SOBRE EL AXIOMA DE LAS SUCESIONES NO CONVERGENTES EN ALGUNOS ESPACIOS TOPOLOGICOS LINEALES (*)

por LEOPOLDO NACHEBIN

Résumé. Parmi les axiomes les plus importants de la théorie des espaces topologiques, où la notion fondamentale est celle de limite d'une suite dénombrable, on trouve l'axiome suivant: si une suite de points ne converge pas vers un point, elle contient une certaine sous-suite dont aucune sous-suite ultérieure ne converge vers ce point. En considérant l'ensemble des notions de limite, qu'on peut introduire dans un même espace abstrait, comme un système partiellement ordonné à la façon usuelle, on trouve que cet axiome est complètement multiplicatif; et, toutefois, qu'il n'est pas additif. En employant un théorème démontré dans un autre article [Référence (6)], donnant une condition nécessaire et suffisante pour que cet axiome soit satisfait par la topologie union d'une suite dénombrable de topologies normées dans un même espace linéaire [Théorèmes 1 et 2], on trouve une condition nécessaire et suffisante (Théorème 3) et des conditions suffisantes [Théorèmes 4 et 5] pour que cet axiome soit satisfait dans une certaine catégorie d'espaces topologiques linéaires dont les points sont des suites de nombres [Cette catégorie comprend l'espace des fonctions holomorphes sur un cercle fermé donné; l'espace des fonctions entières de type exponentiel plus petit qu'une valeur positive donnée; l'espace des fonctions entières d'ordre plus petit qu'une valeur positive donnée]. On considère aussi l'espace des fonctions holomorphes sur un ensemble fermé donné [Théorème 6].

1. *Introducción.* Consideremos un espacio lineal E sobre el cuerpo de los números (reales o complejos) (1). Por una norma en E entenderemos una función $\phi(x)$ unívoca, definida en E , con valores en el intervalo cerrado $0 - +\infty$ (2), tal que:

(*) Trabajo recibido por la Unión Matemática Argentina el día 22 de Julio de 1946.

(1) Sobre los axiomas de un tal espacio, ver S. BANACH, *Théorie des opérations linéaires*, p. 26, Warszawa, 1932.

(2) Usualmente (BANACH, loc. cit. p. 53) se consideran *normas propias*, es decir, normas que tomen solamente valores no negativos finitos. Esta restricción es superflua para nuestro objeto.

1. $\phi(\vartheta) = 0$, $\phi(x) > 0$ si $x \neq \vartheta$,
2. $\phi(x_1 + x_2) \leq \phi(x_1) + \phi(x_2)$,
3. $\phi(ax) = |a| \phi(x)$ si $a \neq 0$, $x \neq \vartheta$,

donde x_1, x_2, x son puntos de E , ϑ es un origen de E y a es un número. Toda norma $\phi(x)$ en E induce una topología límite T en E (es decir, una noción de «una sucesión de puntos de E tiende según T hacia un punto de E ») definida del modo usual: siendo $x_m \in E$ ($m = 0, 1, 2, \dots$), $x \in E$, entonces $x_m \rightarrow x$ según T si y solamente si $\phi(x_m - x) \rightarrow 0$ cuando $m \rightarrow \infty$. Una tal topología límite se dice *normable*. Una sucesión $\{x_m\}$, $m = 0, 1, 2, \dots$ de puntos de E se dice limitada según la topología normable T , definida por la norma $\phi(x)$, cuando y solamente cuando la sucesión numérica $\{\phi(x_m)\}$ sea limitada⁽³⁾.

Consideremos tres topologías normables T, T', T'' en el mismo espacio lineal E , definidas respectivamente por las normas $\phi(x), \phi'(x), \phi''(x)$. Diremos entonces que una topología T *contiene* al par ordenado de topologías T', T'' , y escribiremos:

$$T > [T', T''] \quad (1)$$

siempre que estas topologías satisfagan la condición siguiente: toda sucesión de puntos del espacio E que es limitada según T' y que converja hacia el origen ϑ según T'' es necesariamente convergente hacia el origen según T . Si definimos $\varphi(\varepsilon)$ como el extremo superior, finito o no, de $\phi(x)$ para todo $x \in E$ tal que $\phi'(x) \leq 1$, $\phi''(x) \leq \varepsilon$, donde $0 < \varepsilon < +\infty$, se verifica inmediatamente que la condición (1) es equivalente a la $\varphi(\varepsilon) \rightarrow 0$ para $\varepsilon \rightarrow 0$.

Entre los axiomas más importantes que debe satisfacer una topología T en E , normable o no, está el siguiente, llamado «axioma de las sucesiones no convergentes»⁽⁴⁾:

(3) Un número finito de términos de esta sucesión puede ser igual a $+\infty$. Como se sabe, la noción de sucesión limitada solamente depende de la topología normable y no propiamente de la norma que induce esta topología; es decir, dos normas inducen la misma topología siempre que ellas definan una misma noción de sucesión limitada.

(4) Ver C. KURATOWSKI, *Topologie I*, p. 77, Warszawa, 1933.

Si una sucesión $\{x_m\}$, $m=0, 1, 2, \dots$ de puntos de E no converge hacia un punto $x \in E$ según T , entonces existe una cierta subsucesión de ella, tal que toda subsucesión ulterior de la misma tampoco converge hacia x según T .

Toda topología límite normable en E , como toda topología límite matrizable en E , obviamente satisfacen a este axioma.

Consideremos una sucesión T_n ($n=0, 1, 2, \dots$) de topologías normables en E , y también una topología límite unión:

$$T = U_0 \sim T_n$$

la cual es definida del siguiente modo: siendo $x_m \in E$ ($m=0, 1, 2, \dots$), $x \in E$, diremos que $x_m \rightarrow x$ según T cuando y solamente cuando exista por lo menos un entero $n \geq 0$ tal que $x_m \rightarrow x$ según T_n .

Esta topología límite unión T no es necesariamente normable, ni tampoco satisface necesariamente al axioma de las sucesiones no-convergentes. Este último aspecto de la cuestión da lugar a los dos teoremas siguientes⁽⁶⁾:

Teorema 1. Para que una topología límite unión T satisfaga al axioma de las sucesiones no convergentes es necesario y suficiente que a cada entero $n \geq 0$ sea posible asociar un entero $N = N(n) \geq 0$ tal que sea

$$T_N > [T_r, T_s]$$

para $r=0, 1, 2, \dots, n$ y $s=0, 1, 2, \dots, n, \dots$

Teorema 2. Si $T_n \subset T_{n+1}$ ($n=0, 1, 2, \dots$)⁽⁶⁾, para que una topología límite unión T satisfaga al axioma de las sucesiones no convergentes es necesario y suficiente que a cada entero $n \geq 0$ sea posible asociar un entero $N = N(n) > n$ tal que sea

⁽⁶⁾ Para una demostración ver el artículo del autor: *On the union of a sequence of normed topologies*, *Summa Brasiliensis Mathematicae*, vol. II, 1946.

⁽⁶⁾ Esta notación indica que la primera topología es subtopología de la segunda, es decir, que a toda sucesión de puntos convergente según la primera hacia un punto, es necesariamente convergente hacia el mismo punto con la segunda topología.

$$T_N > [T_r, T_s]$$

para $s = N + 1, N + 2, \dots$

Una condición suficiente es que sea

$$T_N > [T_r, T_s]$$

cualesquiera que sean los enteros no negativos N, r, s tales que $r < N < s$ (7).

En este artículo deseamos aplicar estos teoremas sobre espacios topológicos lineales a una cierta categoría de espacios topológicos lineales de sucesiones (§ 2), — que comprende como casos particulares el espacio de las funciones holomorfas sobre un círculo cerrado, el espacio de las funciones enteras de tipo exponencial menor que un cierto valor positivo fijado, y el espacio de las funciones enteras de orden menor que un cierto valor positivo dado —, así como al espacio de las funciones holomorfas sobre un conjunto cerrado dado (§ 4).

2. *Una categoría de espacios topológicos lineales de sucesiones* (8). Designemos con E un espacio euclidiano (real o complejo) de una infinidad numerable de dimensiones, es decir, un espacio cuyos puntos sean sucesiones numerables de números. Los puntos de este espacio se indicarán con una notación del tipo $\{x_m\}_m$ o simplemente $\{x_m\}$ si no hay lugar a confusión, o con la misma letra x que se usa para sus coordenadas. Consideremos E como un espacio lineal del modo usual, donde se define

$$x + y = \{x_m + y_m\}, \quad ax = \{ax_m\},$$

siendo a un número y $x = \{x_m\}$, $y = \{y_m\}$ puntos de E .

(7) Esta condición suficiente, aunque no necesaria, es "casi necesaria" en el sentido siguiente: para que una topología unión de una sucesión monótona satisfaga a dicho axioma es necesario y suficiente que de la sucesión dada se pueda extraer una subsucesión, necesariamente monótona, que satisfaga esta condición.

(8) Un estudio más detallado de esta categoría de espacios, así como de otras categorías análogas y de las transformaciones lineales de una infinidad de variables en estos espacios, se encontrarán en un trabajo del autor que va a ser publicado en otra Revista.

Definiremos también un producto entre los puntos de E por:

$$xy = \{x_m y_m\}$$

y un cociente por

$$\frac{x}{y} = \left\{ \frac{x_m}{y_m} \right\},$$

siempre que todas las coordenadas de x y fueran distintas de cero. Consideremos también la norma siguiente ⁽⁹⁾,

$$\|x\| = \sup_{m \geq 0} |x_m|$$

que posee obviamente las propiedades: $\|xy\| \leq \|x\| \cdot \|y\|$, excepto cuando uno de los dos puntos tenga norma nula y el otro norma infinita. De esta manera, E es por tanto el anillo normado que se obtiene como el producto directo numerable de la recta euclidiana por sí misma, concebida como un anillo normado de la manera usual.

Evidentemente para todo punto a de E cuyas coordenadas sean todas diferentes de cero, la función $\|ax\|$ de $x \in E$ goza de las propiedades de una norma. Indicaremos con $[a]$ el subconjunto de E constituido por todos los puntos $x \in E$ tales que $\|ax\| < +\infty$. Entonces $[a]$ es un subespacio lineal de E (es decir, $[a]$ es cerrado con relación a la suma de puntos y a la multiplicación de un número por un punto) y $\|ax\|$ es una norma propia sobre $[a]$.

Sea

$$A = \{a_m^n\} \quad (m, n = 0, 1, 2, \dots)$$

una matriz infinita cuyos elementos sean números reales positivos. Pongamos

$$a_n = \{a_m^n\}_m \in E, \quad [A] = U_0 \gamma [a_n],$$

(9) Con este símbolo indicamos el extremo superior, finito o no, de un conjunto numérico o de una sucesión numérica; si el conjunto consta de dos números u, v usaremos entonces $\sup(u, v)$; análogamente para el extremo inferior.

donde U indica la unión de los conjuntos $[a_n]$; es decir $[A]$ es el conjunto de todos los puntos $x \in E$ tales que $\|a_n x\| < +\infty$ por lo menos para un entero $n \geq 0$.

$[A]$ es un subespacio lineal de E si y solamente si a todo par de enteros $p, q \geq 0$ es posible asociar un entero $N = N(p, q) \geq 0$ tal que

$$\left\| \frac{a_N}{a_p} \right\| < +\infty, \quad \left\| \frac{a_N}{a_q} \right\| < +\infty. \quad (2)$$

En efecto, $[A]$ es siempre cerrado en relación a la multiplicación de un número por un punto. Supongamos satisfecha la relación expresada por las (2); si $x, y \in [A]$, es decir, si existen dos enteros $p, q \geq 0$ tales que

$$\|a_p x\| < +\infty, \quad \|a_q y\| < +\infty,$$

determinando el entero $N \geq 0$ de acuerdo con (2), tendremos

$$\|a_N (x + y)\| \leq \|a_p x\| \cdot \left\| \frac{a_N}{a_p} \right\| + \|a_q y\| \cdot \left\| \frac{a_N}{a_q} \right\| < +\infty,$$

y por lo tanto $x + y \in [A]$ y por consiguiente $[A]$ es lineal. Recíprocamente, si $[A]$ es lineal, dados dos enteros $p, q \geq 0$, como

$$\left\| a_p \frac{1}{a_p} \right\| = \left\| a_q \frac{1}{a_q} \right\| = 1 < +\infty,$$

donde 1 es el punto unitario de E , esto es, el punto cuyas coordenadas son todas iguales a la unidad, resulta que los puntos $1/a_p, 1/a_q$ pertenecen a $[A]$; luego la suma de los mismos también pertenece a $[A]$, o sea existe un entero $N \geq 0$ tal que

$$\left\| a_N \left(\frac{1}{a_p} + \frac{1}{a_q} \right) \right\| < +\infty,$$

relación que equivale a la (2). En particular, la condición (2) es satisfecha toda vez que sea

$$\left\| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right\| < +\infty \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (3)$$

o, más particularmente, toda vez que

$$a_m^n \geq a_m^{n+1} \quad (m, n = 0, 1, 2, \dots) \quad (4)$$

puesto que entonces basta tomar $N = \sup(p, q)$. Supondremos siempre que A satisface a las condiciones necesarias y suficientes para que $[A]$ sea un subespacio lineal de E .

Cada $\|a_n x\|$ es una norma (no necesariamente propia) en $[A]$ y por tanto induce una topología normable T_n en $[A]$. Consideremos la topología límite unión:

$$T = U_0 \circ T_n$$

en $[A]$. La cuestión que vamos ahora a examinar puede ser enunciada en los términos siguientes: dada la matriz infinita A que determina un subespacio lineal $[A]$ y sobre éste una topología límite T , ¿cuál es la condición necesaria y suficiente a que debe satisfacer A para que T satisfaga al axioma de las sucesiones no convergentes?

Con este objetivo, consideremos tres enteros no negativos N, r, s y definamos

$$\varphi_{Nrs}(\varepsilon) = \sup_{(x)} \|a_N x\|$$

para todo $x \in [A]$ tal que

$$\|a_r x\| \leq 1, \quad \|a_s x\| \leq \varepsilon, \quad (5)$$

donde $0 \leq \varepsilon < +\infty$. Vamos en primer lugar a probar que

$$\varphi_{Nrs}(\varepsilon) = \sup_{m \geq 0} \left\{ \inf \left(\frac{a_m^N}{a_m^r}, \frac{\varepsilon a_m^N}{a_m^s} \right) \right\}. \quad (6)$$

En efecto, si $x = [x_m]_m \in E$ satisface (5), será

$$|x_m| \leq \frac{1}{a_m^r}, \quad \frac{\varepsilon}{a_m^s} \quad (m = 0, 1, 2, \dots)$$

donde

$$|a_m^N x_m| \leq \inf. \left(\frac{a_m^N}{a_m^r}, \frac{\varepsilon a_m^N}{a_m^s} \right) \quad (m = 0, 1, 2, \dots)$$

y tomando el extremo superior con relación a $m \geq 0$ y después con relación a x , que satisface (5), constatamos que (6) es verdadera con el signo $\leq$. Por otro lado, considerando el punto

$$x^* = [x_m^*], \text{ donde } x_m^* = \inf. \left(\frac{1}{a_m^r}, \frac{\varepsilon}{a_m^s} \right) \quad (m = 0, 1, 2, \dots)$$

se ve que $\|a_r x^*\| \leq 1$, $\|a_s x^*\| \leq \varepsilon$ y por consiguiente $x^* \in [A]$, y $\|a_N x^*\|$ es igual al segundo miembro de (6), de donde se sigue que (6) es verdadera con el signo $\geq$. Por tanto (6) está probada.

Para poder aplicar el Teorema 1, tenemos interés en verificar cuándo es que la condición

$$T_N > [T_r, T_s], \text{ o sea, } \varphi_{Nrs}(\varepsilon) \rightarrow 0 \text{ para } \varepsilon \rightarrow 0$$

es satisfecha. Teniendo en cuenta la fórmula (6) es natural introducir las consideraciones que siguen.

Consideremos dos sucesiones $\{\alpha_m\}$, $\{\beta_m\}$ de números positivos y definamos

$$\varphi(\varepsilon) = \sup_{m \geq 0} \left\{ \inf \left(\alpha_m, \frac{\varepsilon}{\beta_m} \right) \right\},$$

donde $0 < \varepsilon < +\infty$. Diremos entonces que la primera sucesión es *subinfinitésima* con relación a la segunda si, o bien es imposible extraer de la segunda sucesión otra sucesión que sea convergente hacia cero, o bien, en caso contrario, cualquiera que sea la sucesión creciente $\{m_k\}$ de enteros no negativos tal que $\beta_{m_k} \rightarrow 0$ cuando $k \rightarrow \infty$, necesariamente sea $\alpha_{m_k} \rightarrow 0$ cuando $k \rightarrow \infty$. Observemos que, si $\alpha_m \rightarrow 0$ cuando $k \rightarrow \infty$, entonces $\{\alpha_m\}$ es subinfinitésima con relación a cualquier otra sucesión $\{\beta_m\}$. Utilizando esta noción, vamos a demostrar el lema siguiente:

Lema 1. *Para que $\varphi(\varepsilon) \rightarrow 0$ cuando $\varepsilon \rightarrow \infty$ es necesario y suficiente que $\{\alpha_m\}$ sea subinfinitésima con relación a $\{\beta_m\}$. Una*

condición suficiente es que $\{\alpha_m\}$ sea una sucesión infinitésima.

En efecto, supongamos que $\varphi(\varepsilon) \rightarrow 0$ cuando $\varepsilon \rightarrow 0$, y sea $\{m_k\}$ una sucesión creciente, supuesto existente, de enteros no negativos tal que $\beta_{m_k} \rightarrow 0$ cuando $k \rightarrow \infty$. Como

$$\inf(\alpha_{m_k}, 1) \leq \varphi(\beta_{m_k}) \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty),$$

concluimos que $\alpha_{m_k} \rightarrow 0$ cuando $k \rightarrow \infty$: por tanto la primera sucesión es subinfinitésima con relación a la segunda. Recíprocamente, supongamos que $\varphi(\varepsilon)$ no converja hacia cero cuando $\varepsilon \rightarrow 0$. Puesto que $\varphi(\varepsilon)$ es monótona, existe el límite siguiente

$$\lambda = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varphi(\varepsilon)$$

el cual es positivo. Pongamos también

$$\varphi_m(\varepsilon) = \sup_{M \geq m} \left\{ \inf \left(\alpha_M, \frac{\varepsilon}{\beta_M} \right) \right\} \quad (m = 0, 1, 2, \dots).$$

Se reconoce inmediatamente que estas funciones son monótonas y que

$$\lambda = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varphi_m(\varepsilon) \quad (m = 0, 1, 2, \dots).$$

Eligiendo un δ en el intervalo abierto $0 - \lambda$, tendremos

$$\varphi_m(\varepsilon) > \delta \quad (\varepsilon > 0; m = 0, 1, 2, \dots). \quad (7)$$

De aquí resulta, por recurrencia, que existe una sucesión creciente $\{m_k\}$ de enteros no negativos tal que

$$\inf \left(\alpha_{m_k}, \frac{1/k}{\beta_{m_k}} \right) > \delta \quad (k = 1, 2, 3, \dots)$$

En efecto, basta definir $m_1 = 0$, y en seguida, suponiendo ya definido m_k , definir m_{k+1} como uno de los valores, por ejemplo el menor, del entero M tal que

$$M > m_k, \quad \inf \left(\alpha_M, \frac{1/k}{\beta_M} \right) > \delta;$$

la existencia de por lo menos un entero M en estas condiciones es una consecuencia de la desigualdad (7) cuando en ella se hace $m = m_k + 1$ y $\varepsilon = 1/k$. Ahora bien, (8) equivale a

$$\beta_{m_k} < \frac{1}{k\delta}, \quad \alpha_{m_k} > \delta \quad (k=1, 2, 3, \dots)$$

lo que prueba que $\{\alpha_m\}$ no es subinfinitésima con relación a $\{\beta_m\}$: la primera parte del enunciado del Lema está, por consiguiente, probada. La segunda parte es, entonces, evidente.

Comparando ahora el enunciado del Teorema 1 con la fórmula (6) y con la primera parte del enunciado del Lema 1, obtenemos el teorema 3 que sigue. El teorema 4 se obtiene utilizando la segunda parte del enunciado del Lema 1. El teorema 5 es una especialización del teorema 4 obtenida cuando es posible tomar el entero $N(n)$, que figura en el enunciado de este último, igual a $n+1$. Si en lugar del teorema 1, utilizamos el teorema 2 obtenemos enunciados análogos que suprimimos: conviene únicamente notar que la monotonía de la sucesión de topologías normables es, en este caso, precisamente expresada por la condición (3), o implicada en la condición (4).

Teorema 3. Para que la topología límite T en el espacio lineal $[A]$ satisfaga al axioma de las sucesiones no convergentes es necesario y suficiente que a cada entero $n \geq 0$ sea posible asociar un entero $N = N(n) \geq 0$ tal que la sucesión

$$\left\{ \frac{a_m^N}{a_m^r} \right\}_m \quad (9)$$

sea subinfinitésima con relación a la sucesión

$$\left\{ \frac{a_m^s}{a_m^N} \right\}_m \quad (10)$$

para todo $r=0, 1, 2, \dots, n$ y $s=0, 1, 2, \dots, n, \dots$

Teorema 4. Para que la topología T en el espacio lineal $[A]$ satisfaga al axioma de las sucesiones no convergentes es su-

ficiente que a cada entero $n \geq 0$ sea posible asociar un entero $N = N(n) > n$ tal que

$$\frac{a_m^N}{a_m^r} \rightarrow 0 \text{ cuando } m \rightarrow \infty$$

para $r = 0, 1, 2, \dots, n$.

Teorema 5. Para que la topología límite T en el espacio lineal $[A]$ satisfaga al axioma de las sucesiones no convergentes es suficiente que

$$\frac{a_m^{n+1}}{a_m^n} \rightarrow 0 \text{ cuando } m \rightarrow \infty \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Antes de terminar este párrafo, vamos a hacer algunas consideraciones que, aunque no serán utilizadas en este artículo, tienen un cierto interés.

En primer lugar observemos que las condiciones necesarias y suficientes del teorema 3 implican las condiciones (2), necesarias y suficientes para que $[A]$ sea lineal; en efecto, haciendo $s = r$ en el teorema 3, y teniendo en cuenta que una sucesión $\{\alpha_m\}$ de números positivos es subinfinitésima con relación a $\{1/\alpha_m\}$ si y solamente si $\{\alpha_m\}$ es limitada, concluimos que

$$\left\| \frac{a_N}{a_r} \right\| < +\infty \quad (r = 0, 1, 2, \dots, n)$$

que es una forma equivalente de la condición (2). Esta condición (2) es, por otra parte, necesaria y suficiente para otras propiedades: en primer lugar ella traduce que $T_n \subset T_N$, $T_g \subset T_N$ o bien (como se acostumbra a decir en la teoría de los sistemas parcialmente ordenados) que la sucesión de topologías $\{T_n\}$ es un sistema dirigido (*directed system*); en segundo lugar, suponiendo E real e introduciendo un orden parcial $x \leq y$ entre los puntos $x = \{x_m\}$, e $y = \{y_m\}$ de E , definida por $x_m \leq y_m$ ($m = 0, 1, 2, \dots$) con lo cual E es una estructura (*lattice*), (2) expresa que $[A]$ es una subestructura (*sub-lattice*) de E . Un tercer hecho expresado por (2) está enunciado más adelante.

Consideremos dos matrices infinitas

$$A = \{a_m^n\}, \quad B = \{b_m^n\} \quad (m, n = 0, 1, 2, \dots)$$

cuyos elementos sean números positivos: diremos que estas matrices son *equivalentes* y escribiremos $A \sim B$ siempre que $[A] = [B]$, es decir, siempre que ellas definan el mismo subconjunto de E . Vamos a demostrar que, en este caso, las topologías límites, que indicaremos con $T(A)$; $T(B)$, obtenidas en $\Omega = [A] = [B]$ por medio de A y B , respectivamente, son idénticas. Para esto vamos a probar, primeramente, que $A \sim B$ cuando y solamente cuando, a cada entero $n \geq 0$ es posible asociar dos enteros, $p = p(n)$, $q = q(n)$ tales que

$$\left\| \frac{b_p}{a_n} \right\| < +\infty, \quad \left\| \frac{a_q}{b_n} \right\| < +\infty. \quad (11)$$

En efecto, suponiendo estas condiciones satisfechas, y dado $x \in [A]$, existe un entero $n \geq 0$ tal que $\|a_n x\| < +\infty$, de donde

$$\|b_p x\| \leq \|a_n x\| \cdot \left\| \frac{b_p}{a_n} \right\| < +\infty,$$

y por tanto $x \in [B]$. Por consiguiente $[A] \subset [B]$. Análogamente se demuestra la inclusión contraria, lo que prueba que debe ser $A \sim B$. Recíprocamente, si es $A \sim B$, dado un entero $n \geq 0$, como obviamente es $1/a_n \in [A]$, será $1/a_n \in [B]$, lo que implica la primera de las relaciones (11). La segunda se prueba de manera idéntica.

Supongamos ahora que sea $A \sim B$. Indicando con $T_n(A)$ y $T_n(B)$ las topologías normables inducidas en Ω por $\|a_n x\|$ y $\|b_n x\|$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) respectivamente, de (11) resulta que

$$T_n(A) \subset T_{p(n)}(B) \subset T(B)$$

$$T_n(B) \subset T_{q(n)}(A) \subset T(A)$$

de donde $T(A) = T(B)$. Este hecho sirve para aclarar que la topología T depende del conjunto $[A]$ y no propiamente de la matriz A utilizada en la construcción de este conjunto.

Vamos ahora a probar que la condición (2) es necesaria y suficiente para que A sea equivalente a por lo menos una matriz

B que satisfaga la condición (3), o la condición (4) (bien entendido: con la sustitución de los elementos de A por los de B). Como, en efecto, si $A \sim B$ y B satisface (3), de la relación

$$[A] = U_0 \sim [b_n], \quad [b_n] \subset [b_{n+1}] \quad (n=0, 1, 2, \dots),$$

podemos concluir que $[A]$, como unión de una sucesión monótona de subespacios lineales de E, es también un subespacio lineal. Luego (2) es satisfecha. Recíprocamente, supongamos (2) satisfecha e introduzcamos la matriz B cuyos elementos sean definidos por

$$b_m^n = \inf_{0 \leq r \leq n} a_m^r \quad (m, n = 0, 1, 2, \dots).$$

Esta matriz satisface desde luego a (4). Vamos ahora a probar que $A \sim B$, para lo cual basta constatar las (11). Para la primera de las (11), basta tomar $p(n) = n$. En cuanto a la segunda, definamos por recurrencia, de acuerdo con (2),

$$N_0 = 0, \quad N_k = N(N_{k+1}, k), \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

Poniendo entonces $q(n) = N_n$, de (2) se deduce por recurrencia,

$$\left\| \frac{a_q}{a_k} \right\| < +\infty \quad (k = 1, 2, \dots, n),$$

que es precisamente equivalente a la segunda de las (11); queda, por tanto, probado el enunciado.

Para probar que el teorema 3 no es «vacío», es decir, para probar que las condiciones necesarias y suficientes que figuran en su enunciado no son obligatoriamente satisfechas, vamos a dar un ejemplo de una matriz A que, aun satisfaciendo a la condición restrictiva (4), determina un subespacio lineal $[A]$, y sobre éste una topología T que no satisface al axioma de las sucesiones no convergentes. Designemos con I el conjunto de los enteros $0, 1, 2, \dots$ y sea I_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) una sucesión fija de subconjuntos de I tal que cada término de esta sucesión contenga el término siguiente y la diferencia entre estos dos términos sea un subconjunto infinito de I. Definamos los elementos de la matriz A por recurrencia del modo siguiente.

$$a_m^0 = 1 \quad \text{para } m \in I$$

$$a_m^n \begin{cases} a_m^{n-1} & \text{para } m \in I_n \\ & (n=1, 2, \dots) \\ \frac{a_m^{n-1}}{m+1} & \text{para } m \in I - I_n \end{cases}$$

Esta matriz satisface evidentemente la condición (4) y, para demostrar que una topología T sobre $[A]$ no satisface a dicho axioma, será suficiente, de acuerdo con el teorema 3, demostrar que, cualesquiera que sean los enteros no negativos tales que $r < N < s$, necesariamente la sucesión (9) no es subinfinitésima con relación a la sucesión (10). En efecto, en este caso, poniendo $J = I_N - I_s$, como $J \supset I_N - I_{N+1}$, entonces J es un subconjunto infinito de I y por tanto tiene sentido hacer que un entero m variable en J , tienda a infinito. Ahora bien, si m pertenece a J , entonces m no pertenece a I_s , de donde

$$\frac{a_m^s}{a_m^N} = \frac{a_m^{s-1}/(m+1)}{a_m^N} \leq \frac{1}{m+1} \rightarrow 0 \quad (m \rightarrow \infty, m \in J)$$

y por otra parte m pertenece a I_N , de donde

$$\frac{a_m^N}{a_m^r} = 1 \quad (m \in J)$$

lo que prueba la afirmación hecha.

Finalmente, para terminar este párrafo, vamos a indicar dos cuestiones interesantes para ser examinadas y que todavía dejaremos de lado.

La primera es la siguiente. Se verifica fácilmente que, dada una matriz A , no siempre es posible sustituirla por otra B equivalente que satisfaga la condición suficiente del teorema 5; igual que una topología T sobre $[A]$ satisfaga al axioma aquí discutido. Un ejemplo está dado por la matriz cuyos elementos sean todos iguales a la unidad: el espacio y la topología correspondiente son, en este caso, el espacio (m) de las sucesiones li-

mitadas con su topología métrica usual⁽¹⁰⁾. Además se demuestra fácilmente que la condición necesaria y suficiente respecto A para que exista una matriz equivalente B que satisfaga a la condición suficiente del Teorema 5 (sin alterar la cuestión podemos también exigir que B satisfaga la condición (4)), es que A satisfaga la condición suficiente del Teorema 4. Entonces, ¿cuál es el significado topológico del hecho de que el espacio [A] y su topología T sean definidos por medio de una matriz A que satisfaga la condición suficiente del Teorema 5?

La segunda cuestión consiste en re-examinar las cuestiones abordadas en este párrafo utilizando, en lugar de la norma introducida anteriormente en el espacio E, la norma definida del siguiente modo

$$\|x\| = \left(\sum_0^{\infty} |x_m|^p\right)^{1/p},$$

donde $p \geq 1$ es un número real.

3. *Algunos ejemplos.* En este párrafo vamos a indicar algunos ejemplos bien conocidos de espacios topológicos lineales que entran en la categoría estudiada en el párrafo precedente.

Primer ejemplo. Espacio de las funciones holomorfas sobre un círculo cerrado⁽¹¹⁾. Sean: R un número no negativo, δ_n ($n=0, 1, 2, \dots$) una sucesión monótona decreciente de números positivos que convergen hacia cero, y definamos los elementos de la matriz A por:

$$a_m^n = (R + \delta_n)^m \quad (m, n = 0, 1, 2, \dots).$$

Se reconoce inmediatamente que [A] es el conjunto de todos los puntos $x = \{x_m\} \in E$ tales que

$$\limsup_{m \rightarrow \infty} |x_m|^{1/m} \leq 1/R,$$

esto es, tales que el círculo abierto de convergencia de la serie de potencias

⁽¹⁰⁾ BANACH, *loc. cit.*, p. 11.

$$f(z) = \sum_0^{\infty} x_m z^m \quad (12)$$

contiene al círculo cerrado $|z| \leq R$ en el plano de la variable compleja z .

Sea $\mathcal{V}(R)$ un conjunto de estas series de potencias, considerado como un espacio lineal del modo usual. La correspondencia que a cada $x \in [A]$ asocia $f(z) \in \mathcal{V}(R)$ definida por (12) es un isomorfismo, en el sentido de la teoría de los espacios lineales, entre $[A]$ y $\mathcal{V}(R)$. Introduzcamos ahora en $\mathcal{V}(R)$ una topología límite $T(R)$, la llamada topología de convergencia uniforme, definida del siguiente modo: si $f(z), f_m(z) \in \mathcal{V}(R)$ ($m = 0, 1, 2, \dots$) se dice que $f_m(z) \rightarrow f(z)$ según $T(R)$ cuando y solamente cuando existe un δ positivo tal que las series de potencias $f(z), f_m(z)$ sean convergentes en el círculo $|z| \leq R + \delta$ y $f_m(z) \rightarrow f(z)$ uniformemente en este círculo en el sentido usual. Considerando entonces $[A]$ como una topología T y $\mathcal{V}(R)$ como una topología $T(R)$, se ve fácilmente que la correspondencia así definida es bicontinua y por lo tanto $[A]$ con la topología T es, a menos de un isomorfismo en el sentido de la teoría de los espacios topológicos lineales, el propio espacio de las funciones holomorfas sobre un círculo cerrado con la topología de convergencia uniforme.

Aplicando el teorema 5 se ve que en el caso actual el axioma de las sucesiones no convergentes es satisfecho.

Segundo ejemplo. Espacio de las funciones enteras de tipo exponencial menor que un número positivo dado. Sean: c un número positivo, que puede ser igual a $+\infty$, c_n ($n = 0, 1, 2, \dots$) una sucesión monótona creciente de números positivos que convergen a c y definamos los elementos de la matriz A por

$$a_m^n = \frac{m!}{(c_n)^m} \quad (m, n = 0, 1, 2, \dots).$$

$[A]$ es el conjunto de todos los puntos x de E tales que

$$\limsup_{m \rightarrow \infty} |m! x_m|^{1/m} < c,$$

esto es, tales que la serie de potencias definida por (12) representa una función entera de tipo exponencial $< c$ ⁽¹²⁾.

Sea $\mathcal{E}(c)$ el conjunto de estas series de potencias considerado como un espacio lineal de la manera usual. La correspondencia definida por (12) es un isomorfismo en el sentido de la teoría de los espacios lineales entre $[A]$ y $\mathcal{E}(c)$. Definamos en $\mathcal{E}(c)$ una topología límite $T(c)$ del siguiente modo: si $f(z)$, $f_m(z) \in \mathcal{E}(c)$ ($m=0, 1, 2, \dots$), se dice que $f_m(z) \rightarrow f(z)$ según $T(c)$ si y solamente si $f_m(z) \rightarrow f(z)$ uniformemente en el sentido usual en todo conjunto limitado y cerrado del plano complejo y, además de esto, las funciones $\{f_m(z)\}$ son uniformemente de tipo exponencial $< c$, es decir, existen dos números positivos K y $C < c$ tales que

$$|f_m(z)| \leq K \exp.(Cr) \quad (r=|z|; m=0, 1, 2, \dots).$$

Considerando $[A]$ con la topología T y $\mathcal{E}(c)$ con la topología $T(c)$, se verifica que la correspondencia así definida es bicontinua, y por tanto $[A]$ con la topología T es, a menos de un isomorfismo en el sentido de los espacios topológicos lineales, el propio espacio de las funciones enteras de tipo exponencial menor que un número positivo dado con la topología antes indicada.

Aplicando el teorema 5 se encuentra que el axioma de las sucesiones no convergentes es satisfecho en el caso actual.

Tercer ejemplo. Espacio de las funciones enteras de orden menor que un número positivo dado. Sean: c un número positivo, que puede ser $+\infty$, c_n ($n=0, 1, 2, \dots$) una sucesión monótona creciente de números positivos que convergen hacia c y definamos los elementos de la matriz A por

$$a_m^n = m^{m/c_n} \quad (m, n=0, 1, 2, \dots).$$

$[A]$ es el conjunto de todos los puntos x de E tales que

$$\limsup_{m \rightarrow \infty} \frac{\log |x_m|}{m \log m} < \frac{1}{c}$$

⁽¹²⁾ Ver. L. BIBERBACH, *Lehrbuch der Funktionentheorie*, Bd. 2, pág. 234.

es decir, tales que la serie de potencias definida por (12) represente una función entera de orden $< c$ ⁽¹³⁾.

Sea $\mathcal{O}(c)$ el conjunto de estas series de potencias considerado como un espacio lineal del modo usual. La correspondencia definida por (12) es un isomorfismo en el sentido de la teoría de los espacios lineales entre $[A]$ y $\mathcal{O}(c)$. Introduzcamos una topología $T(c)$ en $\mathcal{O}(c)$ del siguiente modo: si $f(z), f_m(z) \in \mathcal{O}(c)$ ($m = 0, 1, 2, \dots$), diremos que $f_m(z) \rightarrow f(z)$ según $T(c)$ si y solamente si $f_m(z) \rightarrow f(z)$ uniformemente en el sentido usual en todo conjunto limitado y cerrado del plano complejo y, además de esto, las funciones $\{f_m(z)\}$ sean uniformemente de orden $< c$, es decir, existen dos números positivos K y $C < c$ tales que

$$|f_m(z)| \leq K \cdot \exp.(r^c) \quad (r = |z|; m = 0, 1, 2, \dots).$$

Considerando $[A]$ con la topología T y $\mathcal{O}(c)$ con la topología $T(c)$, se demuestra que la correspondencia definida es bicontinua y, por tanto, $[A]$ con la topología T es, a menos de un isomorfismo en el sentido de la teoría de los espacios topológicos lineales, el propio espacio de las funciones enteras de orden menor que un número positivo dado con la topología indicada.

Aplicando el teorema 5, se demuestra que en el ejemplo actual el axioma de las sucesiones no convergentes, también es satisfecho.

Análogamente puede ser considerado el espacio de las funciones de orden dado y de tipo menor que un número dado ⁽¹³⁾; así como ciertos espacios de funciones analíticas representadas por series de Dirichlet que satisfacen a la condición de Valirón para que las abscisas de convergencia simple y absoluta sean idénticas.

Como los tres ejemplos que acaban de ser estudiados, así como sus respectivas topologías, son espacios no metrizables, se ve que la unión de una sucesión monótona de topologías normables puede muy bien satisfacer al axioma de las sucesiones no convergentes sin con ello ser normable ni metrizable.

4. *El espacio de las funciones holomorfas sobre un conjunto cerrado dado* ⁽¹⁴⁾. Sea Ω el conjunto de todas las funciones com-

⁽¹³⁾ BIEBERBACH, *loc. cit.*, p. 234 y siguientes.

⁽¹⁴⁾ El espacio de las funciones holomorfas ha sido objeto de estudio, des-

plejas $f(z)$, finitas y unívocas, de la variable compleja z , cada una definida y holomorfa en un conjunto abierto $\mathcal{A}(f)$, no vacío, de la esfera de Gauss de esta variable compleja. Indiquemos con F un subconjunto propio no vacío, cerrado, de esta esfera: si el punto $z = \infty$ pertenece a F , efectuaremos el cambio de variable definido por $z' = 1/(z - \zeta)$, donde ζ indica un punto de la esfera de z no perteneciente a F , y entonces F se cambia topológicamente en un conjunto cerrado F' de la esfera de z' que no contiene $z' = \infty$.

Podemos, por tanto, sin perder la generalidad, suponer que el conjunto dado F no contiene $z = \infty$, es decir, es un subconjunto limitado y cerrado del plano de la variable z . Designemos con $\Omega(F)$ el conjunto de todas las $f(z) \in \Omega$ tales que $\mathcal{A}(f) \supset F$, es decir, el conjunto de todas las funciones de Ω holomorfas sobre F . Vamos a introducir en $\Omega(F)$ una relación de equivalencia $\sim$ módulo F definida del siguiente modo: si $f_1(z), f_2(z) \in \Omega(F)$, diremos que $f_1(z) \sim f_2(z)$ (mód. F) cuando y solamente cuando exista un conjunto abierto $\mathcal{A}$ tal que

1. $F \subset \mathcal{A} \subset \mathcal{A}(f_1) \cap \mathcal{A}(f_2)$.
2. $f_1(z) \equiv f_2(z)$ para $z \in \mathcal{A}$.

Esta definición de equivalencia es evidentemente reflexiva, simétrica y transitiva. Sea $\Omega[F]$ el espacio cociente de $\Omega(F)$ por esta relación de equivalencia, es decir, el conjunto de las clases de equivalencia determinadas en $\Omega(F)$ por $\sim$. Para indicar que dos funciones de $\Omega(F)$ pertenecen a la misma clase de equivalencia módulo F , es costumbre decir que una es la prolongación analítica de la otra módulo F ; además de esto, dada $f_1(z) \in \Omega(F)$ y dado un conjunto abierto de la esfera $\mathcal{A}$ que contiene F , diremos que $f_1(z)$ es prolongable analíticamente en $\mathcal{A}$, módulo F , siempre que exista $f_2(z) \in \Omega(F)$ tal que sea $f_1(z) \sim f_2(z)$ (mód. F) y $\mathcal{A}(f_2) \supset \mathcal{A}$.

Podemos convertir $\Omega[F]$ en un espacio lineal de la manera usual: si a indica un número y $\mathcal{F} \in \Omega[F]$, indicaremos con $a\mathcal{F}$

de varios puntos de vista, por parte de distintos autores. Ver principalmente: L. FANTAPPIE: a) *I funzionali analitici*, Mem. R. Accad. dei Lincei, vol. 3, Serie 6, fasc. 11, 1930; b) *Überblick über die Theorie der analytischen Funktionalen und ihre Anwendungen*, Jahresber. der Deutschen Mathem. Ver. Bd. 43, pp. 1-25, 1933; c) *Lo spazio funzionale analitico come spazio topologico* T_0 , Rend. Mat. R. Università di Roma, vol. 1, Serie 5, pp. 84-90, 1940.

la clase de equivalencia módulo F determinada por la función $af(z)$, $z \in \mathcal{A}(f)$, donde $f(z)$ es una función de la clase $\mathcal{F}$, y si $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2 \in \Omega[F]$, indicaremos con $\mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_2$ la clase de equivalencia módulo F determinada por la función $f_1(z) + f_2(z)$, $z \in \mathcal{A}(f_1) \cap \mathcal{A}(f_2)$, donde $f_1(z)$ y $f_2(z)$ son funciones de las clases $\mathcal{F}_1$ y $\mathcal{F}_2$ respectivamente. Es obvio que estas operaciones lineales están «bien definidas módulo F ».

Podemos también introducir una topología límite $T(F)$ en $\Omega[F]$ del siguiente modo: si $\mathcal{F}, \mathcal{F}_m \in \Omega[F]$ ($m=0, 1, 2, \dots$) diremos que $\mathcal{F}_m \rightarrow \mathcal{F}$ según $T(F)$ si y solamente si existen funciones $f(z) \in \mathcal{F}$, $f_m(z) \in \mathcal{F}_m$ ($m=0, 1, 2, \dots$) y un conjunto abierto $\mathcal{A}$ tales que:

1. $F \subset \mathcal{A} \subset \mathcal{A}(f)$.
2. $F \subset \mathcal{A} \subset \mathcal{A}(f_m)$ ($m=0, 1, 2, \dots$).
3. $f_m(z) \rightarrow f(z)$ uniformemente para $z \in \mathcal{A}$.

De esta manera $\Omega[F]$ pasa a ser un espacio topológico lineal (en el sentido de la teoría de los espacios límites) no metrizable.

Para cada $\delta > 0$, sea $F(\delta)$ el conjunto de los puntos z del plano complejo tales que: $\text{dist.}(z, F) \leq \delta$. Además de eso, para cada $\delta > 0$ y cada $\mathcal{F} \in \Omega[F]$ definamos $\phi(\mathcal{F}; \delta)$ del siguiente modo:

1. $\phi(\mathcal{F}; \delta) = +\infty$ si no existe $f(z) \in \mathcal{F}$ tal que $\mathcal{A}(f) \supset F(\delta)$.
2. $\phi(\mathcal{F}; \delta) = \sup_{z \in F(\delta)} |f(x)|$ si existe por lo menos una $f(z) \in \mathcal{F}$ tal que $\mathcal{A}(f) \supset F(\delta)$.

Evidentemente cada $\phi(\mathcal{F}; \delta)$ es una norma en el espacio lineal $\Omega[F]$, sobre el cual ella induce la topología límite $T(\delta)$. Para simplificar la notación, no está indicado que $\phi(\mathcal{F}; \delta)$ y $T(\delta)$ dependen de F . Es también inmediato que:

$$T(F) = \lim_{\delta > 0} UT(\delta),$$

o también que:

$$T(F) = U_0 \lim_{\delta_n} T(\delta_n), \quad (13)$$

donde δ_n ($n=0, 1, 2, \dots$) indica una sucesión decreciente de números positivos tales que $\delta' > \delta > \delta''$. Vamos a probar que

$$T(\delta) > [T(\delta'), T(\delta'')]. \quad (14)$$

En efecto, en virtud del teorema de los tres círculos de Hadamard⁽¹⁵⁾, tenemos

$$\phi(\mathcal{F}; \delta) \leq [\phi(\mathcal{F}; \delta')]^\alpha [\phi(\mathcal{F}; \delta'')]^\beta, \quad \mathcal{F} \in \Omega[F],$$

donde

$$\alpha = \frac{\log(\delta'/\delta)}{\log(\delta'/\delta'')}, \quad \beta = \frac{\log(\delta/\delta'')}{\log(\delta'/\delta'')}.$$

Indicando con $\varphi(\varepsilon)$ el extremo superior de $\phi(\mathcal{F}; \delta)$ para todo $\mathcal{F} \in \Omega[F]$ tal que $\phi(\mathcal{F}; \delta') \geq 1, \phi(\mathcal{F}; \delta'') \leq \varepsilon$, donde $0 < \varepsilon < +\infty$, obtenemos

$$\varphi(\varepsilon) \leq \varepsilon^\beta \rightarrow 0 \quad (\varepsilon \rightarrow 0)$$

lo que prueba (14). Las relaciones (13) y (14), el hecho de que las topologías que figuran en el segundo miembro de (13), constituyen una sucesión monótona y el Teorema 2 permite afirmar que el espacio $\Omega[F]$ con la topología $T(F)$ satisface al axioma de las sucesiones no convergentes.

Una circunstancia curiosa es que el teorema de los tres círculos de Hadamard es exactamente el instrumento necesario para constatar la relación ternaria entre topologías normables expresada por «una topología contiene el par ordenado de otras dos topologías».

Podemos, por tanto, concluir con el siguiente

Teorema 6. *Sean $f(z), f_m(z) \in \Omega(F)$ ($m=0, 1, 2, \dots$). Si de toda sucesión de esta sucesión es posible extraer una subsucesión ulterior Σ tal que exista un conjunto abierto $\mathcal{A}$ conteniendo F para el cual $f(z)$ y los términos de Σ puedan ser prolongados analíticamente módulo F de manera que las pro-*

⁽¹⁵⁾ BIEBERBACH, *loc. cit.*, p. 126. Siendo $f(z)$ una función holomorfa sobre el conjunto cerrado F , r un número positivo menor que la distancia de este conjunto a la frontera del conjunto abierto en que esta función está definida, y $M(r)$ el módulo máximo de $f(z)$ en $F(r)$ entonces $M(r)$ satisface a la misma desigualdad que en el caso en que F se reduce a un punto.

longaciones de los términos de Σ sean uniformemente convergentes en $\mathcal{A}$ hacia la prolongación de $f(z)$, entonces existe un conjunto abierto fijo $\mathcal{A}^*$ conteniendo F para el cual $f(z)$ y los términos de la sucesión dada pueden ser prolongados analíticamente módulo F de modo que las prolongaciones de estos términos sean uniformemente convergentes en $\mathcal{A}^*$ hacia la prolongación de $f(z)$.

NÚCLEO DE MATEMÁTICA
FUNDAÇÃO GETULIO VARGAS
RIO DE JANEIRO, BRASIL.

BIBLIOGRAFIA

PEDRO PÍ CALLEJA. *Introducción al álgebra vectorial*. Publicación de la Facultad de Ciencias de la Universidad Nacional de Cuyo. Buenos Aires 1945.

Como dice muy bien el Dr. Rey Pastor, en el breve y jugoso prólogo del libro que comentamos, el profesor Pí Calleja da en él mucho más de lo que promete con su título, no sólo por que hace un estudio casi completo del álgebra vectorial, e incluye también el álgebra tensorial, sino por que en todo él se abren ventanas hacia las más elevadas especulaciones de la matemática y de la física contemporáneas.

La idea esencial del libro es, según las propias palabras del autor: “aunar la interpretación física y geométrica del concepto de vector que da una visión sintética y directa de gran parte de la Matemática útil a la Física elemental y a la Técnica, con el profundo significado que para la Matemática pura y la Física teórica moderna tiene el concepto abstracto de vector”.

El capítulo I, dedicado al concepto de vector, se inicia con un estudio de los sistemas de coordenadas cartesianas, definiendo con precisión no habitual las orientaciones de los ejes; sigue con un estudio preciso y riguroso del concepto de igualdad, y da la definición clásica de vector en el espacio ordinario, así como la distinción entre vectores libres, axiales y fijos. Entra a continuación en la definición axiomática de los vectores, dando en una introducción, en forma concisa y clara, la esencia y sentido, de la axiomatización de una teoría matemática, y de la interpretación concreta y aplicación de la misma; el espacio vectorial abstracto se define mediante catorce axiomas, dando las interpretaciones de algunos de ellos para la anterior definición de los vectores, e igualmente se dan ejemplos de operaciones matemáticas que no verifican algunos de esos axiomas. Define a continuación la independencia lineal de los vectores, para poder introducir los axiomas de la dimensión para la recta, el plano, el espacio ordinario y el espacio n -dimensional. A partir de ese momento todo el cálculo vectorial se desarrolla como una serie de consecuencias lógicas de los axiomas. Define después las coordenadas vectoriales mediante vectores linealmente independientes, e introduce axiomáticamente el espacio puntual y