SOBRE UN PROBLEMA DE JUAN BERNOULLI

(Tercera Parte)

por J. V. USPENSKY

12. — Examinemos ahora convergentes intermedias y sea primero n impar. Sea

$$mR \equiv r_m \pmod S, \quad 0 \leqq r_m < S$$

y sea K ajustado de manera que

$$\left[\frac{K}{S}\right] = 0.$$

Entonces tenemos que satisfacer condiciones

$$\left[\frac{r_m}{S} - m\omega\right] = \left[\frac{r_m}{S} + \frac{K}{S}\right]$$

para $m = 1, 2, \ldots, S$, donde

$$\omega = \frac{x_n - \mu}{S(Q_n x_n + Q_{n-1})}.$$

Ya que la parte izquierda sea negativa mientras la parte derecha nula para $m = S$ concluímos que la convergente intermedia $\frac{R}{S}$ no es aproximación óptima en caso de n impar. Sea ahora n par. Entonces debe ser

$$\left[\frac{r_m}{S} + m\omega\right] = \left[\frac{r_m}{S} + \frac{K}{S}\right]$$

para $m = 1, 2, \ldots, S$ mientras

$$\left[\frac{K}{S}\right] = 0.$$

Sea $r_m = S - 1$ o

$$mR \equiv -1 \pmod S$$

Ya que

$$Q_n R \equiv -1 \pmod{S}$$

sigue

$$m \equiv Q_n \pmod{S}.$$

Tomando por consiguiente $m = Q_n$ y considerando que

$$Q_n \omega = \frac{Q_n(x_n - \mu)}{S(Q_n x_n + Q_{n-1})} < \frac{1}{S}$$

tenemos

$$\left[\frac{r_m}{S} + m\omega\right] = 0;$$

luego

$$\left[1 + \frac{K-1}{S}\right] = 0$$

lo que necesita $K < 1$ y ya que por otra parte $K \geqq 0$ resulta $K = 0$. Veamos ahora cuál es el mínimo m tal que no se verifique

$$\left[\frac{r_m}{S} + m\omega\right] = 0$$

o, lo que es lo mismo,

$$m\,\omega \geqq \frac{S - r_m}{S}.$$

Puesto $r_m = S - i$; $i = 1, 2, \ldots, S$ resulta

$$mR \equiv -i \pmod{S}$$

$$Q_n R \equiv -1 \pmod{S}$$

y por tanto

$$m \equiv i\,Q_n \pmod{S}$$

o bien

$$m = hS + i\,Q_n.$$

La desigualdad que deseamos satisfacer equivale a

$$(hS + i\,Q_n)\,(x_n - \mu) \geqq i\,(Q_n(x_n - \mu) + S)$$

o

$$h \geqq \frac{i}{x_n - \mu}$$

El mínimo m corresponde a $i = 1$, $h = 1$ por ser $x_n - \mu \geqq 1$ y vale

$$m = S + Q_n$$

de modo que

$$\left[\frac{r_m}{S} + m\omega\right] = 0$$

para $m < S + Q_n$ pero esto no será cierto tomando $m = S + Q_n$. Luego el punto de divergencia de la serie

$$\left(\frac{R}{S} . 0\right)$$

correspondiente a la convergente intermedia en caso de que sea n par será $Q_n + S$.

De lo expuesto sigue que todas las aproximaciones óptimas se encuentran entre convergentes principales $\frac{P_n}{Q_n}$ de índice impar y convergentes intermedias (si las hay)

$$\frac{R}{S} = \frac{\mu P_n + P_{n-1}}{\mu Q_n + Q_{n-1}}$$

correspondientes a índices n pares. Y como se ve fácilmente que los puntos de divergencia crecen con los denominadores serán efectivamente todas las fracciones mencionadas aproximaciones óptimas. En el sentido de § 10 el problema de Bernoulli está resuelto para la serie $(x, 0)$. Puesto que las series $(x, 0)$ y (x, x) son esencialmente idénticas y por otra parte, siendo n par, el punto de divergencia correspondiente a la convergente principal $\frac{P_n}{Q_n}$ sobrepasa el máximo de los puntos de divergencia que corresponden a las convergentes intermedias entre $\frac{P_n}{Q_n}$ y $\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}$ se ve, tratando de modo análogo convergentes intermedias para n impar, que las aproximaciones óptimas para la serie (x, x) son sólo convergentes principales lo que proporcionará la más expedita solución del problema de Bernoulli en el caso que consideramos.

13. — Queda que estudiemos el caso $b = \frac{1}{2}$ de enteros próximos. Examinemos convergentes principales $\frac{P_n}{Q_n}$ y limitémonos a valores de n impares. El caso de n par se trata del modo en todo análogo. Puesto que Q_n es par tenemos

$$\left[mx + \frac{1}{2}\right] = \left[\frac{mP_n + \frac{Q_n}{2}}{Q_n} + m\omega\right]$$

y para Q_n impar

$$\left[mx + \frac{1}{2}\right] = \left[\frac{mP_n + \frac{Q_n - 1}{2}}{Q_n} + \frac{1}{2Q_n} + m\omega\right]$$

En cuanto a la serie $\left(\frac{P_n}{Q_n}, \frac{l}{Q_n}\right)$ la podemos exhibir para conveniencia ora en forma

$$\left(\frac{P_n}{Q_n}, \frac{K + \frac{Q_n}{2}}{Q_n}\right)$$

si Q_n es par, ora en forma

$$\left(\frac{P_n}{Q_n}, \frac{K + \frac{Q_n - 1}{2}}{Q_n}\right)$$

si Q_n es impar con cierto entero K. Sea primero Q_n par. Para que sea $\frac{P_n}{Q_n}$ aproximación óptima es preciso que tengamos

$$\left[\frac{mP_n+\frac{Q_n}{2}}{Q_n}+m\omega\right]=\left[\frac{mP_n+\frac{Q_n}{2}}{Q_n}+\frac{K}{Q_n}\right]$$

para $m=0, 1, 2, \ldots, Q_n$, siendo K ajustado propiamente, o bien

$$\left[\frac{r_m}{Q_n}+m\omega\right]=\left[\frac{r_m}{Q_n}+\frac{K}{Q_n}\right]$$

donde r_m está definido por la congruencia

$$m\,P_n+\frac{Q_n}{2}\equiv r_m \pmod{Q_n};\quad 0\leqq r_m<Q.$$

En particular para $r_m=0$ y $r_m=Q_n-1$ tenemos condiciones

$$\left[\frac{K}{Q_n}\right]=0,\quad \left[1-\frac{1}{Q_n}+\frac{K}{Q_n}\right]=0$$

pues $m\omega<\frac{1}{Q_n}$ para $m=0, 1, 2, \ldots, Q_n-1$, de las cuales deducimos $K=0$ y entonces

$$\left[\frac{r_m}{Q_n}+m\omega\right]=0$$

hasta el punto de divergencia el cual será el mínimo entero m tal que

$$\frac{r_m}{Q_n}+m\omega\geqq 1.$$

Sea $r_m=Q_n-i$ de modo que

$$m\,P_n\equiv-\frac{Q_n}{2}-i \pmod{Q_n}$$

$$Q_{n-1}\,P_n\equiv-1 \pmod{Q_n}$$

de donde

$$m \equiv i\,Q'_{n-1} + \frac{Q_n}{2} \pmod{Q_n}$$

ó

$$m = h\,Q_n + i\,Q_{n-1} + \frac{Q_n}{2}.$$

Entonces la desigualdad

$$\frac{r_m}{Q_n} + m\omega \geqq 1$$

se reduce a

$$h + \frac{1}{2} \geqq i\,x_n.$$

Claro que el mínimo m corresponde a $i=1$ y al mínimo entero h tal que

$$h + \frac{1}{2} \geqq x_n = a_n + \vartheta; \quad 0 < \vartheta < 1 \ (*).$$

Sea primero $\vartheta > \frac{1}{2}$ lo que corresponde a $a_{n+1} = 1$; será entonces $h = a_n + 1$. Segundo si $\vartheta \leqq \frac{1}{2}$ y por tanto $a_{n+1} > 1$ es preciso que sea $h = a_n$. Luego el punto de divergencia será

$$Q_{n\pm1} + \frac{1}{2}\,Q_n \text{ en caso } Q_{n+2} > Q_{n+1} + Q_n$$

$$Q_{n\pm1} + \frac{3}{2}\,Q_n \text{ en caso } Q_{n+2} = Q_{n+1} + Q_n.$$

Sea ahora Q_n impar. Entonces poniendo

(*) En caso de x racional siempre desarrollámoslo en fracción contínua con número de elementos impar.

$$m P_n + \frac{Q_n-1}{2} \equiv r_m \pmod{Q_n}, \quad 0 \leqq r_m < Q_n$$

tenemos

$$\left[\frac{r_m}{Q_n} + \frac{1}{2Q_n} + m\omega\right] = \left[\frac{r_m}{Q_n} + \frac{K}{Q_n}\right]$$

para $m=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ Q_n-1$ con K propiamente ajustado y de estas condiciones deduciremos el valor de K. Busquemos primero el mínimo m tal que

$$\frac{r_m}{Q_n} + \frac{1}{2Q_n} + m\omega \geqq 1$$

o, poniendo $r_m = Q_n - i$,

$$m\omega \geqq \frac{2i-1}{2} \frac{1}{Q_n}$$

o en otra forma

$$m \geqq \frac{2i-1}{2} (Q_n x_n + Q_{n-1}) = \frac{2i-1}{2} Q_{n+1} + \frac{2i-1}{2} \frac{Q_n}{x_{n+1}}$$

Ya que

$$m P_n \equiv -\frac{Q_n-1}{2} - i \pmod{Q_n}$$

$$Q_{n+1} P_n \equiv -1 \pmod{Q_n}$$

sigue

$$m \equiv Q_{n+1} \left(\frac{Q_n-1}{2} + i\right) \pmod{Q_n}.$$

Ahora es preciso distinguir dos casos: Q_{n+1} par y Q_{n+1} impar.

1°. Sea Q_{n+1} par. Entonces

$$m \equiv \frac{2i-1}{2} Q_{n+1} \pmod{Q_n}$$

o

$$m = h\,Q_n + \frac{2i-1}{2} Q_{n+1}$$

y la desigualdad para m se reduce a

$$h \geqq \frac{2i-1}{2x_{n+1}}.$$

Claro que el mínimo m corresponde a $i=1$, $h=1$ y vale

$$m = Q_n + \frac{1}{2} Q_{n+1}.$$

Para $r_m = 0$ y $r_m = Q_n - 1$, siendo $m < Q_n$, tenemos condiciones

$$\left[\frac{K}{Q_n}\right] = 0, \quad \left[1 - \frac{1}{Q_n} + \frac{K}{Q_n}\right] = 0$$

y resulta $K=0$. Además el punto de divergencia que corresponde a $\frac{P_n}{Q_n}$ será

$$m = Q_n + \frac{1}{2} Q_{n+1}.$$

2º. Sea Q_{n+1} impar. Entonces

$$m = h\,Q_n + \frac{Q_n + (2i-1)Q_{n+1}}{2}$$

y

$$h + \frac{1}{2} \geqq \frac{2i-1}{2x_{n+1}}.$$

El mínimo m corresponde a $i=1$, $h=0$ y vale

$$m = \frac{Q_n + Q_{n+1}}{2} > Q_n.$$

Considerando otra vez $r_m = 0$ y $r_m = Q_n - 1$, siendo $m < Q_n$, hallamos de la misma manera que antes $K = 0$. El punto de divergencia que corresponde a $\frac{P_n}{Q_n}$ será

$$m = \frac{Q_n + Q_{n+1}}{2}.$$

En caso particular cuando

$$Q_{n+1} = Q_n + Q_{n-1}$$

será Q_{n-1} par y el punto de divergencia correspondiente a $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$

$$Q_n + \frac{3}{2} Q_{n-1}$$

sobrepasa

$$\frac{Q_n + Q_{n+1}}{2} = Q_n + \frac{1}{2} Q_{n-1}$$

de modo que en este caso $\frac{P_n}{Q_n}$ por cierto no es aproximación óptima. El caso de n par se trata del modo en todo análogo y llegamos a las mismas conclusiones excepto que $K = -1$ en caso de Q_n par.

14. — Examinemos ahora convergentes intermedias y limitémonos a la discusión detallada sólo del caso de n par. Sea primero

$$S = \mu Q_n + Q_{n-1}$$

impar. Si

$$r_m \equiv mR + \frac{S-1}{2} \pmod{S}; \quad 0 \leqq r_m < S$$

para hallar K tenemos condiciones

$$\left[\frac{r_m}{S}+\frac{1}{2S}+m\omega\right]=\left[\frac{r_m}{S}+\frac{K}{S}\right]$$

para $m=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ S-1$, donde

$$\omega=\frac{x_n-\mu}{S(Q_n x_n+Q_{n-1})}.$$

Puesto $r_m=S-i$ y teniendo en cuenta congruencias

$$mR\equiv-\frac{S-1}{2}-i\pmod S$$

$$Q_n R\equiv-1\pmod S$$

hallamos

$$r_m\equiv Q_n\left(\frac{S-1}{2}+i\right)\pmod S.$$

1°. Sea Q_n par; entonces resulta

$$m=hS+\frac{2i-1}{2}Q_n$$

y la desigualdad

$$\frac{r_m}{S}+\frac{1}{2S}+m\omega\geqq1$$

exige que sea

$$h\geqq\frac{2i-1}{2}\,\frac{1}{x_n-\mu}.$$

Ya que $x_n-\mu\geqq1$ el mínimo m corresponde a $i=1,\ h=1$ y vale

$$m=S+\frac{1}{2}Q_n.$$

Para $r_m = 0$ y $r_m = S - 1$ con $m < S$ tenemos

$$\left[\frac{K}{S}\right] = 0, \quad \left[1 - \frac{1}{S} + \frac{K}{S}\right] = 0$$

y por tanto $K = 0$. El punto de divergencia

$$S + \frac{1}{2} Q_n$$

siendo menor que $Q_{n+1} + \frac{1}{2} Q_n$, sigue que $\frac{R}{S}$ no es aproximación óptima. Teniendo en cuenta que con Q_n par debe ser S impar concluimos que convergentes intermedias entre $\frac{P_n}{Q_n}$ y $\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}$ no se encuentran entre aproximaciones óptimas si n es par y lo mismo vale para n impar.

2º. Sea Q_n impar. Entonces

$$m \equiv \frac{(2i-1)Q_n + S}{2} \pmod S.$$

La desigualdad

$$\frac{(2i-1)Q_n + S}{2} < S$$

tiene lugar si

$$2i - 1 \leqq \mu.$$

Por otra parte con

$$m = \frac{(2i-1)Q_n + S}{2}$$

de la desigualdad

$$\frac{r_m}{S} + \frac{1}{2S} + m\omega \geqq 1$$

resulta

$$2i-1 \leqq x_n - \mu \quad \text{o} \quad 2i-1 \leqq a_n - \mu.$$

Sea ρ el máximo entero tal que

$$2\rho - 1 \leqq \mu, \quad 2\rho - 1 \leqq a_n - \mu.$$

Entonces para $i=1, 2, \ldots, \rho$ y $m<S$ tenemos

$$\left[\frac{r_m}{S} + \frac{1}{2S} + m\omega\right] = 1$$

pero

$$\left[\frac{r_m}{S} + \frac{1}{2S} + m\omega\right] = 0$$

para $i \geqq \rho+1$. En particular, tomando $i=\rho$ y $i=\rho+1$, resulta

$$\left[1 - \frac{\rho}{S} + \frac{K}{S}\right] = 1, \quad \left[1 - \frac{\rho+1}{S} + \frac{K}{S}\right] = 0,$$

lo que necesita $K=\rho$. Veamos ahora cuál es el mínimo m tal que

$$\frac{r_m}{S} + \frac{1}{2S} + m\omega \geqq 1$$

siendo $r_m = S - i$ y $i \geqq \rho + 1$. Introduciendo

$$m = \frac{(2h-1)S + (2i-1)Q_n}{2}$$

esta desigualdad se reduce a

$$2h - 1 \geqq \frac{2i-1}{x_n - \mu}$$

y m resultará mínimo tomando $i=\rho+1$ y buscando el mínimo h tal que

$$2h - 1 \geqq \frac{2\rho+1}{x_n - \mu}.$$

Claro que $h=1$ sólo si

$$2\rho+1\leqq a_n-\mu$$

y en el caso contrario será $h=2$. En efecto

$$2\rho-1\leqq x_n-\mu,\quad 2\leqq 2(x_n-\mu)$$

de donde

$$2\rho+1\leqq 3(x_n-\mu).$$

Ya que, según hipótesis

$$S=\mu\, Q_n+Q_{n-1}\equiv 1 \pmod 2$$

sigue

$$\mu\equiv 1+Q_{n-1} \pmod 2.$$

También

$$a_n\equiv Q_{n+1}+Q_{n-1} \pmod 2$$

de modo que $a_n-\mu$ será par o impar, según que sea Q_{n+1} impar o par.

1º. Sea Q_{n+1} par. Suponiendo $\mu<a_n-\mu$ tenemos

$$2\rho-1\leqq\mu,\quad 2\rho-1<a_n-\mu$$

y por consiguiente

$$2\rho+1\leqq a_n-\mu$$

de modo que $h=1$ y

$$m=\frac{S+(2\rho+1)Q_n}{2}.$$

Si a_n es par, μ es impar y

$$2\rho-1=\mu,\qquad\qquad 2\rho+1=\mu+2<a_n-\mu+2.$$

Luego

$$m<\frac{(a_n-\mu+2)Q_n+S}{2}=Q_n+\frac{Q_{n+1}}{2}.$$

Pero $Q_n+\dfrac{1}{2}\,Q_{n+1}$ es el punto de divergencia correspondiente a $\frac{P_n}{Q_n}$; por tanto $\frac{R}{S}$ no es una aproximación óptima. Si a_n es impar, μ es par y entonces

$$2\rho - 1 = \mu - 1, \qquad 2\rho + 1 = \mu + 1 < a_n - \mu + 1$$

y

$$m < \frac{(a_n - \mu + 1)Q_n + S}{2} = \frac{Q_{n+1} + Q_n}{2} < Q_n + \frac{Q_{n+1}}{2}$$

y $\frac{R}{S}$ no puede ser una aproximación óptima. Sea ahora

$$\mu \geqq a_n - \mu, \quad 2\mu \geqq a_n.$$

Entonces

$$2\rho - 1 = a_n - \mu,$$

luego $2\rho + 1 = a_n - \mu + 2$, $h = 2$ y

$$m = \frac{(a_n - \mu + 2)Q_n + 3S}{2} = Q_n + \frac{Q_{n+1}}{2} + S.$$

Queda por examinar si esta cantidad es efectivamente el punto de divergencia correspondiente a $\frac{R}{S}$. Con tal objeto mostraremos que el mínimo m que satisface la desigualdad

$$\frac{r_m}{S} + \frac{1}{2S} + m\omega \geqq 2$$

y corresponde a $r_m = S - i$ con $i \leqq \rho$ será mayor que $Q_n + \frac{1}{2} Q_{n+1}$ $+ S$. En efecto, sustituyendo

$$m = \frac{(2h-1)S + (2i-1)Q_n}{2}$$

deducimos de la desigualdad precedente

$$2h-1 \geqq 2Q_n + \frac{2S+2i-1}{x_n-\mu}$$

y para que resulta m mínimo es preciso que $i=1$ y que sea $2h-1$ el mínimo entero impar tal que

$$2h-1 \geqq 2Q_n + \frac{2S+1}{x_n-\mu}.$$

Pero $2S+1 > 2\mu\, Q_n$, $x_n - \mu \leqq \mu + \vartheta$, $0 \leqq \vartheta < 1$, luego

$$\frac{2S+1}{x_n-\mu} > \frac{2\mu Q_n}{\mu+\vartheta} > Q_n$$

y

$$2h-1 > 3Q_n,$$

es decir $2h-1 \geqq 3Q_n+2$ y

$$\frac{(2h-1)S+Q_n}{2} \geqq \frac{(3Q_n+2)S+Q_n}{2}.$$

Comparando la parte derecha con

$$Q_n + \frac{Q_{n+1}}{2} + S$$

basta mostrar que

$$3Q_n\, S > Q_n + Q_{n+1}.$$

Pero

$$3S = 3\mu\, Q_n + 3Q_{n-1},\ Q_n + Q_{n+1} = \\ (a_n+1)\, Q_n + Q_{n-1} \leqq (2\mu+1)\, Q_n + Q_{n-1}.$$

y ya que

$$3\mu\, Q_n + 3Q_{n-1} > (2\mu+1)\, Q_n + Q_{n-1}$$

la desigualdad queda demostrada.

2°. Sea ahora Q_{n+1} impar y luego $a_n-\mu$ par. Sea primero $\mu<a_n-\mu$ y μ par.

Entonces

$$2\rho-1=\mu-1,\ 2\rho+1=\mu+1<a_n-\mu,$$

luego $h=1$ y

$$m=\frac{S+(2\rho+1)Q_n}{2}<\frac{(a_n-\mu)Q_n+S}{2}=\frac{Q_{n+1}}{2}.$$

Sea μ impar y $\mu+1<a_n-\mu$. Entonces

$$2\rho-1=\mu,\ 2\rho+1=\mu+2<a_n-\mu$$

luego $h=1$ y

$$m<\frac{(a_n-\mu)Q_n+S}{2}=\frac{Q_{n+1}}{2}.$$

Por ser

$$\frac{Q_n+Q_{n+1}}{2}$$

el punto de divergencia correspondiente a $\frac{P_n}{Q_n}$ en ambos casos discutidos no puede ser $\frac{R}{S}$ aproximación óptima. Si $\mu+1=a_n-\mu$ tenemos

$$2\rho+1=\mu+2>a_n-\mu,$$

luego $h=2$ y

$$m=\frac{(a_n-\mu+1)Q_n+3S}{2}=\frac{Q_{n+1}+Q_n}{2}+S.$$

Sea finalmente $\mu\geqq a_n-\mu$. Entonces

$$2\rho-1=a_n-\mu-1,\ 2\rho+1>a_n-\mu,$$

luego $h=2$ y

$$m = \frac{(a_n - \mu + 1) Q_n + 3S}{2} = \frac{Q_{n+1} + Q_n}{2} + S.$$

Vamos a mostrar que en caso $\mu + 1 \geqq a_n - \mu$

$$\frac{Q_{n+1} + Q_n}{2} + S$$

será efectivamente el punto de divergencia que corresponde a $\dfrac{R}{S}$.

De la misma manera que antes basta mostrar que

$$\frac{Q_{n+1} + Q_n}{2} < \frac{(2h-1)S + Q_n}{2} - S$$

o bien

$$(2h - 3)S > Q_{n+1}$$

donde $2h - 1$ es el mínimo número impar tal que

$$2h - 1 \geqq 2Q_n + \frac{2S+1}{x_n - \mu}$$

Ya que evidentemente $2h - 1 \geqq 2Q_n + 1$ tenemos $2h - 3 \geqq 5$ para $Q_n \geqq 3$. En caso $Q_n = 1$ por ser $2\mu + 1 \geqq a_n$ tenemos

$$2S + 1 = 2\mu + 1 + 2Q_{n-1} > \mu + \vartheta + 1 \geqq x_n - \mu,$$

luego

$$2h - 1 > 2 + 1 = 3,$$

es decir $2h - 1 \geqq 5$ y $2h - 3 \geqq 3$. Pero

$$3S = 3\mu\, Q_n + 3Q_{n-1} \geqq (2\mu + 1) Q_n + 3Q_{n-1} \geqq Q_{n+1} + 2Q_{n-1}$$

y la desigualdad

$$(2h - 3)S > Q_{n+1}$$

será por cierto satisfecha.