longaciones de los términos de Σ sean uniformemente convergentes en $\mathscr{A}$ hacia la prolongación de $f(z)$, entonces existe un conjunto abierto fijo $\mathscr{A}^*$ conteniendo F para el cual $f(z)$ y los términos de la sucesión dada pueden ser prolongados analíticamente módulo F de modo que las prolongaciones de estos términos sean uniformemente convergentes en $\mathscr{A}^*$ hacia la prolongación de $f(z)$.

NÚCLEO DE MATEMÁTICA
FUNDAÇÃO GETULIO VARGAS
RIO DE JANEIRO, BRASIL.

BIBLIOGRAFIA

PEDRO PÍ CALLEJA. *Introducción al álgebra vectorial.* Publicación de la Facultad de Ciencias de la Universidad Nacional de Cuyo. Buenos Aires 1945.

Como dice muy bien el Dr. Rey Pastor, en el breve y jugoso prólogo del libro que comentamos, el profesor Pí Calleja da en él mucho más de lo que promete con su título, no sólo por que hace un estudio casi completo del álgebra vectorial, e incluye también el álgebra tensorial, sino por que en todo él se abren ventanas hacia las más elevadas especulaciones de la matemática y de la física contemporáneas.

La idea esencial del libro es, según las propias palabras del autor: "aunar la interpretación física y geométrica del concepto de vector que da una visión sintética y directa de gran parte de la Matemática útil a la Física elemental y a la Técnica, con el profundo significado que para la Matemática pura y la Física teórica moderna tiene el concepto abstracto de vector".

El capítulo I, dedicado al concepto de vector, se inicia con un estudio de los sistemas de coordenadas cartesianas, definiendo con precisión no habitual las orientaciones de los ejes; sigue con un estudio preciso y riguroso del concepto de igualdad, y da la definición clásica de vector en el espacio ordinario, así como la distinción entre vectores libres, axiales y fijos. Entra a continuación en la definición axiomática de los vectores, dando en una introducción, en forma concisa y clara, la esencia y sentido, de la axiomatización de una teoría matemática, y de la interpretación concreta y aplicación de la misma; el espacio vectorial abstracto se define mediante catorce axiomas, dando las interpretaciones de algunos de ellos para la anterior definición de los vectores, e igualmente se dan ejemplos de operaciones matemáticas que no verifican algunos de esos axiomas. Define a continuación la independencia lineal de los vectores, para poder introducir los axiomas de la dimensión para la recta, el plano, el espacio ordinario y el espacio n-dimensional. A partir de ese momento todo el cálculo vectorial se desarrolla como una serie de consecuencias lógicas de los axiomas. Define después las coordenadas vectoriales mediante vectores linealmente independientes, e introduce axiomáticamente el espacio puntual y las relaciones entre puntos y vectores. El capítulo termina con un estudio de las multiplicidades vectoriales lineales, limitándose a la recta y al plano del espacio multidimensional. Las cualidades de claridad y precisión en el lenguaje, características de la obra que analizamos, alcanzan su máximo en la exposición de este primer capítulo.

El capítulo II está dedicado al producto interno o escalar. Se inicia con la definición a partir de los axiomas y de los conceptos de distancia y ángulo; luego se define el producto escalar y se estudian sus propiedades. A continuación se estudian las transformaciones ortogonales, probando la invariancia del producto escalar, de la distancia y del ángulo en todos los sistemas ortogonales de coordenadas. Estudia después la ortogonalización de vectores, y termina el capítulo con el estudio le las ecuaciones normales de la recta y del plano.

El capítulo III se denomina área y volumen: se define, mediante sus propiedades características, el volumen determinado en el espacio n-dimensional por un grupo de n vectores. En este capítulo se utiliza el concepto de determinante y se muestra como éstos pueden estudiarse, sea partiendo de la clásica definición polinómica, sea de su definición mediante sus propiedades características. Se estudia también con mucho cuidado y precisión el signo de las áreas y volúmenes.

El capítulo IV está dedicado al producto vectorial o externo, y a los productos compuestos o mixtos; el estudio se limita al caso del espacio tridimensional y se dan una serie de aplicaciones de estos conceptos a la geometría y a la física. Entre estas aplicaciones figura el resultado clásico de que un sistema de vectores deslizantes se reduce a un vector y a un par. Creemos que, dada su importancia, este punto debiera haber merecido un examen más detallado.

El capítulo V, titulado: "Los espacios lineales y las multiplicidades vectoriales en el estudio de las magnitudes físicas", se inicia con un estudio muy resumido y elegante de los espacios abstractos y de la utilidad y necesidad de estos en la física contemporánea. Es claro que al dar en ocho páginas tal resumen tienen que presentarse forzosamente algunas lagunas, en particular nos parece que no ha sido puesto suficientemente en relieve la importancia básica del concepto de punto de acumulación. Creemos, por otra parte que hubiera sido conveniente estudiar en este capítulo, con mayor detalle los ejemplos de espacios vectoriales de infinitas dimensiones con lo que se hubiera puesto más en claro el interés del método axiomático. Sigue después el capítulo con el estudio de las multiplicidades vectoriales de m dimensiones en el espacio vectorial n-dimensional; estudia a continuación, utilizando la interpretación vectorial de los sistemas de ecuaciones lineales, la referencia de las multiplicidades a bases distintas. Termina el capítulo con un estudio del álgebra vectorial de las magnitudes físicas de gran interés por la forma muy clara y rigurosa en que se trata el problema de los sistemas de unidades en física.

El capítulo VI se titula Tensores; se inicia con la definición del tensor en el espacio tridimensional como una función vectorial lineal homogénea de la dirección, y se muestra el origen de este concepto en los problemas de la resistenria de materiales; se definen a continuación la suma de tensores, el producto de un escalar por un tensor y el prodncto de un tensor por un vector, de acá se muestra como puede también definirse el tensor como un operador lineal entre vectores. Luego se estudia el tensor obtenido mediante la derivación en un campo vectorial y se pasa a la definición de tensor de rango n. Se trata después la forma bilineal correspondiente a un tensor y se demuestra la descomposición de un tensor cualquiera en la suma de un tensor simétrico y otro antisimétrico. Se estudia luego el tensor en el espacio n-dimensional, como operador lineal y se da para ello un estudio elegante y resumido del cálculo de matrices. Termina el capítulo con un breve resumen de la sistematización de la geometría mediante la teoría de grupos, estudiándose en particular las geometrías métrica, afín y proyectiva en el espacio n-dimensional.

Al final de cada uno de los capítulos hay un grupo de ejercicios que, en muchos casos, no son solo aplicaciones de las teorías expuestas sino ampliaciones y complementos de las mismas. Termina el libro con una completa y bien ordenada bibliografía. Se debe también hacer resaltar la ventaja de haber adoptado una notación vectorial muy sencilla.

En resumen se trata de una obra, cuya lectura es recomendable aún para aquellos que ya conozcan ampliamente el tema y de indiscutible interés científico.

Pero si el interés científico del libro es indiscutible, es posible que sea discutido por algunos su valor didáctico. El autor es profesor universitario en la Escuela de Ingeniería de San Juan, y se trasluce claramente que ha escrito el libro con una finalidad esencialmente didáctica.

Es posible que el libro sea considerado difícil por esa parte del estudiantado que desea únicamente conocer lo menos posible con el mínimo de esfuerzo, y que, al estudiar una teoría, sólo les interesa el saber si será o no pregunta de exámen es posible también que no sea adecuado para aquellos profesionales que sólo quieren conocer lo inmediatamente utilizable en problemas técnicos de menor cuantía, pero, en cambio, es útil, adecuado e interesante para los estudiantes universitarios que vayan a las aulas movidos esencialmente por el afán de aprender y para aquellos profesionales que se den cuenta de la necesidad de ampliar su bagaje de conocimientos matemáticos para poder profundizar en los problemas, cada vez más intrincados, de la técnica moderna. Para los que creemos que la misión esencial de la enseñanza universitaria es la de selección y no la nivelación por lo bajo, el libro del profeosr Pí Calleja cumple su finalidad didáctica.

Los lectores que ya tengan conocimientos de matemática universitaria, podrán perfectamente abordar el libro en lectura aislada. En cambio es posible que esta lectura sea difícil para los alumnos que se inicien en la enseñanza universitaria, y desde luego no sirve para aquellos que asisten rara vez a las aulas y ''preparan'' el exámen en quince días de lecturas precipitadas, pero puede muy bien servir de libro de iniciación si se lo estudia simultáneamente con las explicaciones del profesor, y como ésta es la única forma seria de trabajar en la Universidad, esto nos afirma en la idea de que el libro cumple plenamente su finalidad didáctica de carácter formativo y no informativo.

Sólo nos queda felicitar al autor y a la Universidad de Cuyo por la aparición de esta obra, una de las aportaciones más serias a la bibliografía matemática en lengua castellana de los últimos tiempos.

Manuel Balanzat