene lugar el primer o el segundo caso los períodos mínimos de la sección son $0^{\alpha}1$ o $0^{\alpha}\ 10^{\beta-\alpha}$ y corresponden ambos a ciertas series de Bernoulli. Ahora vamos a mostrar que suponiendo el teorema cierto para cada sección de cada serie de Bernoulli de menos de g términos quedará cierto para sección de g términos.

Sea una tal sección

$$K_0,\ K_1,\ \ldots,\ K_{q-1} \qquad \text{(A)}$$

perteneciente a la serie $\left(x, \dfrac{2\rho+1}{2Q}\right)$. Entonces, puesto

$$x = \frac{1}{s+x'},\quad 0 < x' < 1$$

tenemos los cuatro casos discutidos en el párrafo precedente.

1°. $\alpha = s$, $\beta = s$. Entonces conocemos la sección

$$K'_0 = 1,\ K'_1,\ \ldots,\ K'_{q'} = 1 \qquad (\mathrm{A}_1)$$

de la serie $\left(x', -\dfrac{2\rho+1}{2P}\right)$.

2°. $\alpha = s$, $\beta < s$. Entonces conocemos la sección

$$K'_0 = 1,\ K'_1,\ \ldots,\ K'_{q'-1} \qquad (\mathrm{A}_2)$$

de la misma serie. Ambas secciones (A_1) y (A_2) tienen menos de g términos y por tanto, según la hipótesis, el período mínimo de una u otra

$$K'_0 = 1,\ K'_1,\ \ldots,\ K'_{p-1} \qquad \text{(B)}$$

es período de cierta serie de Bernoulli. Sea primero $p = 1$. Entonces el período mínimo de la sección (A) es $0^s 1$ y el teorema es cierto. En caso $p > 1$ se ve fácilmenbte que

$$0^{s}\ 10^{s_1}\,10^{s_2}\,1 \ldots 0^{s_{p-1}}\ 1$$

es el período mínimo de la sección (A) y queda por mostrar que es también período de cierta serie de Bernoulli. Según hipótesis es (B) período de cierta serie $\left(\xi', \frac{\rho'}{p}\right)$ donde $\xi' = \frac{r}{p} < 1$ y $0 \leqq \rho' < p$ de modo que

$$\left[\xi' + \frac{\rho'}{p}\right] - \left[\frac{\rho'}{p}\right] = \left[x' - \frac{2\rho+1}{2P}\right] - \left[-\frac{2\rho+1}{2P}\right] = 1$$

$$\left[2\xi' + \frac{\rho'}{p}\right] - \left[\xi' + \frac{\rho'}{p}\right] = \left[2x' - \frac{2\rho+1}{2P}\right] - \left[x' - \frac{2\rho+1}{2P}\right] = K'_1$$

$$\left[3\xi' + \frac{\rho'}{p}\right] - \left[2\xi' + \frac{\rho'}{p}\right] = \left[3x' - \frac{2\rho+1}{2P}\right] - \left[2x' - \frac{2\rho+1}{2P}\right] = K'_2$$

. . . .

En los dos casos que consideramos debe ser $2\rho + 1 < 2P$. En efecto $\alpha = s$ se verifica sólo cuando

$$\left[x' - \frac{2\rho+1}{2P}\right] = 0$$

de donde sigue, poniendo $x' = \frac{R}{P}$, $R < P$,

$$2\rho + 1 < 2R < 2P.$$

Por consiguiente

$$\left[-\frac{2\rho+1}{2P}\right] = -1.$$

Sea

$$\sigma = p - \rho' - 1;$$

entonces $0 \leqq \sigma < p$,

$$\left[-\frac{2\sigma+1}{2p}\right] = -1$$

y además

$$\left[(h+1)\xi' - \frac{2\sigma+1}{2p}\right] - \left[h\xi' - \frac{2\sigma+1}{2p}\right] = K'_h$$

para $h=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ p-1$. Sea

$$\xi = \frac{1}{s+\xi'} = \frac{p}{sp+r} = \frac{p}{q}$$

Siendo $0 \leqq \sigma < q$ se ve como en párrafo 7 que el período de la serie $\left(\xi, \frac{2\sigma+1}{2q}\right)$

será

$$0^s\, 1 0^{s_1}\, 1 0^{s_2}\, 1 \ldots 0^{s_{p-1}}\, 1$$

es decir el mismo período mínimo de la sección (A).

Consideremos ahora dos otros casos que quedan.

3º. $\alpha < s$, $\beta = s$. Entonces conocemos la sección

$$K'_1,\ K'_2,\ \ldots,\ K'_{q'} = 1 \qquad (A_3)$$

de la serie $\left(x', -\frac{2\rho+1}{2P}\right)$.

4º. $\alpha < s$, $\beta < s$. Conocemos la sección

$$K'_1,\ K'_2,\ \ldots,\ K'_{q'-1} \qquad (A_4)$$

de la misma serie. Ambas secciones tienen menos de g términos; luego, por la hipótesis, el período mínimo de una u otra

$$K'_1,\ K'_2,\ \ldots,\ K'_p$$

es período de cierta serie de Bernoulli. El período mínimo de la sección (A) será

$$0^\alpha\, 1 0^{s_1}\, 1 0^{s_2}\, 1 \ldots 0^{s_{p-1}}\, 1 0^{s_p - \alpha}$$

y el teorema es evidentemente cierto en caso $p=1$. En caso $p>1$ sea $\left(\xi', \frac{\rho'}{p}\right)$, donde $\xi' = \frac{r}{p} < 1$, $0 \leqq \rho' < p$ serie de Bernoulli con período

$$K'_1,\ K'_2,\ \ldots,\ K'_p$$

de modo que

$$\left[2\xi' + \frac{\rho'}{p}\right] - \left[\xi' + \frac{\rho'}{p}\right] = \left[2x' - \frac{2\rho+1}{2P}\right] - \left[x' - \frac{2\rho+1}{2P}\right] = K'_1$$

$$\left[3\xi' + \frac{\rho'}{p}\right] - \left[2\xi' + \frac{\rho'}{p}\right] = \left[3x' - \frac{2\rho+1}{2P}\right] - \left[2x' - \frac{2\rho+1}{2P}\right] = K'_2$$

. . . .

Ya que ahora $\alpha \leq s$ debe ser

$$\left[x' - \frac{2\rho+1}{2P}\right]$$

un número negativo. Sea

$$\left[\xi' + \frac{\rho'}{p}\right] - K = \left[x' - \frac{2\rho+1}{2P}\right]$$

y

$$\sigma + 1 = Kp - \rho'.$$

Entonces tenemos

$$\left[\xi' - \frac{2\sigma+1}{2p}\right] = \left[x' - \frac{2\rho+1}{2P}\right]$$

y

$$\left[(h+1)\xi' - \frac{2\sigma+1}{2p}\right] - \left[h\xi' - \frac{2\sigma+1}{2p}\right] = K'_h$$

para $h=1,\ 2,\ \ldots,\ p$. Ya que K es entero positivo y $\rho' < p$ será $\sigma+1>0$ o $\sigma \geqq 0$. Por otra parte

$$\sigma+1=p\left[\xi'+\frac{\rho'}{p}\right]-\rho'-p\left[\frac{Q-Ps}{P}-\frac{2\rho+1}{2P}\right]=$$

$$=p\left[\xi'+\frac{\rho'}{p}\right]-\rho'+ps-p\left[\frac{Q}{P}-\frac{2\rho+1}{2P}\right].$$

Pero

$$p\left[\frac{r}{p}+\frac{\rho'}{p}\right]-\rho'+ps\leqq r+\rho'-\rho'+ps=q$$

y $2Q>2\rho+1$; es cierto luego que

$$\sigma+1\leqq q$$

de donde $\sigma<q$. Por consiguiente el período de la serie $\left(\frac{p}{q},\frac{2\sigma+1}{2q}\right)$ es el mismo período mínimo

$$0^{\alpha}\,1\,0^{s_1}\,1\ldots0^{s_{p-1}}\,1\,0^{s_p-\alpha}$$

de la sección (A) y el teorema queda demostrado.

Quizás no sería inútil ilustrar la demostración que acabamos de presentar con ejemplos numéricos.

Ejemplo 1. Sea dada la sección

$$0\,1\,0^2\,1\,0^3\,1\,0^2\,1\,0\,0$$

de la serie $\left(\frac{9}{31},\frac{19}{31}\right)$. La sección correspondiente de la serie $\left(\frac{4}{9},\frac{-20}{9}\right)$ es

$$K'_1=0,\quad K'_2=1,\quad K'_3=0$$

y su período mínimo $0\,1$ es período de la serie $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ de modo que $p=2$, $\rho'=1$. Ya que $\alpha=1$, $s=3$ hallamos

$$K=\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right]-\left[\frac{4}{9}-\frac{20}{9}\right]=3$$

y $\sigma+1=6-1=5$, $\sigma=4$. El período mínimo de la sección propuesta será período de la serie $\left(\frac{2}{7}, \frac{4}{7}\right)$:

$$0\,1\,0^2\,1\,0^2$$

lo que se verifica inmediatamente.

Ejemplo 2. Sea dada la sección

$$0^3\,1\,0^2\,1\,0^3\,1\,0^2\,1\,0^3$$

de la serie $\left(\frac{9}{31}, \frac{1}{31}\right)$. La sección correspondiente de la serie $\left(\frac{4}{9}, \frac{-2}{9}\right)$ será

$$K'_0=1,\ K'_1=0,\ K'_2=1,\ K'_3=0,\ K'_4=1$$

y su período mínimo $1\,0$ corresponde a la serie $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ de modo que $p=2$, $\rho'=1$.

Luego

$$\sigma=2-1-1=0$$

y el período mínimo de la sección propuesta es período de la serie $\left(\frac{2}{9}, 0\right)$ el cual es

$$0^3\,1\,0^2\,1$$

lo que se ve inmediatamente.

9. — *Teorema* 2. Sea

$$K_0,\ K_1,\ \ldots,\ K_{q-1}$$

una sección de la serie (x, b) y sea la serie $\left(\frac{p}{q}, \frac{\sigma}{q}\right)$ que engendra su período mínimo.

Digo que $\frac{p}{q}$ es una convergente principal o intermedia a la fracción continua que representa x.

Demostración. El teorema es cierto si el período no tiene más de una unidad, puesto que en tal caso el dicho período no puede ser otro que

$$0,\quad 1,\quad 0^{\alpha}\, 1,\quad 1\, 0^{\alpha},\quad 0^{\alpha}\, 1\, 0^{\beta-\alpha}$$

donde $\alpha \leqq s$, $\alpha < \beta \leqq s$ y la correspondiente fracción $\frac{p}{q}$ es $\frac{1}{0}$ o del tipo $\frac{1}{n}$ con $n \leqq s+1$ y por tanto es una convergente principal o intermedia a la fracción continua

$$x = \cfrac{1}{s + \cfrac{1}{s_1 + \cfrac{1}{s_2 + \dots}}}$$

Ahora puesto que el teorema sea válido en caso que el número de términos en el período mínimo sea $< l$ vamos a demostrar que quedará válido cuando este número sea l.

Ya hemos visto que puesto

$$x = \frac{1}{s+x'}$$

será determinada cierta sección de la serie del tipo (x', b') cuyo período mínimo tiene menos de l términos. Por lo tanto si $\left(\xi', \frac{p'}{p}\right)$ es la serie que le engendra será ξ' una convergente principal o intermedia a la fracción continua

$$x' = \cfrac{1}{s_1 + \cfrac{1}{s_2 + \dots}}$$

Pero

$$\xi = \frac{p}{q} = \frac{1}{s+\xi'}$$

de donde sigue que ξ es una convergente principal o intermedia a la fracción continua

$$x = \cfrac{1}{s + \cfrac{1}{s_1 + \cfrac{1}{s_2 + \ldots}}}$$

lo que se quería demostrar.

10. — Al número racional $\xi = \frac{p}{q}$ llamemos *aproximación óptima* respecto a la serie (x, b) si con ν apropiadamente elegido la serie $\left(\xi, \frac{\nu}{q}\right)$ tiene más términos comunes con (x, b) que cada otra serie $\left(\xi', \frac{\nu'}{q'}\right)$ donde $\xi' = \frac{p'}{q'}$ tiene el denominador menor que el de ξ. Acerca de las aproximaciones óptimas tenemos los siguientes teoremas:

Teorema 3. Si la serie $\left(\frac{p}{q}, \frac{\nu}{q}\right)$ engendra el período mínimo de la sección

$$K_0,\ K_1,\ \ldots,\ K_{q-1}$$

de la serie (x, b) será $\frac{p}{q}$ una aproximación óptima.

Demostración. Si no fuera así tendríamos otra serie $\left(\frac{p'}{q'}, \frac{\nu'}{q'}\right)$ que tiene con (x, b) al menos q términos en común mientras $q' < q$. Pero entonces el período mínimo de la sección considerada tendría $\leqq q'$ términos, lo que es imposible.

Teorema 4. Si $\frac{p}{q}$ es una aproximación óptima y la serie $\left(\frac{p}{q}, \frac{\nu}{q}\right)$ tiene g términos en común con (x, b) será $g \geqq q$.

Demostración. Sea $g < q$. El período mínimo de la sección

$$K_0,\ K_1,\ \ldots,\ K_{q-1}$$

tiene $q' \leqq g$ términos y la serie que le engendra $\left(\frac{p'}{q'}, \frac{\nu'}{q'}\right)$ tiene con (x, b) al menos g términos, luego $\frac{p}{q}$ no puede ser una aproximación óptima.

Teorema 5. Si $\frac{p}{q}$ es una aproximación óptima y la serie $\left(\frac{p}{q}, \frac{\nu}{q}\right)$ tiene g términos en común con (x, b) la misma serie engendra el período mínimo de la sección

$$K_0, K_1, \ldots, K_{q-1}$$

Demostración. Sea $\left(\frac{p'}{q'}, \frac{\nu'}{q'}\right)$ la serie que engendra dicho período mínimo. Ella tiene al menos g términos en común con (x, b) y por tanto no puede ser $q' < q$. Tampoco puede ser $q' > q$; luego $q' = q$, es decir el período mínimo tiene q términos y es idéntico con el período de la serie $\left(\frac{p}{q}, \frac{\nu}{q}\right)$. Luego tenemos además $p' = p$ y, como se ve fácilmente, $\nu' = \nu$.

Corolario. Cada aproximación óptima es una convergente principal o intermedia a la fracción continua que representa x. Sigue de teoremas 5 y 2.

Sea $\frac{p}{q}$ una aproximación óptima y sea $L - 1$ el máximo número de términos que la serie $\left(\frac{p}{q}, \frac{\nu}{q}\right)$ tiene en común con (x, b) de modo que los L-ésimos términos de dichas series son diferentes. Al número L por razón obvia llamaremos el punto de divergencia correspondiente a la aproximación óptima $\frac{p}{q}$.

Sean

$$\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}, \frac{p_3}{q_3}, \ldots$$

todas las aproximaciones óptimas colocadas en orden de denominadores crecientes y L_1, L_2, L_3, ... sus puntos de divergencia. Entonces se ve fácilmente que

$$L_1 < L_2 < L_3 < \ldots$$

Ahora si deseamos encontrar un número dado N de términos de la serie (x, b) de manera más expedita debemos buscar el período mínimo de la sección

$$K_0,\ K_1,\ \ldots,\ K_{N-1}.$$

Con tal objeto busquemos el mínimo n tal que

$$L_n > N$$

y el período de la correspondiente serie $\left(\frac{p_n}{q_n}, \frac{\nu_n}{q_n}\right)$ será el período mínimo deseado. En efecto, el período mínimo buscado según Teorema 3 es idéntico con el período de alguna serie $\left(\frac{p_m}{q_m}, \frac{\nu_m}{q_m}\right)$ donde $m \leqq n$. No puede ser $m < n$ porque entonces

$$L_m \leqq N$$

y la serie tiene sólo $L_m - 1 < N$ términos en común con (x, b).

Así la solución completa del problema de Bernoulli necesita la investigación de todas las aproximaciones óptimas con sus puntos de divergencia, lo que haremos en lo sucesivo para dos casos particularmente importantes: $b = 0$ y $b = \frac{1}{2}$.

11. — Sea

$$x = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ldots}}}$$

el desarrollo de x en fracción continua y

$$\frac{P_0}{Q_0} = \frac{1}{0},\ \frac{P_1}{Q_1} = \frac{0}{1},\ \frac{P_2}{Q_2}, \frac{P_3}{Q_3}, \ldots$$

sus convergentes principales. Se sabe que

$$P_{n+1}=a_n P_n+P_{n-1}, \quad Q_{n+1}=a_n Q_n+Q_{n-1}$$

y

$$P_n Q_{n+1}-P_{n+1} Q_n=(-1)^n.$$

Además llamando x_n al cociente completo que engendra a_n tenemos

$$x=\frac{P_n x_n+P_{n-1}}{Q_n x_n+Q_{n-1}}$$

En cuanto $a_n>1$ entre convergentes principales $\frac{P_n}{Q_n}$ y $\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}$ intercalamos convergentes intermedias

$$\frac{R}{S}=\frac{\mu P_n+P_{n-1}}{\mu Q_n+Q_{n-1}}$$

tomando $\mu=1,\ 2,\ \ldots,\ a_n-1$. Se encuentra fácilmente

$$x-\frac{P_n}{Q_n}=\frac{(-1)^{n-1}}{Q_n(Q_n x_n+Q_{n-1})}$$

$$x-\frac{R}{S}=\frac{(-1)^n(x_n-\mu)}{S(Q_n x_n+Q_{n-1})}$$

Vamos a examinar ahora si una convergente principal $\frac{P_n}{Q_n}$ puede ser aproximación óptima respecto a la serie $(x, 0)$. Si es así la serie $\left(\frac{P_n}{Q_n}, \frac{K}{Q_n}\right)$, elegido K de modo conveniente, tiene al menos Q_n términos en común con $(x, 0)$. Ajustado K de tal modo que

$$[Q_n x]=\left[Q_n \frac{P_n}{Q_n}+\frac{K}{Q_n}\right]$$

tendremos

$$[mx] = \left[m\frac{P_n}{Q_n} + \frac{K}{Q_n}\right]$$

para $m=0, 1, 2, \ldots, Q_n - 1$. Sea n impar de modo que

$$x = \frac{P_n}{Q_n} + \omega; \quad \omega = \frac{1}{Q_n(Q_n x_n + Q_{n-1})}$$

y

$$mP_n \equiv r_m \pmod{Q_n}; \quad 0 \leqq r_m < Q_n.$$

Entonces debe ser

$$\left[m\omega + \frac{r_m}{Q_n}\right] = \left[\frac{r_m}{Q_n} + \frac{K}{Q_n}\right]$$

para $m=0, 1, 2, \ldots, Q_n - 1$. Ya que entonces

$$m\omega < \frac{1}{Q_n}$$

tendremos

$$\left[m\omega + \frac{r_m}{Q_n}\right] = 0$$

y así

$$\left[\frac{r_m}{Q_n} + \frac{K}{Q_n}\right] = 0; \quad m=0, 1, 2, \ldots, Q_n - 1.$$

En particular para $m=0$

$$\left[\frac{K}{Q_n}\right] = 0$$

de donde $0 \leqq K < Q_n$. Por otra parte al variar m de 0 a $Q_n - 1$ el resto r_m recorre todos los números $0, 1, 2, \ldots, Q_n - 1$ y para algún m tendremos $r_m = Q_n - 1$ y por tanto

$$\left[1+\frac{K-1}{Q_n}\right]=0$$

lo que necesita $K<1$. Luego necesariamente $K=0$. Vamos a ver ahora cuántos términos tiene la serie $\left(\frac{P_n}{Q_n}, 0\right)$ en común con $(x, 0)$, lo que equivale a buscar el mínimo valor m tal que

$$\left[m\omega+\frac{r_m}{Q_n}\right]$$

no sea 0 o, lo que es lo mismo, tal que

$$m\omega+\frac{r_m}{Q_n}\geqq 1.$$

Escribiendo $r_m=Q_n-i$, donde $i=1, 2, \ldots, Q_n$, tenemos

$$m\,P_n\equiv -i \pmod{Q_n}$$
$$Q_{n-1}\,P_n\equiv -1 \pmod{Q_n}$$

lo que necesita

$$m\equiv i\,Q_{n-1} \pmod{Q_n}$$

o

$$m=h\,Q_n+i\,Q_{n-1}.$$

La desigualdad que deseamos satisfacer se presenta así

$$\frac{hQ_n+iQ_{n-1}}{Q_nx_n+Q_{n-1}}\geqq i$$

y equivale a

$$h\geqq i\,x_n.$$

Tendremos el mínimo valor de m tomando $i=1$ y el mínimo h tal que $h\geqq x_n$. Si en caso de x racional desarrollando siempre en fracción continua con número impar de elementos será siempre $x_n > a_n$ para n impar y hay que tomar $h = a_n + 1$, de donde resulta

$$m = Q_n + Q_{n+1}.$$

Tal será el punto de divergencia de la serie $\left(\frac{P_n}{Q_n}, 0\right)$.

Sea ahora n un número par. Entonces

$$x = \frac{P_n}{Q_n} - \omega, \quad \omega = \frac{1}{Q_n(Q_n x_n + Q_{n-1})}$$

y, ajustado K de modo conveniente, será

$$\left[\frac{r_m}{Q_n} - m\omega\right] = \left[\frac{r_m}{Q_n} + \frac{K}{Q_n}\right]$$

para $m = 0, 1, 2, \ldots, Q_n$. Tomando $r_m = 0$ (lo que corresponde a $m = 0$ y $m = Q_n$) y $r_m = 1$ y teniendo en cuenta que $m\omega < \frac{1}{Q_n}$ para valores de m que consideramos tenemos que satisfacer las condiciones

$$\left[\frac{K}{Q_n}\right] = 0, \quad \left[\frac{K+1}{Q_n}\right] = 0, \quad \left[\frac{K}{Q_n}\right] = -1$$

de las cuales la primera contradice la tercera. En cuanto a la segunda y tercera ellas están satisfechas sólo para $K = -1$. Así para n par en rigor la convergente principal $\frac{P_n}{Q_n}$ no puede ser aproximación óptima; pero la serie

$$\left(\frac{P_n}{Q_n}, \frac{-1}{Q_n}\right)$$

por cierto tendrá términos

$$K_1, \ K_2, \ \ldots, \ K_{Q_n - 1}$$

en común con $(x, 0)$. Veamos cuál es su punto de divergencia. Sea $r_m = i$, donde $i = 1, 2, \ldots, Q_n - 1$. Entonces

$$m P_n \equiv i \pmod{Q_n}$$

$$Q_{n-1} P_n \equiv 1 \pmod{Q_n}$$

y sólo a valores

$$m = h Q_n + i Q_{n-1} .$$

corresponderá $r_m = i$. El valor mínimo m para cual

$$\left[-m\omega + \frac{i}{Q_n} \right]$$

no sea 0 es tal que

$$m\omega > \frac{i}{Q_n}$$

lo que equivale a

$$h > i x_n.$$

Para que m resulte mínimo hay que tomar $i = 1$, $h = a_n + 1$ y por tanto

$$m = Q_n + Q_{n+1}.$$

Por otra parte se ve fácilmente que jamás tendremos

$$-m\omega + \frac{i}{Q_n} < -1$$

para valores menores de m y ello significa que se verifique la igualdad

$$[mx] = \left[m \frac{P_n}{Q_n} - \frac{1}{Q_n} \right]$$

para

$$m = 1, 2, \ldots, Q_n + Q_{n+1} - 1$$

y no se verifique ya para $m = Q_n + Q_{n+1}$.