

## PARA LA GEOMETRIA DE LOS POLINOMIOS MONODIFRICOS (\*)

por ALEJANDRO TERRACINI  
(Universidad Nacional de Tucumán)

Ha sido estudiada recientemente por el señor Rufus P. Isaacs (1) una clase de funciones  $f(z)$  de una variable compleja  $z$ , que él llamó *monodífricas*, las cuales constituyen algo análogo a las funciones analíticas, en cuanto se reemplace la unicidad de la derivada por la igualdad de las razones incrementales correspondientes a incrementos unitarios en las direcciones positivas, real e imaginaria pura, del plano de Gauss:

$$f(z+1) - f(z) = \frac{f(z+i) - f(z)}{i} (= \Delta f(z)).$$

Si en lugar de los incrementos  $1$  e  $i$  se tomaran  $h$  e  $ih$ , siendo  $h$  una constante compleja arbitraria, que puede llamarse *abertura*, se obtendrían las funciones  $h$ -monodífricas, cuya teoría se reduce a la de las funciones monodífricas mediante un cambio de variable.

En particular pueden considerarse *polinomios* monodífricos. El señor Isaacs ha dado a conocer la forma más general de un polinomio monodífrico de grado  $n$ , a saber:

$$a_0 z^{(n)} + a_1 z^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} z + a_n.$$

---

(\*) Trabajo presentado en las *Primeras Jornadas Matemáticas Argentinas*, realizadas en Buenos Aires y La Plata del 27 al 29 de julio de 1945.

(1) *A Finite Difference Function Theory*, Rev. de Mat. y Fis. teor. de la Universidad Nacional de Tucumán, vol. 2, 1941.

Las  $a_0, a_1, \dots, a_n$  indican constantes complejas arbitrarias (la primera no nula, si el polinomio debe tener efectivamente grado  $n$ ). En cuanto a  $z^{(n)}$ , que desempeña un papel análogo al de la potencia  $n$ -ésima de  $z$ , y puede por ejemplo definirse por recurrencia por las condiciones

$$\Delta z^{(n)} = n z^{(n-1)} \quad (n \geq 1); \quad z^{(0)} = 1; \quad 0^{(n)} = 0 \quad (n \geq 1),$$

su expresión explícita es

$$z^{(n)} = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} i^{n-j} x(x-1) \dots (x-j+1) y(y-1) \dots (y-n+j+1).$$

No es difícil demostrar que una ecuación monodífrica de grado  $n$  siempre admite cierto número  $\sigma$  de raíces complejas; no menos que  $n$ , pero a veces más: y precisamente,

$$n \leq \sigma \leq n^2.$$

Es éste un ejemplo de las distorsiones que sufre la teoría de las funciones analíticas al pasar a la de las monodífricas. Creo que el estudio de las ecuaciones monodífricas puede dar lugar a algunos resultados interesantes. Expondré brevemente a continuación algunos de los más elementales<sup>(1)</sup>.

Aunque se trate de cosas muy elementales, mi curiosidad geométrica ha sido estimulada en primer término por el deseo de darme cuenta de qué son y de cómo están distribuidos en el plano de Gauss los grupos  $G_4$  de cuatro puntos representativos de una ecuación monodífrica de segundo grado

$$z^{(2)} + \beta z + \gamma = 0, \tag{1}$$

en cuanto por supuesto se trate de una ecuación que admite efectivamente *cuatro* raíces. La expresión explícita de  $z^{(2)}$  permite

(<sup>1</sup>) Una exposición más completa de la mayor parte de los resultados que exponemos a continuación aparecerá, con el título "*Un primer aporte a la geometría de los polinomios monodífricos*" en las Actas de la Academia Nacional de Ciencias Exactas Físicas y Naturales de Lima.

sacar de inmediato la conclusión que los cuatro puntos de cada  $G_4$  son siempre vértices de un cuadrángulo ortogonal (cuadrángulo completo  $ABCD$ , cuyos pares de lados opuestos son perpendiculares, es decir cuyos vértices son vértices y ortocentro de un triángulo). Sin embargo los cuadrángulos ortogonales son  $\infty^6$ , mientras que los  $G_4$  son  $\infty^4$ . De modo que se comprende que los cuadrángulos ortogonales correspondientes a los  $G_4$  cumplen con ciertas condiciones ulteriores. Pues bien, dichas condiciones necesarias y suficientes pueden expresarse en la forma siguiente.

La primera condición vincula, por decirlo así, el tamaño de los cuadrángulos ortogonales representativos, en el sentido de que para cada uno de ellos el círculo circunscrito al triángulo diagonal, o círculo de Feuerbach, debe tener radio, igual a  $\sqrt{2}/4$ : en forma equivalente puede decirse que el círculo circunscrito p. e. al triángulo  $ABC$  debe tener radio  $\sqrt{2}/2$ . Es claro que esta primera limitación encuentra su razón de ser en la *apertura*, igual a 1, de los polinomios monodífricos considerados.

La segunda limitación, en cambio, tiene un alcance, diré así, angular, y depende en definitiva del papel privilegiado que desempeña la dirección del eje  $x$  en la definición de las funciones monodífricas. Para enunciarla, conviene partir de la observación que en cualquier cuadrángulo ortogonal, si se llaman  $M_{AB}$ , etc., los puntos medios de los 6 lados, y se fija una recta orientada cualquiera  $r$ , las seis sumas de ángulos

$$2(r, AB) + (r, M_{AB} M_{CD}); \quad 2(r, AC) + (r, M_{AC} M_{BD});$$

$$2(r, AD) + (r, M_{AD} M_{BC});$$

$$2(r, CD) + (r, M_{CD} M_{AB}); \quad 2(r, BD) + (r, M_{BD} M_{AC});$$

$$2(r, BC) + (r, M_{BC} M_{AD})$$

son todos congruos entre sí mod  $360^\circ$ : se entiende que la recta  $M_{AB} M_{CD}$  se orienta desde el primer punto hacia el segundo, etc. Rara entendernos, podemos llamar al valor común de esas sumas *anomalía del cuadrángulo ortogonal respecto al eje  $r$* . Pues bien, la segunda condición consiste en que, con respecto al eje  $x$ , cada  $G_4$  brinda un cuadrángulo ortogonal cuya anomalía es constantemente de  $135^\circ$ .

A la descripción de nuestros  $\infty^4$  cuadrángulos ortogonales puede darse una forma más sintética, si para cada cuadrángulo ortogonal, se introduce la correspondiente hipocicloide tricúspide de Steiner (hipocicloide inscrita en el cuadrángulo, es decir, tangente a sus seis lados). Las hipocicloides de Steiner son  $\infty^4$  (lo mismo como los triángulos equiláteros  $T$  integrados por sus cúspides) y a cada una pueden circunscribirse  $\infty^2$  cuadrángulos ortogonales. Pues bien, los cuadrángulos ortogonales correspondientes a las ecuaciones monodífricas pueden caracterizarse en base únicamente a sus hipocicloides de Steiner, en cuanto es necesario y suficiente que el triángulo equilátero  $T$  tenga cierto tamaño bien determinado (el radio del círculo circunscrito debe ser  $3\sqrt{2}/4$ ) y esté colocado de manera que la semirecta que va de su centro a un vértice tenga una anomalía de  $-135^\circ$ . Se tienen así  $\infty^2$  hipocicloides de Steiner  $\varphi$ , que se deducen todas una de otra por traslación: sus cuadrángulos ortogonales circunscritos son los  $\infty^4$  representativos de las ecuaciones monodífricas. El resultado es sencillo también desde el punto de vista algebraico, debido a que las  $\infty^2$  hipocicloides  $\varphi$ , como envolventes, integran un sistema lineal.

También he conseguido algunos resultados relativos a las involuciones cuadráticas monodífricas, logradas al combinar linealmente la (1) y otra ecuación análoga:

$$\lambda(z^{(2)} + \beta z + \gamma) + \mu(z^{(2)} + \beta_1 z + \gamma_1) = 0.$$

Una involución  $I$  es por lo tanto cierto conjunto  $\infty^2$  de cuadrángulos ortogonales (completado por los pares de puntos representados por la ecuación anterior, para los valores de  $\lambda/\mu$  que llevan a dos solas raíces). Prescindiendo del caso trivial en el cual el punto impropio es punto base, se encuentran esencialmente dos tipos de involuciones monodífricas. Hay un tipo *particular* cuando el punto impropio es unido: en tal caso los cuadrángulos ortogonales que integran la involución son los circunscritos a una misma hipocicloide  $\varphi$ . En cambio, en el caso *general*, cuadrángulos distintos de la involución llevan a hipocicloides  $\varphi$  igualmente distintas. La posición mutua de los cuadrángulos ortogonales de la involución puede describirse así. En general, dos cuadrángulos ortogonales  $Q, Q'$  no circunscritos a

una misma hipocicloide de Steiner dan lugar a un punto que puede llamarse central, el cual resulta de la forma siguiente: dos hipérbolas equiláteras circunscriptas a  $Q, Q'$  y con asíntotas paralelas, tienen en común una cuerda propia, que al variar esas asíntotas, pasa por un punto fijo: es ese el punto que llamamos central. Pues bien, los  $\infty^2$  cuadrángulos de la involución  $I$  tienen, dos a dos, un mismo punto central.

En una involución cuadrática monodífrica  $I$  siempre existen  $\infty^1 G_4$ , cada uno de los cuales tiene un punto por lo menos doble. En el caso que hemos llamado particular, el lugar de los puntos dobles propios se reduce al círculo de Feuerbach común a los  $\infty^2$  cuadrángulos ortogonales de la involución. En cambio, en el caso general ese lugar es una cuártica  $E^4$  (con infinitos puntos reales) bitangente a la recta impropia. Su género es generalmente igual a 3, aunque en casos especiales puede adquirir valores menores, lo que ocurre en el ejemplo particularmente sencillo brindado por una involución cuadrática monodífrica con un punto base  $O$  (es decir por el conjunto de los  $\infty^2 G_4$  entre cuyos puntos figura el punto dado  $O$ ). En este caso la curva  $E^4$  tiene un punto triple en  $O$ , y es la «rosa de tres hojas» que al tomar  $O$  como polo tiene la ecuación polar

$$\rho = \sqrt{2} \operatorname{sen} 3(75^\circ - \vartheta);$$

esta curva, junto con su simétrica  $J^4$  respecto a  $O$  (la cual es el lugar de los puntos ulteriores de los  $G_4$  del plano de Gauss que

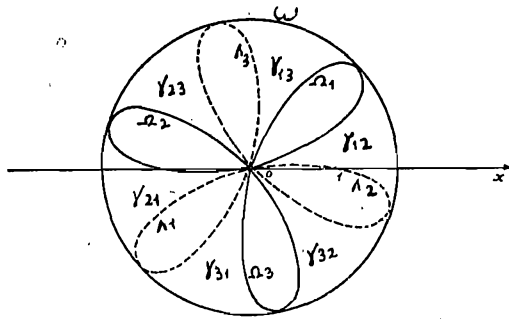


Fig. 1

aceptan  $O$  como punto por lo menos doble), permite formarse una idea de conjunto de la distribución de las ternas de puntos que, junto con  $O$ , integran los  $\infty^2 G_4$ . Considerando también el círculo  $\omega$  de centro  $O$  circunscrito a las curvas  $E^4$  y  $J^4$ , y llamando, como en la fig. 1,  $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$  los tres óvalos que integran  $E^4$ ,  $A_1, A_2, A_3$  los que integran  $J^4$ , y  $\gamma_{lm}$  la región comprendida entre  $\omega$ ,  $\Omega$  e  $A_m$  ( $l, m = 1, 2, 3$ ;  $l \neq m$ ), resulta que para cada  $G_4$  integrado por  $A$  y tres puntos ulteriores distintos de  $A$  y entre sí, dichos tres puntos ulteriores pueden dar lugar únicamente a uno de los dos casos siguientes: a) un punto está situado

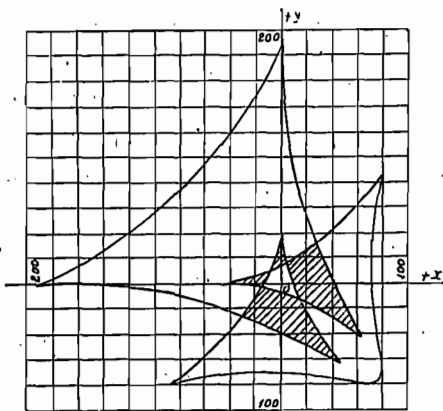


Fig. 2

dentro de un óvalo  $\Omega_l$  y los dos restantes uno en cada uno de las regiones  $\gamma_{lm}$  adyacentes; b) los tres puntos están situados dentro de las tres regiones  $A_1, A_2, A_3$ , uno en cada región.

Terminaré con unos resultados sobre el número de las raíces  $n$ -ésimas monodígrafas de un dado número complejo  $M$ , es decir, sobre las raíces de la ecuación

$$z^{(n)} = M,$$

para  $n=2$  o  $n=3$ . ¿Cómo depende de  $M$  el número  $\sigma$  de esas raíces? Para  $n=2$ , resulta que cuando el punto  $M$ , en el plano

de Gauss, es exterior a cierta hipocicloide de Steiner perfectamente determinada (de tamaño y posición distintas de las hipocicloides  $\varphi$  de las cuales he hablado anteriormente<sup>(1)</sup>), existen tan sólo dos raíces cuadradas monodífricas de  $M$ ; cuando es interior, existen cuatro distintas entre sí. Para  $n=3$ , el resultado depende de la posición del punto  $M$  respecto a la línea representada en la figura 2, (en donde los números indican centésimos): la línea divide el plano de Gauss en ocho regiones: si el punto  $M$  pertenece a la más interior, la que contiene el origen, se tiene  $\sigma=9$ ; para  $M$  comprendido dentro cada una de las 4 regiones (rayadas) colindantes con la anterior  $\sigma=7$ ; en las dos restantes regiones no completamente exteriores respecto a la curva se tiene  $\sigma=5$ ; y finalmente en el exterior de la curva se tiene  $\sigma=3$ .

---

(1) Dicha hipocicloide es la que tiene sus cúspides en los puntos representativos de los valores  $s = i/2$ ;  $s = (\pm 3\sqrt{3} - i)/16$ .