EN TORNO DEL FOTON EN UN MEDIO MATERIAL

por J. Würschmidt
Instituto de Física, Universidad de Tucumán

Summary: It is confirmed that one has to atribute to a photon in a material medium the energy $h\nu$ and the momentum $h\nu/v$, where v denotes the velocity of light in the medium. — It is not indispensable to atribute to the photon a velocity larger than the velocity of light, nor an imaginary mass, if we distinguish between the total energy $h\nu$, the "cinetic" energy $E = h\nu\ n^2$ and the potential energy $h\nu\ (1-n^2)$. The apparent mass of the photon becomes than n^2 larger than it is in vacuum, its velocity being the same as the one of wave propagation in the medium.

I. *Reflexión de un corpúsculo y de un fotón en un espejo móvil.*

Investigando la reflexión de una masa m, de gran velocidad v, en un espejo que se mueve con la velocidad u (ángulo entre u y la normal de incidencia en el lado del corpúsculo incidente: χ), se encontró la siguiente ley de reflexión (1):

$$(1,1) \qquad (v_1)_x = v_1 \cos\varphi_1 = \frac{v_x + 2u_x + \beta_x^2\, v_x}{1 + \frac{2\,u_x\,v_x}{c^2} + \beta_x^2}$$

$$(v_1)_y = v_1 \operatorname{sen}\varphi_1 = \frac{v_y(1-\beta_x^2)}{1 + \frac{2\,u_x\,v_x}{c^2} + \beta_x^2}$$

significando φ el ángulo de incidencia, φ_1 el ángulo de reflexión y v_1 la velocidad después de la reflexión.

Despreciando los términos con c^2 en el denominador y $\beta_x^2 = \frac{u_x^2}{c^2}$, tenemos la *ley balística* de reflexión, mientras que para $v \rightarrow c$ resulta la ley de reflexión de la luz en el vacío que se puede escribir en la forma de *Titow*:

$$(1,2) \qquad \frac{1+\beta_x \cos\varphi}{\operatorname{sen}\varphi} = \frac{1-\beta_x \cos\varphi_1}{\operatorname{sen}\varphi_1}$$

o también en la forma de *Laue*:

$$(1,3) \qquad \frac{\operatorname{tg}\frac{\varphi_1}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}} = \frac{1-\beta_x}{1+\beta_x}.$$

Con respecto a la luz que se propaga en un medio material con una velocidad $v = \frac{c}{n}$ siendo n el índice de refracción del mismo, encontré en un trabajo del año 1945 ([2]) en el cual se estudiaba el efecto *Doppler* en su relación con la aberración de la luz. y la presión de la radiación, que la velocidad v_2 de la luz reflejada y el ángulo de reflexión φ_2 se determinan por:

$$(1,4) \qquad \frac{(v_2)_x}{v_2^2} = \frac{1}{v_2} \cos\varphi_2 = \frac{\frac{v_x}{v^2} + \frac{2u_x}{c^2} + \beta_x^2 \frac{v_x}{v^2}}{1 + \frac{2u_x v_x}{v^2} + \beta_x^2}$$

$$\frac{(v_2)_y}{v_2^2} = \frac{1}{v_2} \operatorname{sen}\varphi_2 = \frac{\frac{v_y}{v^2}(1-\beta_x^2)}{1 + \frac{2u_x v_x}{v^2} + \beta_x^2}.$$

La comparación de los dos casos, de una radiación *corpuscular* y de una *fotónica,* ambas de la misma velocidad v, las cuales, antes de ser reflejadas, llenan un cilindro de la sección S y de la altura l, dió las expresiones análogas para la energía reflejada, la densidad de energía y la presión de radiación; mencionaré sólo las para la energía reflejada:

$$(1,5) \qquad W_1 = W \frac{1 + \frac{2u_x v_x}{c^2} + \beta_x^2}{1-\beta_x^2} \quad \text{(Corp.)}$$

$$W_2 = W \frac{1 + \frac{2u_x v_x}{v^2} + \beta_x^2}{1-\beta_x^2} \quad \text{(Fot.)}$$

Se demostró en el trabajo citado (y más detalladamente en una publicación en prensa) [3] que el concepto fotónico es aplicable también para la luz que se propaga en un medio material. En el caso de la luz en el *vacío* se halla la ley de reflexión, aplicando sencillamente los teoremas de la conservación de la energía y del impulso, escribiéndose:

$$h\nu_2 - h\nu = F\,\Delta s \cos\chi$$

$$\frac{h\nu_2}{c}\cos\varphi_2 + \frac{h\nu}{c}\cos\varphi = F\,\Delta t$$

$$\frac{h\nu_2}{c}\,\mathrm{sen}\,\varphi_2 - \frac{h\nu}{c}\,\mathrm{sen}\,\varphi = 0.$$

Con $\frac{\Delta s}{\Delta t}\cos\chi = u_x$, se elimina F y φ_2, y se encuentra inmediatamente la frecuencia de la luz reflejada:

$$\nu_2 = \nu\,\frac{1+2\beta_x\cos\varphi+\beta_x{}^2}{1-\beta_x{}^2} \tag{1,6}$$

y calculando φ_2, se halla la ley de la relatividad restringida (1, 2) o (1, 3).

En el caso del *corpúsculo*:

$$E = mc^2$$

$$p = mv$$

las ecuaciones correspondientes no son suficientes para calcular m_1, v_1 y φ_1, sino se necesita además la conocida invariante de la transformación de *Lorentz*:

$$m\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = m_1\sqrt{1-\frac{v_1{}^2}{c^2}} = m_0, \tag{1,7}$$

para encontrar la masa reflejada m_1 y la ley de reflexión (1, 1).

Finalmente, en el caso del *fotón en el medio material,* era de suponer que la energía del mismo fuera, como en el vacío, $h\nu$

mientras que su impulso fuera expresado por $\frac{h\nu}{v}$, de acuerdo con la longitud de onda más corta en el medio material; con:

$$E = h\nu$$

$$p = \frac{h\nu}{v}$$

se llegará, aplicando los teoremas de conservación, a la ley de reflexión (1, 4), agregando como cuarta ecuación:

$$\text{(1,8)} \qquad \frac{h\nu}{v}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = \frac{h\nu_2}{v_2}\sqrt{1-\frac{v_2^2}{c_2}};$$

pudiera llamarse esta magnitud «impulso de reposo», si esta expresión no implicaría una contradicción.

II. *El fotón con una masa de reposo imaginaria y una velocidad mayor que la luz.*

Relacionando el concepto fotónico y las fórmulas obtenidas con las expresiones correspondientes de la teoría electromagnética de la luz, *A. Battig* (4) ha publicado este año un estudio sobre «el movimiento de fotones en un medio material», llegando a la última consecuencia del hecho de que el fotón en el medio material tiene la energía $h\nu$ y el impulso $h\nu/v$, es decir la de atribuir al mismo la *masa imaginaria de reposo*:

$$\text{(2,1)} \qquad m_0 = i\frac{h\nu}{c^2}\sqrt{n^2-1}.$$

En efecto, usando la conocida ecuación de la mecánica relativista:

$$\text{(2,2)} \qquad \frac{E^2}{c^2} - p^2 = m_0^2\, c^2,$$

tendríamos que distinguir los tres casos posibles:

1. Corpúsculo: Masa de reposo >0
2. Fotón en el vacío: Masa de reposo $=0$
3. Fotón en el medio material: Masa de reposo imaginaria.

En consecuencia, *Battig* se siente obligado a atribuir a este fotón una velocidad mayor que la de la luz, igual a nc. El autor de la presente comunicación ya en 1938 ha demostrado ([5]) que el efecto *Doppler*, observado en luz que se propaga en un medio material, se explica perfectamente bajo el punto de vista quántico, si se admite tal velocidad grande para los fotones, sin llegar a la conclusión de la masa de reposo imaginaria.

Otro resultado interesante de *Battig* es el siguiente, que reproduciremos en forma simplificada. Suponiendo que v sea la velocidad de la onda luminosa y que forme el ángulo ϑ con el eje (x), tenemos:

$$E = h\nu$$

$$p_x = \frac{h\nu}{v}\cos\vartheta$$

$$p_y = \frac{h\nu}{v}\,\mathrm{sen}\,\vartheta,$$

y en un sistema $S'(x', y')$ que se mueve con la velocidad u en la dirección de (x):

$$E' = \frac{E - up_x}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$p'_x = \frac{p_x - \frac{u}{c^2}E}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$p'_y = p_y$$

es decir:

$$E' = h\nu'' = h\nu\,\frac{1-\frac{u}{v}\cos\vartheta}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{2,3}$$

$$p'_x = \frac{h\nu''}{v''} \cos \vartheta'' = \frac{h\nu}{v} \frac{\cos \vartheta - \frac{uv}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$p'_y = \frac{h\nu''}{v''} \operatorname{sen} \vartheta'' = \frac{h\nu}{v} \operatorname{sen} \vartheta.$$

La primera de las ecuaciones (2, 3) representa el efecto *Doppler*; la magnitud v'' de la segunda y tercera ecuación es la velocidad de la onda en el sistema S', mientras que la velocidad del fotón en el mismo será $\frac{c^2}{v''}$. *Battig* considera ahora el caso especial de que la velocidad u del sistema S' sea igual a $\frac{v}{\cos \vartheta}$. Se obtiene no sólo para la velocidad v'', sino también para la energía E' el valor cero; además resulta:

$$p' = \frac{h\nu}{v} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}, \tag{2, 4}$$

es decir, igual a la invariante (1, 8); así la expresión «impulso de reposo» parece en cierto sentido justificada. El cono: $\cos \vartheta = \frac{v}{u}$ sobre el cual se anula la velocidad v'' determina la dirección de la radiación de *Cherenkow* emitida por un electrón en reposo en este sistema.

III. *Una nueva interpretación del fotón en el medio material.*

Punto de partida para una nueva interpretación del fotón en el medio material del índice de refracción $n = \frac{c}{v}$, que evita la masa de reposo imaginaria y la velocidad mayor que la de la luz — que en el caso investigado por *Battig* se haría infinita —, es «la analogía entre las ecuaciones fundamentales de la Mecánica para un punto material que se mueve en un campo, y las ecuaciones fundamentales de la Optica Geométrica de un cuerpo isótropo dispersante para un rayo casi simplemente periódico» que en su última consecuencia ha conducido a la ya clásica ecuación de *Schroedinger* y sus distintas expresiones (relativista, dependiente del tiempo, etc.).

Escribimos una onda monocromática plana en el medio material del índice de refracción $n=\frac{c}{v}$:

$$\Phi=a\,.\,\exp.\,2\pi i\nu\left[t-n\frac{\alpha x+\beta y+\gamma z}{c}\right]$$

y tenemos para la fase:

$$\vartheta=2\pi\nu\left[t-n\frac{\alpha x+\beta y+\gamma z}{c}\right]$$

las dos ecuaciones:

$$(3,1)\qquad \frac{\partial\vartheta}{\partial t}=2\pi\nu$$

$$\frac{\partial\vartheta}{\partial s}=-2\pi\frac{n}{c}\nu.$$

Por otra parte, considerando un punto material de la masa m y de la velocidad V que se mueve en un campo y cuya energía *total* W es igual a la suma de su energía *cinética* (más energía de reposo) E y de su *energía potencial* U, tenemos, siendo S la función de acción de *Hamilton*:

$$(3,2)\qquad \frac{\partial S}{\partial t}=-W$$

$$\frac{\partial S}{\partial s}=mV,$$

siendo $p=mV$ el impulso del punto material. Teniendo S la dimensión de una acción, mientras que ϑ no tiene dimensión, podemos poner:

$$S=-\frac{h}{2\pi}\vartheta$$

y ganamos así las dos ecuaciones siguientes:

$$W = h\nu \tag{3,3}$$

$$p = \frac{h\nu}{v} \tag{3,4}$$

Por otra parte tenemos:

$$W = E + U \tag{3,5}$$

$$E = mc^2 \tag{3,6}$$

$$p = mV. \tag{3,7}$$

Se deducen de estas ecuaciones también las siguientes:

$$p = \frac{1}{c} \sqrt{(W-U)^2 - m_0^2\, c^4} \tag{3,8}$$

$$v = c\, \frac{W}{\sqrt{(W-U)^2 - m_0^2\, c^4}} \tag{3,9}$$

$$V = c\, \frac{\sqrt{(W-U)^2 - m_0^2\, c^4}}{W-U} \tag{3,10}$$

y por lo tanto también:

$$Vv = c^2 \frac{W}{W-U}. \tag{3,11}$$

Siendo $v = \frac{\nu}{N}$ (N = número de ondas $= \frac{1}{\lambda}$) la velocidad de fase de la onda asociada a la masa m con la velocidad (mecánica) V, se demuestra fácilmente que su velocidad de grupo $v_g = \frac{d\nu}{dN}$ es igual a V. Especial interés merece (3,11); para $U = 0$, obtenemos la conocida relación de las ondas de materia; la ecuación enseña además que con elección conveniente de U se puede conseguir distintos valores de la velocidad v de la onda asociada.

Viceversa, suponiendo dada una onda electromagnética de determinada frecuencia ν y velocidad v, le podemos asociar una partícula de cualquier velocidad V; eligiendo convenientemente el valor de U. Expresando ahora la masa de reposo en función de ν, v y V, encontraremos:

$$m_0 = \frac{h\nu}{vV}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \tag{3,12}$$

y se ve que con la suposición $V = \dfrac{c^2}{v}$ resulta la masa de reposo imaginaria de *Battig*; además: $U = 0$. Suponiendo por otra parte que la velocidad de las partículas sea igual a la velocidad de la onda: $V = v$, se obtiene:

$$m_0 = \frac{h\nu}{v^2}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}, \tag{3,13}$$

es decir, la masa del fotón en el medio material es:

$$m = \frac{h\nu}{v^2}; \tag{3,14}$$

además sigue:

$$E = h\nu\frac{c^2}{v^2} \tag{3,15}$$

$$U = h\nu\left(1-\frac{c^2}{v^2}\right). \tag{3,16}$$

Al entrar un fotón del vacío en un medio material, la suma de su «energía cinética» $E = h\nu\dfrac{c^2}{v^2}$ y de su «energía potencial» $U = h\nu\left(1-\dfrac{c^2}{v^2}\right)$ queda igual a su «energía total» $W = h\nu$, en el vacío; sin poder explicar el significado de U, interpretamos así: el fotón, de la energía $h\nu$, absorbe del medio la energía

$G = -U$, y adquiere así el valor $E = W + G$. En este proceso la velocidad del fotón se reduce a la n-ava parte de c o al valor v, la masa aparente será n^2 veces mayor, el impulso n veces. Tenemos así:

$$E = mc^2 \tag{3,17}$$

$$p_x = mv \cos \vartheta$$

$$p_y = mv \cos \vartheta.$$

En el sistema S' que se mueve con la velocidad u en la dirección de (x) tendremos con la transformación de *Lorentz*:

$$E' = \frac{E - up_x}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$p'_x = \frac{p_x - \frac{u}{c^2} E}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$p'_y = p_y,$$

llamando el impulso nuevo e', en vez de p':

$$E' = m' c^2 = m\, c^2 \frac{1 - \frac{uv}{c^2} \cos \vartheta}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{3,18}$$

$$e'_x = m' v' \cos \vartheta' = m \frac{v \cos \vartheta - u}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$e'_y = m' v' \operatorname{sen} \vartheta' = mv \operatorname{sen} \vartheta.$$

La velocidad del fotón en el sistema S' es igual a v'; al impulso e' llamaremos: *impulso cinético.*

La energía $G = h\nu \left(\frac{v^2}{c^2} - 1\right)$, energía del medio que en el sistema S se halla en reposo, en el sistema S' posee un impulso que llamaremos g', pues posee la velocidad $-u$. Tendremos por lo tanto en S':

$$G' = \frac{G}{\sqrt{1-\beta^2}} = h\nu \frac{\frac{c^2}{v^2} - 1}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{3,19}$$

$$g'_x = \frac{-\frac{u}{c^2} G}{\sqrt{1-\beta^2}} = h\nu \frac{-\frac{u}{v^2}(1-\frac{v^2}{c^2})}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$g'_y = 0.$$

Formando ahora:

$$W' = E' - G'$$

$$p'_x = e'_x - g'_x$$

$$p'_y = e'_y - g'_y$$

ganamos las relaciones:

$$(3,20) \qquad W' = h\nu \frac{1-\frac{u}{v}\cos\vartheta}{\sqrt{1-\beta^2}} = h\nu''$$

$$p'_x = \frac{h\nu}{v} \frac{\cos\vartheta - \frac{uv}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{h\nu''}{v''}\cos\vartheta''$$

$$p'_y = \frac{h\nu}{v}\operatorname{sen}\vartheta = \frac{h\nu''}{v''}\operatorname{sen}\vartheta'',$$

es decir, los valores de la energía total y del impuso total que hemos admiitido en un principio y que corresponderían a una velocidad mayor que la de la luz.

Consideraciones análogas pueden hacerse para el caso de la reflexión de la luz en el espejo móvil, poniendo en cuenta el impulso que recibe la energía absorbida del medio por parte del espejo.

BIBLIOGRAFIA

1) J. WÜRSCHMIDT: Rev. Mat. y Fís. Teór., Un. Nac. de Tucumán, *6*. 79, 1942.
2) J. WÜRSCHMIDT: Rev. de la Un. Mat. Arg., *11*, 47, 1945.
3) J. WÜRSCHMIDT: Rev. Mat. y Fís. Teór., Un. Nac. de Tucumán, en prensa.
4) A. BATTIG: Rev. de la Un. Mat. Arg., *11*, 126, 1946.
5) J. WÜRSCHMIDT: Publ. Dep. de Fís. Nº 13, Un. Nac. de Tucumán, 1938.