UNAS FORMULAS INTEGRALES REFERENTES A CUERPOS CONVEXOS

por L. A. SANTALÓ

1. RESUMEN DE RESULTADOS. — Fijada una esfera de radio unidad con centro el origen de coordenadas, una dirección cualquiera del espacio queda determinada dando las coordenadas ϑ, φ (colatitud y longitud) del punto P de la esfera que es extremo del radio paralelo a dicha dirección. El elemento de área de la esfera, correspondiente a este punto vale

$$dP = \operatorname{sen} \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi. \tag{1.1}$$

Una recta G del espacio puede determinarse por el punto (ϑ, φ) que fija su dirección, más las coordenadas x, y del punto en que G es cortada por un plano normal a la misma; las coordenadas x, y se refieren a un sistema cartesiano ortogonal de dicho plano normal. Entonces, para «medir» conjuntos de rectas G del espacio, es sabido que se toma la integral, extendida al conjunto, de la forma diferencial

$$dG = \operatorname{sen} \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi \, dx \, dy = dP \, dx \, dy \tag{1.2}$$

que se llama «densidad» para conjuntos de rectas [1].

Sea K un cuerpo convexo del espacio. Se llama «plano de apoyo» de K a todo plano que tiene algún punto común con K sin atravesarlo, es decir, dejando a K todo de un mismo lado. Por cada recta G que no corta a K, pasan dos planos de apoyo de K. Las rectas G para las cuales estos planos de apoyo tienen con K más de un punto de contacto, forman un con-

---

(1) Ver, por ejemplo, R. DELTHEIL, *Probabilités géométriques*, Paris, 1926, pág. 89. W. BLASCHKE, *Vorlesungen über Integralgeometrie*, Leipzig und Berlin, 1937, pág. 66.

junto de medida nula (entendida la medida como la integral de (1.2)) y no influirán en nuestras consideraciones. Para las demás rectas, cada plano de apoyo de K que pasa por ellas tiene un punto de contacto único. Llamemos T_1 y T_2 a las distancias de los puntos de contacto de los dos planos de apoyo de K que pasan por G a la misma recta G. Llamemos, además, ω al ángulo que forman estos dos planos de apoyo de K que pasan por G, tomando el ángulo que comprende a K en su interior (fig. 1).

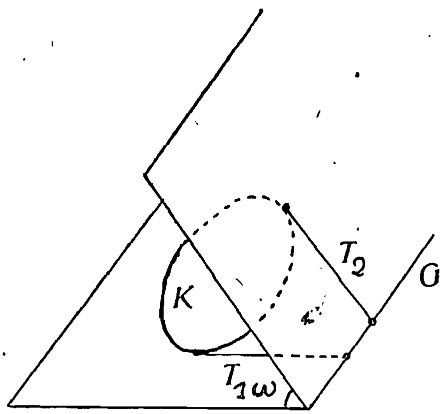

Fig. 1.

Las fórmulas que queremos demostrar en esta nota son, con las notaciones dichas, las siguientes, en todas las cuales la integración se considera *extendida a todas las rectas del espacio que no cortan a* K:

(a) $$\int \frac{\operatorname{sen}^2\omega}{T_1 T_2}\, dG = 8\pi^2,$$

que se generaliza, para $m > 1$, en las siguientes

(b) $$\int \frac{\operatorname{sen}^{2m}\omega}{T_1 T_2}\, dG = 8\,\frac{(2m-2)\,(2m-4)\ldots 4.2}{(2m-1)\,(2m-3)\ldots 3.1}\,\pi^2$$

(c) $$\int \frac{\operatorname{sen}^{2m+1}\omega}{T_1 T_2}\, dG = 4\,\frac{(2m-1)\,(2m-3)\ldots 3}{2m\quad (2m-2)\ldots 2}\,\pi^3.$$

las cuales pueden condensarse en la fórmula única

$$\int \frac{\operatorname{sen}^n \omega}{T_1 T_2}\, dG = 4\, \pi^{5/2}\, \frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{\Gamma(\frac{n+1}{2})}\,.$$

Llamando M a la integral de curvatura media de K (Ver nº. 2), vale también

$$\text{(d)} \qquad \int (2\,\omega - \operatorname{sen} 2\,\omega)\left(\frac{1}{T_1}+\frac{1}{T_2}\right) dG = 16\,\pi\, M.$$

Si K tiene curvatura de Gauss k distinta de cero en cada punto, llamando k_1, k_2 a los valores de esta curvatura en los puntos de contacto de los planos de apoyo de K que pasan por G, siendo F el área de K, se tiene también

$$\text{(e)} \qquad \int (2\,\omega - \operatorname{sen} 2\,\omega)\left(\frac{1}{T_1 k_1}+\frac{1}{T_2 k_2}\right) dG = 4\, M\, F.$$

Además de estas, en el nº. 3, II, obtenemos todavía otras fórmulas del mismo tipo, como las (3.10) y (3.11).

Todas estas fórmulas vienen a ser la generalización al espacio de otras conocidas para figuras convexas del plano, obtenidas por Crofton y por Lebesgue [2].

2. Fórmulas conocidas. — Para la demostración de las fórmulas enunciadas, necesitaremos algunas fórmulas auxiliares conocidas, que vamos a enunciar.

Sean P_1, P_2 dos puntos de la superficie de la esfera unidad. Ellos determinarán un círculo máximo C, cuyo polo representaremos por P. Para determinar el conjunto de los dos puntos P_1, P_2, en lugar de las cuatro coordenadas $\vartheta_i, \varphi_i (i=1, 2)$, se pueden dar las coordenadas ϑ, φ de P, más los ángulos α_1, α_2 que fijan la posición de P_1 y P_2 sobre el círculo C, es decir, las distancias angulares de dichos puntos a un punto fijo de

(²) H. Lebesgue, *Exposition d'un mémoire de M. W. Crofton*, Nouvelles Annales de mathématiques, vol. 12, 1912, págs. 481-502.

(³) Ver W. Blaschke, *loc. cit.*, pág. 78.

C. Se demuestra entonces que vale la siguiente fórmula diferencial (3)

$$dP_1\, dP_2 = |\mathrm{sen}\,(\alpha_1 - \alpha_2)|\, d\alpha_1\, d\alpha_2\, dP, \tag{2.1}$$

donde los dP_i tienen los valores (1.1).

Otra fórmula que necesitaremos es la siguiente, que puede obtenerse como simple ejercicio de cálculo integral

$$\int_0^\pi \int_0^\pi |\mathrm{sen}\,(\alpha_1 - \alpha_2)|^n d\alpha_1\, d\alpha_2 = \begin{cases} \dfrac{(2m-1)\,(2m-3)\ldots 3}{2m\quad (2m-2)\ldots 2}\pi^2, & \text{si } n = 2m \\ 2\dfrac{(2m-2)\,(2m-4)\ldots 4.2}{(2m-1)\,(2m-3)\ldots 3.1}\pi, & \text{si } n = 2m-1. \end{cases} \tag{2.2}$$

Para la obtención de las fórmulas (d) y (e) necesitaremos recordar como debe tomarse la «medida» de un conjunto de planos del espacio. Fijado un punto O, un plano E del espacio queda determinado dando su distancia h al punto O y la dirección de su normal, la cual estará determinada por el punto P_E correspondiente de la esfera de radio unidad.

Para medir un conjunto de planos, se toma entonces la integral, extendida al conjunto, de la expresión diferencial

$$dE = dP_E\, dh \tag{2.3}$$

siendo dP_E el elemento de área (1.1) de la esfera unidad correspondiente a la dirección de la normal al plano E.

La medida del conjunto de todos los planos que cortan a un cuerpo convexo K, es un invariante M del mismo que, cuando K tiene radios principales de curvatura R_1, R_2 distintos de cero en cada punto, coincide con la integral de curvatura media, o sea,

$$\int_{K.E \neq 0} dE = M = \frac{1}{2}\int_K \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) ds \tag{2.4}$$

siendo ds el elemento de área de K (4). Cuando K tiene pun-

(4) Ver DELTHEIL, *loc. cit.*, pág. 95. BLASCHKE, *loc. cit.*, pág. 65 y 72.

tos o líneas con radios principales de curvatura no definidos o iguales a cero, M no puede definirse por la última integral (2.4), pero lo seguiremos llamando *integral de curvatura media* de K.

3. Demostración de las fórmulas enunciadas en el Nº 1. — I. Consideremos una figura convexa plana K^* y un punto exterior Q. Sean A y B los puntos de contacto de las rectas de apoyo de K que pasan por Q y ω el ángulo que estas rectas forman entre sí. Pongamos $T_1 = QA, T_2 = QB$ (fig. 2). Las rec-

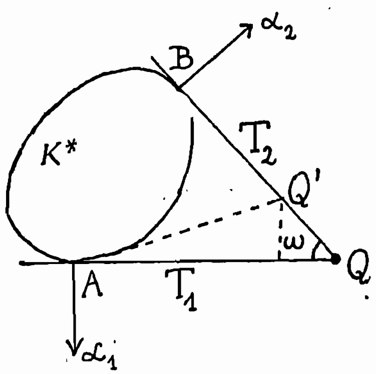

Fig. 2.

tas de apoyo que pasan por Q, y por tanto también este punto Q, quedan determinadas dando las direcciones α_1, α_2 de sus normales; suponiendo Q determinado por α_1, α_2 queremos hallar la expresión del elemento de área del plano, correspondiente al punto Q. Basta observar para ello que al variar α_1 a $\alpha_1 + d\alpha_1$, el punto Q pasa a un punto Q' sobre QB tal que

$$QQ' . \operatorname{sen} \omega = T_1 \, d\alpha_1. \tag{3.1}$$

Análogamente, supuesta la recta QA fija y haciendo variar α_2 a $\alpha_2 + d\alpha_2$, el punto Q pasa al punto Q'' (no dibujado en la figura) sobre QA tal que

$$QQ'' \operatorname{sen} \omega = T_2 \, d\alpha_2. \tag{3.2}$$

Como el elemento de área del plano correspondiente al punto Q vale $dQ = QQ' \,.\, QQ'' \operatorname{sen} \omega$, de (3.1) y (3.2) se deduce

$$dQ = \frac{T_1 T_2}{\operatorname{sen} \omega} \, d\alpha_1 \, d\alpha_2 \tag{3.3}$$

y también

$$d\alpha_1 \, d\alpha_2 = \frac{\operatorname{sen} \omega}{T_1 T_2} \, dQ. \tag{3.4}$$

Supongamos ahora un cuerpo convexo K del espacio y una recta G que no lo corta. Consideremos los planos de apoyo de K que pasan por G. Proyectemos toda la figura sobre un plano perpendicular a G; sea K^* la proyección de K y Q el punto en que se proyecta la recta G. Las distancias T_1, T_2 que figuran en las fórmulas del nº. 1, son ahora las longitudes T_1, T_2 de las rectas de apoyo de K^* que pasan por Q.

Los puntos P_1 y P_2 de la esfera unidad, correspondientes a las direcciones de las normales a K en los puntos de contacto de los planos de apoyo que pasan por G, pueden determinarse, (nº. 2), por el punto P, polo del círculo máximo que ellos determinan y que coincide con la dirección de G, más los ángulos α_1, α_2 que son ahora los mismos que en la proyección determinan las normales a las rectas de apoyo de K^* trazadas por Q.

De (2.1) y (3.4) se deduce por tanto (puesto que $\operatorname{sen} \omega = |\operatorname{sen}(\alpha_1 - \alpha_2)|$),

$$dP_1 \, dP_2 = \frac{\operatorname{sen}^2 \omega}{T_1 T_2} \, dQ \, dP.$$

Pero, según (1.2), puesto que $dx \, dy = dQ$, se tiene

$$dP_1 \, dP_2 = \frac{\operatorname{sen}^2 \omega}{T_1 T_2} \, dG. \tag{3.5}$$

Integremos ambos miembros de esta expresión a todos los pares de puntos P_1, P_2 de la esfera unidad. El primer miembro, siendo $\int dP_1 = \int dP_2 = 4\pi$, nos da $16\pi^2$. Si el segundo miembro lo integramos a todas las rectas G del espacio que no cortan a K, puesto que permutando entre sí P_1 y P_2 se obtiene la misma recta G, el resultado será igual al del primer miembro dividido por 2, o sea, igual a $8\pi^2$. Queda, por tanto,

$$\int \frac{\operatorname{sen}^2 \omega}{T_1 T_2} dG = 8\pi^2 \tag{3.6}$$

extendida la integración a todas las rectas G exteriores a K. Es la fórmula (a).

Para obtener las fórmulas (b) y (c), basta multiplicar ambos miembros de (3.5) por $\operatorname{sen}^{n-1}\omega$, e integrar a todos los pares de puntos P_1, P_2 de la esfera unidad. En el primer miembro, teniendo en cuenta que $\operatorname{sen}\omega = |\operatorname{sen}(\alpha_1 - \alpha_2)|$ y (2.1), resulta

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} |\operatorname{sen}(\alpha_1 - \alpha_2)|^n d\alpha_1 d\alpha_2 \int dP =$$

$$2\pi \cdot 4 \int_0^{\pi}\int_0^{\pi} |\operatorname{sen}(\alpha_1 - \alpha_2)|^n d\alpha_1 d\alpha_2 \tag{3.7}$$

habiendo integrado dP sobre una semiesfera, puesto que a puntos opuestos corresponde el mismo círculo máximo C. Dividiendo por 2, como antes, la expresión (3.7) para tener en cuenta que al permutar entre sí los puntos P_1, P_2 se obtiene la misma recta G, resulta

$$\int \frac{\operatorname{sen}^{n+1}\omega}{T_1 T_2} dG = 4\pi \int_0^{\pi}\int_0^{\pi} |\operatorname{sen}(\alpha_1 - \alpha_2)|^n d\alpha_1 d\alpha_2$$

estando la primera integración extendida a todas las rectas G que no cortan a K. Aplicando (2.2) resultan de aquí inmediatamente las fórmulas (b) y (c).

II. Si el cuerpo convexo K tiene en todos sus puntos curvatura de Gauss k distinta de cero, llamando ds al elemento de área de la superficie de K y siendo dP el elemento de área de la esfera unidad en el punto correspondiente a la normal a K en P, es

$$dP = k\, ds. \tag{3.8}$$

Por tanto, llamando k_1, k_2 a los valores de la curvatura de Gauss de K en los puntos de contacto de los planos de apoyo que pasan por G y ds_1, ds_2 a los elementos de área correspondientes a los mismos puntos, en lugar de (3. 5) se puede poner

$$ds_1\, ds_2 = \frac{\operatorname{sen}^2 \omega}{k_1 k_2 T_1 T_2} dG. \tag{3. 9}$$

De aquí, integrando ds_1, ds_2 a toda el área F de K y dividiendo por 2 para tener en cuenta que al permutar los puntos entre sí resulta la misma G, se tiene

$$\int \frac{\operatorname{sen}^2 \omega}{k_1 k_2 T_1 T_2} dG = \frac{1}{2} F^2, \tag{3. 10}$$

estando la integración, como siempre, extendida a todas las rectas G exteriores a K.

Si en (3. 5) se sustituye únicamente dP_1 por $k_1\, ds_1$ y se mantiene dP_2, al integrar ds_1 a toda la superficie de K y dP_2 a toda la esfera unidad, y permutando luego P_1 y P_2 para mantener la simetría en el segundo miembro, resulta

$$\int \left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}\right) \frac{\operatorname{sen}^2 \omega}{T_1 T_2} dG = 4 \pi F, \tag{3. 11}$$

extendida la integración a todas las G que no cortan a K.

III. Para demostrar las fórmulas (d) y (e) supongamos el conjunto de un plano secante E_s y un plano de apoyo E_a de K. Sea G la recta en que ambos planos se cortan y T_1 la distancia del punto de contacto de E_a a la recta G.

Proyectemos toda la figura sobre un plano perpendicular a G. Como antes, sea Q el punto en que G corta a este plano sección y K^* la proyección de K (fig. 3). Sea O^* la proyección del punto fijo O que sirve para medir la distancia h al plano E_s (nº. 2). La recta QA, sección del plano E_a, queda determinada por el ángulo α_1 que forma su normal con una dirección fija. La recta QB, sección del plano E_s, queda determinada por la dirección α_2 de su normal y la distancia h a O^*. Al variar α_1 a $\alpha_1 + d\alpha_1$, manteniéndose fijos h y α_2, el punto Q pasará a un punto Q' tal que

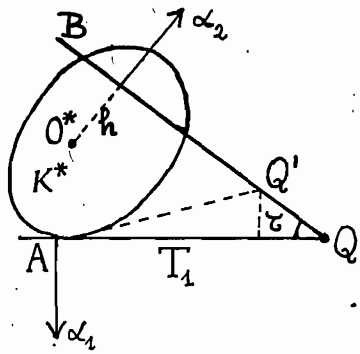

Fig. 3.

$$T_1\, d\alpha_1 = QQ' \operatorname{sen} \tau, \tag{3.12}$$

siendo τ el ángulo de los dos planos E_s y E_a. Si se suponen fijos α_1 y α_2 y varía h a $h+dh$, el punto Q pasa al punto Q'' (no dibujado en la figura) situado sobre QA, tal que

$$dh = QQ'' \operatorname{sen} \tau, \tag{3.13}$$

y si h y α_1 se mantienen fijos y se hace variar α_2 a $\alpha_2 + d\alpha_2$, es

$$d\alpha_2 = d\tau. \tag{3.14}$$

De (3.12), (3.13) y (3.14) se deduce, siendo el elemento de área del plano $dQ = QQ' \,.\, QQ'' \,.\operatorname{sen} \tau$,

$$dh\, d\alpha_1\, d\alpha_2 = \frac{\operatorname{sen} \tau}{T_1}\, dQ\, d\tau. \tag{3.15}$$

Multipliquemos ahora ambos miembros de (3.15) por el elemento de área de la esfera unidad dP, correspondiente a la dirección de la recta G. Siendo $\operatorname{sen} \tau = \operatorname{sen}(\alpha_1 - \alpha_2)$, según (2.1) y (1.2), resulta

$$dh\, dP_1\, dP_2 = \frac{\operatorname{sen}^2 \tau}{T_1}\, dG\, d\tau \tag{3.16}$$

siendo P_1 el punto de la esfera unidad correspondiente a la normal a E_a y P_2 el correspondiente a la normal a E_s.

De (3.16) y (2.3) se deduce

$$dP_1 \, . \, dE_s = \frac{\operatorname{sen}^2 \tau}{T_1} dG \, d\tau. \tag{3.17}$$

Integremos finalmente estas expresiones equivalentes, a todos los planos E_s que cortan a K y a todos los puntos P_1 de la esfera unidad. El primer miembro, según (2.4), da

$$\int dP_1 \, dE_s = \int dP_1 \int dE_s = 4 \pi M. \tag{3.18}$$

En cuanto al segundo miembro de (3.17), habrá que integrarlo a todas las rectas G exteriores a K y, para cada G, a los valores de τ comprendidos entre 0 y ω, siendo como antes ω el ángulo que forman entre si los dos planos de apoyo de K que pasan por G. Siendo

$$\int_0^\omega \operatorname{sen}^2 \tau \, d\tau = \frac{1}{4} (2\omega - \operatorname{sen} 2\omega), \tag{3.19}$$

resulta que la integral del segundo miembro de (3.17) extendida a todas las rectas G exteriores a K, poniendo de manifiesto para cada G los valores T_1 y T_2 correspondientes a sus dos planos de apoyo, vale

$$\frac{1}{4} \int (2\omega - \operatorname{sen} 2\omega) \left(\frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} \right) dG \tag{2.20}$$

extendida la integración a todas las rectas G que no cortan a K.

Igualando (3.18) y (3.20) se obtiene la fórmula (d).

Si en (3.17) se pone $dP_1 = k_1 \, ds_1$ (según (3.8)), se puede escribir

$$ds_1 \, dE_s = \frac{\operatorname{sen}^2 \tau}{k_1 T_1} dG \, d\tau,$$

e integrando ambos miembros a todos los planos E_s que cortan a K y a toda el área F de K, resulta, teniendo en cuenta (3.19), la última fórmula (e) enunciada.

INSTITUTO DE MATEMÁTICA
ROSARIO