LES FONCTIONS ENTIÉRES D'ORDRE NUL(*)

par GEORGES VALIRON

Professeur à la Faculté des Sciences de Paris

Les fonctions entières d'ordre nul ont été d'abord peu étudieés, parce que les questions que l'on pourait se poser à leur sujet étaient immédiatement résolues. Si la fonction est donnée par son développement taylorien,

$$f(z)=c_0+c_1 z+\ldots+c_n z^n+\ldots$$

pour qu'elle soit d'ordre nul, il faut et il suffit que

$$\lim_{n=\infty}\frac{-\log|c_n|}{n\log n}=+\infty.$$

Dans ces conditions, $f(z)$ a une infinité de zéros et sa décomposition en facteurs est de la forme

$$\gamma z^m\prod_1^\infty\left(1-\frac{z}{a_n}\right),$$

la série

$$\sum_1^\infty\frac{1}{|a_n|^\varepsilon}$$

est convergente quel que soit $\varepsilon>0$. Mais dés que la théorie des fonctions d'ordre fini se précisa, on chercha à résoudre des

(*) Segunda clase (30 de mayo de 1946) del cursillo sobre *Funciones enteras* dictado en el Instituto de Matemática de la Universidad de Buenos Aires.

questions analogues pour les fonctions d'ordre nul. On étudia des classes de ces fonctions en utilisant des fonctions de comparaison. Par exemple, on rencontre dans certaines questions des fonctions pour lesquelles $\log M(r)$ est comparable à $(\log r)^2$. Il est permis de supposer que

$$\log M(r) \sim A\,(\log r)^2, \qquad A \text{ fixé.}$$

Le rang du terme maximum de la série de Taylor sera donné par

$$\int_0^r \frac{\nu(x)\,dx}{x} \sim A\,(\log r)^2,$$

ceci se résout sous la forme

$$\nu(r) \sim 2A \log r\,;$$

on en déduit

$$R_n = e^{(1+\varepsilon)\frac{n}{2A}}, \qquad e^{G_n} = e^{(1+\varepsilon)\frac{n^2}{4A}},$$

ε tendant vers zéro lorsque n croît indéfiniment. Autrement dit

$$\lim_{n=\infty} e^{\frac{G_n}{n^2}} = e^{\frac{1}{4A}}.$$

C'est une condition nécessaire et suffisante. En passant aux c_n, on a

$$\overline{\lim_{n=\infty}} |c_n|^{\frac{1}{n^2}} = e^{-\frac{1}{4A}}; \quad \lim_{p=\infty} |c_{n_p}|^{\frac{1}{n_p{}^2}} = e^{-\frac{1}{4A}}, \text{ avec } \lim_{p=\infty} \frac{n_{p+1}}{n_p} = 1.$$

Plus généralement, on pourrait transposer les résultats relatifs aux fonctions d'ordre fini positif, en faisant la transformation $\log r = X$, et introduire un ordre précisé. On atteindrait la classe des fonctions pour lesquelles

$$0 < \overline{\lim_{r=\infty}} \frac{\log \frac{\log M(r)}{\log r}}{\log_2 r} < \infty.$$

Si l'on veut donner des conditions permettant de déterminer $\log M(r)$ asymptotiquement, il semble bien qu'il soit nécessaire d'introduire une infinité de classes, mais si l'on cherche une précision moindre, on peut traiter simultanément toutes les fonctions (Voir Bulletin des sciences math., octobre 1935).

Je me borne aussi à signaler en passant que, si les coefficients c_n sont différents de zéros à partir d'une valeur de n et si l'on a alors

$$\left|\frac{c_n{}^2}{c_{n-1}\, c_{n+1}}\right| \geqq k^2 > 1,$$

on a pour $|z| = k R_n$, $R_n = \dfrac{c_{n-1}}{c_n}$, et n assez grand,

$$f(z) = c_n z^n [1 + \vartheta(z) H(k)], \quad |\vartheta(z)| < 1,$$

$$H(k) = 2 \sum_1^\infty k^{-n^2}.$$

Il s'ensuit que, si $H(k) < 1$, les zéros de $f(z)$ sont séparés par les cercles $|z| = k R_n$, dès que n est assez grand. Ce résultat est à rapprocher de propositions d'algèbre de M. Rey Pastor et San Juan.

Avant de poursuivre, il convient de montrer que l'on rencontre effectivement des fonctions d'ordre nul dans certaines recherches. Hadamard avait déjà signalé la fonction

$$\sum_0^\infty q^{n^2} z^n, \quad |q| < 1$$

que l'on rencontre dans la théorie des fonctions elliptiques. Pour cette fonction, on a

$$\log M(r) \sim \frac{(\log r)^2}{4 \log \left|\frac{1}{q}\right|}.$$

En fait, on sait qu'on peut ramener la théorie des fonctions elliptiques à la théorie des fonctions invariantes par la substitution (z, kz) où $|k| > 1$. La fonction de base est alors la fonction entière d'ordre nul

$$\varphi(z) = \prod_1^\infty \left(1 - \frac{z}{k^n}\right)$$

qui vérifie l'équation fonctionnelle

$$\varphi(kz) = (1 - z)\,\varphi(z).$$

Une classe de fonctions d'ordre nul voisines de celles-ci est fournie par certaines fonctions de Poincaré, définies dans son Mémoire sur une classe nouvelle de fonctions transcendantes (J. de math., 1891). L'équation fonctionnelle

$$(1) \qquad f(az) = P(f(z), z)$$

où P est un polynôme à deux variables $P(x, y)$, et a une constante de module supérieure à 1, admet une solution qui est une fonction entière, pourvu que le calcul formel des coefficients soit possible. On devra avoir

$$c_0 = P(c_0, 0), \quad a^q \neq \frac{\partial P}{\partial x}(c_0, 0) \qquad q = 1, 2, \ldots$$

Si le degré p de P par rapport à x est supérieur à 1, on obtient une fonction d'ordre $\dfrac{\log p}{\log |a|}$; si $p = 1$, on a une fonction d'ordre nul et

$$\log M(r) \sim \frac{m}{2 \log |a|} (\log r)^2,$$

m étant le degré du polynôme coefficient de $f(z)$ dans le second membre de (1).

Plus généralement, la solution de

$$P_1(z) f(az) + P_2(z) f(z) + P_3(z) = 0,$$

où les $P_j(z)$ sont des polynômes, sera en général une fonction méromorphe quotient de deux fonctions entières d'ordres nuls.

A ces fonctions, on peut ajouter celles qui sont définies par l'équation différentielle fonctionnelle

$$f'(zs) = P(z) f(z) + Q(z), \quad |s| > 1,$$

P et Q étant des polynômes. La méthode des fonctions majorantes s'applique encore et montre que cette équation admet des fonctions entières pour solutions. Ce sont encore des fonctions d'ordre nul du type analogue aux précédents.

On doit observer à ce sujet que, dans le cas des équations différentielles ordinaires, il a été démontré que les solutions des équations linéaires à coefficients polynomiaux qui sont des fonctions entières sont d'ordre fini positif et rationnel, et que les solutions des équations algébriques du premier ordre, $G(x, y, y')=0$ où G est un polynôme à trois variables, qui sont des fonctions entières sont d'ordre fini. Ceci avait conduit Polya à penser qu'une fonction d'ordre nul ne peut pas être solution d'une équation différentielle algébrique d'ordre quelconque. J'ai établi (Comptes Rendus, 1925) que la fonction

$$F(u)=S(z), \qquad z+\frac{1}{z}=u, \qquad S(z)=\sum_{-\infty}^{+\infty} q^{n^2} z^n, \qquad |q|<1,$$

qui est une fonction entière d'ordre nul, car

$$S(z)=A\prod_0^\infty (1+zq^{2n+1})\left(1+\frac{q^{2n+1}}{z}\right)=A'\prod_0^\infty\left(1+\frac{uq^{2n+1}}{1+q^{4n+2}}\right),$$

A et A' étant des constantes, est solution d'une équation différentielle algébrique du 3^e. ordre. Car, si l'on pose

$$Z(z)=z\frac{S'(z)}{S(z)}, \qquad P(z)=-zZ'(z),$$

$P(z)$ vérifie l'équation

$$z^2P'^2=4(P+c)^3-G_2(P+c)-G_3,$$

c, G_2, G_3 étant des constantes.

Existe-t-il des fonctions d'ordre nul qui sont solutions d'équations différentielles du second ordre algébriques. J'ai montré qu'il n'y en a pas pour lesquelles

$$\log M(r)<\frac{\log r \,.\, \log_2 r}{\log 4},$$

mais ne peut-on pas aller plus loin (Voir Bulletin Société Math., 1925);

Si la fonction $f(z)$ vérifie l'équation différentielle algébrique

$$P(z, f, f', f'', f''') = 0,$$

la fonction iterée $F = f(f(z))$ vérifiera une équation différentielle algébrique du sixième ordre. Si l'on a

$$\log M(r, f) \sim H (\log r)^2, \qquad H = \text{constante},$$

on aura, comme conséquence de théorèmes généraux sur le comportement des fonctions entières dans le voisinage des points de module maximum,

$$\log M(r, f(f)) \sim H_1 \log r)^4, \quad H_1 = \text{constante}.$$

On pourra continuer ces opérations.

J'ai indiqué (Annales de Toulouse, 1913), d'autres fonctions entières d'ordre nul, à croissance plus lente que les précédentes, qui vérifient des équations fonctionnellecs simples. La plus simple est

$$\varphi(z) = \prod_0^\infty \left(1 - \frac{z}{a^{2^n}}\right), \quad |a| > 1,$$

pour laquelle

$$\varphi(z^2) = \left(1 - \frac{z^2}{a}\right) f(z)\, \varphi(-z).$$

On pourra en déduire d'autres par des transformations déjà utilisées.

Ayant montré que l'on rencontra des fonctions d'ordre nul, nous allons en indiquer des propriétés assez suggestives, notamment pour celles qui vérifient la condition

$$\text{(2)} \qquad \overline{\lim_{r=\infty}} \frac{\log M(r)}{(\log r)^2} < +\infty.$$

Si $f(z)$ est d'ordre nul, $f(0)=1$ pour simplifier l'exposé, et a_n le n-ième zéro, on a

$$f(z)=\prod_1^\infty\left(1-\frac{z}{a_n}\right)$$

Si $n(x)$ est le nombre des zéros de module inférieur ou égal à x, on a

$$\log M(r)\leqq\sum_1^\infty\log\left(1+\frac{r}{|a_n|}\right)=\int_0^\infty\frac{rn(x)}{x(x+r)}\,dx,$$

et par suite

$$\log M(r)<\int_0^r\frac{n(x)}{x}\,dx+r\int_r^\infty\frac{n(x)dx}{x^2},$$

ce qui, joint à l'inégalité de Jensen, donne

$$(3)\qquad \log M(r)=\int_0^r\frac{n(x)}{x}\,dx+\vartheta r\int_r^\infty\frac{n(x)dx}{x^2},\quad 0<\vartheta<1.$$

Lorsque

$$\log M(r)<(K\log r)^2,\ K \text{ constante finie}$$

l'inégalité de Jensen montre que

$$n(r)<K'(\log r),\quad K' \text{ fini}$$

et inversement cette inégalité entraîne (2), en vertu de (3). Les fonctions (2) sont aussi caractérisées par

$$\overline{\lim_{r=\infty}}\frac{n(r)}{\log r}<\infty.$$

L'égalité (3) montre que, pour ces fonctions

$$(4)\qquad \log M(r)\sim\int_0^r\frac{n(x)}{x}\,dx\quad(|f(0)|\neq0).$$

Pour étudier ces fonctions, on utilise un théorème de Boutroux sur les polynômes qui a été complété par Henri Cartan en 1928. Dans le cas actuel, le théorème de Boutroux suffirait. Voici le théorème de Cartan: si $P(z)$ est un polynôme canonique de degré n:

$$P(z) \equiv (z - a_1) \dots (z - a_n)$$

et si H est donné positif, on a

$$|P(z)| > \left(\frac{H}{e}\right)^n, \quad e \text{ base des logarithmes,}$$

pourvu que l'on se place à l'extérieur de n cercles dont la somme des rayons est $2H$ au plus. (Voir Mémorial des Sciences math., n°. 89, p. 11).

Considérons alors une fonction d'ordre nul, donnons-nous une fonction $\beta(x)$ décroissante tendant vers zéro mais supérieure à $\dfrac{1}{x}$ et considérons les circonférences $|z| = R_m$, R_1 étant donné et

$$R_{m+1} = (1 + \beta(R_m))\, R_m.$$

On supposera que le point z est dans la couronne D_m:

$$R_m \leqq |z| \leqq R_{m+1}$$

et extérieur à des régions entourant les zéros et on calculera une borne inférieure de $|f(z)|$. Les termes génants dans $f(z)$ sont ceux pour lesquels $|z - a^n|$ est petit ou plutôt relativement petit. Si l'on pose

$$R'_m = R_m\,(1 - \beta(R_m)), \qquad R''_m = R_m\,(1 + 2\beta(R_m)),$$

le nombre des zéros dans la couronne

$$R'_m \leqq |z| \leqq R''_m$$

est $m_2 - m_1$, avec $m_2 = n(R''_m)$, $m_1 = n(R'_m)$. D'après le théorème de Cartan, on aura

$$(5) \qquad \left|\prod_{m_1+1}^{m_2}\left(1-\frac{z}{a_n}\right)\right| > \frac{1}{(R''_m)^{m_2-m_1}}\left(\frac{H}{e}\right)^{m_2-m_1} = \left(\frac{H}{eR''_m}\right)^{m_2-m_1}$$

à l'extérieur de $m_2 - m_1$ cercles contenant les zéros, dont la somme des rayons est au plus $2H$. On prendra :

$$H = R_m\,(\beta(R_m))^2$$

ce qui assurera que la région non exclue dans la couronne D_m contient des couronnes de centre origine puisque l'épaisseur de la couronne est $R_m\,\beta(R_m)$ et que chaque région exclue peut être enfermée dans un cercle dont le rayon est au plus égale à la distance du centre à l'origine multplieé par un facteur infiniment petit.

Le logarithme du premier membre de (5) sera supérieur à

$$-(m_2 - m_1)\,K \log \frac{1}{\beta(R_m)}$$

K étant une constante indépendante de m. On a d'autre part

$$(6) \qquad \left|\prod_{1}^{m_1}\left(1-\frac{z}{a_n}\right)\right| \geq \prod_{1}^{m_1}\left(\frac{r}{|a_n|}-1\right) = \frac{r^{m_1}}{|a_1 \ldots a_{m_1}|}\prod_{1}^{m_1}\left(1-\frac{|a_n|}{r}\right);$$

dans le premier facteur on peut remplacer m_1 par $n(r)$ à la condition de multiplier par

$$\left(\frac{1-\beta(R_m)}{1+\beta(R_m)}\right)^{m_2-m_1},$$

dans le second facteur, on a

$$\frac{|a_n|}{r} < 1 - \beta\,(R_m),$$

de sorte que le logarithme du premier membre de (6) est supérieur à

$$\int_0^r \frac{n(x)dx}{x} - (m_2 - m_1)\,K' \log \frac{1}{\beta(R_m)},$$

K' étant indépendant de m.

Enfin, dans le produit

$$\left|\prod_{m_2+1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{a_n}\right)\right| > \prod_{m_2+1}^{\infty}\left(1-\frac{r}{|a_n|}\right) =$$

$$= e^{\sum\limits_{m_2+1}^{\infty}\log\left(1-\frac{2}{|a_n|}\right)} > e^{-\sum\limits_{m_2+1}^{\infty}\left(\frac{1}{|a_n|}+\dots\right)}$$

on a

$$\frac{r}{|a_n|} < \frac{1+\beta(R_m)}{1+2\beta(R_m)} \quad ;$$

le logarithme de ce produit est supérieur à

$$-\frac{1+2\beta(R_m)}{\beta(R_m)}\, r \sum_{m_2+1}^{\infty}\frac{1}{|a_n|} \;,$$

et le dernier Σ est au plus égal à

$$\int_r^{\infty}\frac{n(x)dx}{x^2}.$$

En rassemblant ces résultats, et tenant compte de l'inégalité

$$\int_r^{\infty}\frac{n(x)dx}{x^2} > \int_{R''_m}^{\infty}\frac{n(x)dx}{x^2} > n\,(R_m'')\,\frac{1}{R_m''},$$

on arrive à l'inégalité

$$(7) \quad \log|f(z)| > \int_0^r \frac{n(x)}{x}\,dx - \frac{K''r}{\beta(R_m)}\int_r^{\infty}\frac{n(x)dx}{x^2}, \quad K'' \text{ fixe,}$$

valable dans D_m, dans la région dont il a été question.

Pour les fonctions satisfaisant à la condition (2), $n(x)$ est inférieur à $K_1 \log x$ et

$$r\int_r^{\infty}\frac{n(x)dx}{x^2} < K_1\,(\log r + 1).$$

Le rapport de

$$r\int_r^{\infty}\frac{n(x)dx}{x^2}, \quad à \quad \int_0^{r}\frac{n(x)}{x}\,dx$$

tend vers zéro, on peut choisir $\beta(R_m)$ pour que, en dehors des petites régions exclues, on ait, eu égard à (3)

$$\log|f(z)|\sim\int_0^{r}\frac{n(x)dx}{x^2}\,dx\sim\log M(r), \qquad r=|z|. \tag{8}$$

Donc

Si $\dfrac{\log M(r)}{(\log r)^2}$ reste borné, on peut tracer des cercles contenant les zéros, vus de l'origine sous un angle qui tend vers zéro lorsque le centre s'eloigne indéfiniment et tels que, à l'éxtérieur de ces cercles, on ait les égalités (8). Le domaine non exclu contient des couronnes de centre origine.

Les points en lesquels

$$f(z)=Z \tag{9}$$

sont dans les régions exclues dès que z est assez grand. Le problème de la distribution des points racines de l'équation (9) est résolu pour ces fonctions d'une façon très précise. Le résultat contient un théorème général donné plus tard par Julia.

Lorsque la condition (2) n'est pas vérifieé, on ne peut plus affirmer que le rapport

$$r\int_r^{\infty}\frac{n(x)}{x^2}\,dx : \int_0^{r}\frac{(x)u}{x}\,dx \tag{10}$$

tend vers zéro, mais on démontre aisément que sa limite inférieure pour r infini est nulle (Voir: Lectures on the general theory of integral functions) et l'on obtient un théorème de Littlewood:

Pour toute fonction entière d'ordre nul, il existe une suite de cercles de rayons indéfiniment croissants sur checun desquels le logarithme du module de la fonction est «asymptotiquement» egal à son maximum.

Par toutes les fonctions d'ordre nul à croissance assez régulière, le rapport (10) tend vers zéro et le théorème relatif aux fonctions vérifiant (2) reste valable.

Mais si la croissance est assez irrégulière, le théorème n'est plus vrai. J'ai donné (Annales Faculté de Toulouse, 1913) l'exemple suivant

$$(11) \qquad F(z) = \prod_1^\infty \left(1 - \frac{z}{e^{2^{2^p}}}\right)^{(2^{2^p})^4} \quad ;$$

$F(z)$ est bornée dans des cercles qui ne sont pas vus de l'origine sous un angle qui tend vers zéro lorsque le centre s'éloigne indéfiniment. Ce fait tient à ce que la distribution des zéros est assez particulière, au point de vue des propriétés des points z en lesquels $f(z) = Z$, la valeur $Z = 0$ apparaît comme exceptionnelle (Voir le mémoire cité).

Les fonctions satisfaisant à la condition (2) jouissent d'une autre propriété qui est également suggestive et qu'on déduit de l'étude de la dérivée logarithmique

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_1^\infty \frac{1}{z - a_n} \, .$$

Dans cette étude il faut encore éliminer le voisinage des points a_n qui sont des pôles; on le fait encore de la même façon, en utilisant des inégalités obtenues au cours de la demonstration du théorème de Cartan (Voir, Mémorial des Sc. Math., fasc. 89, haut de la page 12). On trouve que pour toute fonction vérifiant la condition de croissance

$$(12) \qquad \lim_{z=\infty} \frac{\log(\log M(r, f))}{\sqrt{\log r}} = 0$$

il existe des circonférences $|z| = c^{te}$ de rayons indéfiniment croissants, sur chacune desquelles on a

$$\frac{f'(z)}{f(z)} \sim \frac{n(|z|)}{z} \tag{13}$$

$$\log |f(z)| \sim \log M(|z|, f) \tag{14}$$

(Voir Compositio math., vol. 3, 1936, p. 129). Considérons alors les domaines Δ_m dans lesquels $|f(z)| < A$, A étant un nombre donné très grand arbitraire, ils ne coupent pas les circonférences sur lesquelles (14) a lieu. Lorsque le point z décrit Δ_m, le point $Z = f(z)$ décrit dans le plan des Z un disque $|Z| < A$ a un ou plusieurs feuillets. Mais, d'après (13), les fonctions $f(z)$ et $f'(z)$ ont le même nombre de zéros entre deux des circonférences en question; il existe donc l'un des Δ_m compris entre ces circonférences pour lequel $f'(z)$ n'a pas plus de zéros que $f(z)$ et par suite un feuillet de la surface de Riemann décrite par Z lorsque z est dans Δ_m sur lequel il n'y a que deux points de ramification. On a donc le résultat suivant que l'on obtient en faisant croître A:

Si $f(z)$ est une fonction entière vérifiant la condition (12), il existe une suite de domains D_m dans chacun desquels $f(z)$ est univalente, dans D_m, $f(z)$ prend toutes les valeurs Z telles que $|Z| < A_m$ sauf celles appartenant à deux segments au plus obtenus en joignant deux points de ce cercle à la circonférence, A_m croît indéfiniment avec m. En outre, si la condition (2) est réalisée ou si le rapport (10) tend vers zéro, D_m peut être enfermé dans un cercle qui est vu de l'origine sous un angle qui tend vers zéro lorsque m croît indéfiniment.

Ce résultat s'étend à toutes les fonctions d'ordre nul (Voir l'artcile cité de Compositio Math.). Mais lorsque le rapport (10) ne tend pas vers zéro, D_m peut ne plus être contenu dans un cercle vu de l'origine sous un angle qui tend vers zéro, c'est ce que montre l'exemple (11). Mais il semble que cette propriété dimensionnelle subsiste à condition d'enlever de D_m une portion représenté dans un cercle de rayon très petit dans $|z| < A_m$. Et ceci doit être vrai pour toutes les fonctions entières d'ordre inferieur à $\dfrac{1}{2}$.

LE THEOREME DE PICARD (*)

Les mathématiciens de la première moitiè du 19[e] siècle et des anneés jusqu'à 1860 avaient èlucidé les questions relatives aux fonctions algébriques; les singularités polaires et algébriques ne renfermaient plus de mystères. Ce fut Weierstrass qui reconnut le premier l'aspect complètement différent présentè par les fonctions uniformes dans le voisinage de leurs singularités essentielles. On sait ce qu'on appelle singularitè essentielle; une fonction $F(z)$ holomorphe dan un cercle de centre z_0 sauf au point z_0 admet ce point pour singularitè essentielle si ce n'est pas un pôle. Le développement en série de Laurent autour de z_0 possède une infinitè de termes en $\dfrac{1}{(z-z_0)^m}, m>0$. Si l'on envoie le point z_0 à l'infini par une transformation homographique, on obtient une fonction $F(z)$ holomorphe autour du point à l'infini qui est point essentiel, $F(z)$ est la somme d'une fonction entière $f(z)$ es d'une fonction holomorphe au point à l'infini et nulle en ce point. Plaçons-nous dans ce cas.

Weierstrass a montré que la fonction $F(z)$ s'approche d' aussì près que l'on veut de toute valeur finie ou infinie lorsqu'on donne à z des valeurs de module supérieur à un nombre arbitrairement grand, c'est-à-dire dans un voisinagé aussi restreint que l'on veut du point à l'infini.

En 1879, Picard complèta le theorème de Weierstrass en demontrant la proposition célèbre qui porte son nom: une fonction holomorphe autour d'une singularité essentielle prend une infinité de fois toute valeur finie, sauf au plus une seule valeur exceptionnelle, dans un voisinage arbitrairement restreint de cette singularité. La démonstration de Picard utilisait les propriètés des fonctions modulaires elliptiques. S'il s'agit seulement de dèmontrer qu'une fonction entière prend toute valeur finie sauf au plus une seule valeur exceptionnelle, la démonstration

(*) Tercera clase (3 de agosto de 1946) del cursillo sobre *Funciones enteras* dictado en el Instituto de Matemática de la Universidad de Buenos Aires.

est très simple. Il existe une fonction $\varphi(Z)$, inverse d'une fonctions modulaire, qui n'admet comme singularités que les seuls points 0, 1, ∞ et dont le coefficient de i, $J\varphi(Z)$, est toujours positif. Si une fonction entière $f(z)$ ne prenait pas les valeurs 0 et 1, la fonction $\varphi[f(z)]$ (ou plutòt l' une quelconque de ces fonctions, car $\varphi(Z)$ est multiforme) serait aussi une fonction entière dont le coefficient de i serait positif, ce serait une constante (Voir la 1ere conférence), $f(z)$ serait une constante.

Le theorème de Picard resta comme un joyau isolè dans la theorie des fonctions analytiques jusqu'en 1896: les recherches sur les fonctions entières s'étaient engagées dans une autre voie, on etudiàit la décomposition en facteurs en la supposant possible. Ce fut Borel qui dans deux travaux fondamentaux établit le pont entre ces deux voies de recherches. Dans le premier de ces travaux, dont il sera seulement question aujourd'hni, Borel donna une démónstration élémentaire du théorème de Picard sur les fonctions entières sous la forme simple donnèe ci-dessus: la démonstration est élémentaire parce qu'elle ne fait pas appel à la théorie de la fonction modulaire. Par une analyse profonde des faits, Borel ètablit l'impossibilitè d'une identité de la forme

$$e^{F(z)} + e^{G(z)} \equiv 1,$$

où $F(z)$ et $G(z)$ seraient des fonctions entières. (Voir Borel. Leçons sur les fonctions entières). Cette dêmonstration de Borel èut des consèquences considérables: elle servit de base aux premières démonstrations que Schottky et Landau donnèrent de leurs théorèmes; elle provoqua des recherches précises sur la comparaison de deux fonctions reélles qui s'introduisent dans la théorie des fonctions entières: la fonction de r, $M(r,f) = \max |f(re^{i\varphi})|$ pour $0 \leqq \varphi < 2\pi$, et la fonction de r, $A(r,f) = \max Rf(re^{i\varphi})$ pour $0 \leqq \varphi < 2\pi$ (Ru désigne la partie réelle de u, Ju son coefficient de i). Les recherches de Wiman sur ce sujet (Acta math., t. 41), complétées par moi-même, conduisirent A. Bloch a son théorème.

Le théorème de Landau a une forme particuliérèment simple et frappante.

Si

$$F(z) = c_0 + c_1 z + \ldots \tag{1}$$

est une fonction holomorphe autour de l'origine, $c_0 \neq 0$, $c_0 \neq 1$, il existe un cercle $|z| < R$ dont le rayon R ne dépend que de c_0 et c_1 qui contient une singularitè de $F(z)$ prolongée radialement, ou bien dans lequel $F(z)$ prend l'une du valeurs 0 ou 1.

En particulier, dans le cas d'un polynôme

$$P(z) = c_0 + c_1 z + \ldots + c_n z^n, \quad c_0 \neq 0, \quad c_0 \neq 1,$$

il existe une fonction de c_0 et c_1, $R(c_0, c_1)$ telle que, dans le cercle $|z| < R(c_0, c_1)$, le produit $P(z)(P(z) - 1)$ s'annule au moins une fois. On a évidemment cherché à donner une démonstration algébrique, mais sans succès jusqu'ici:

Le théorème de Schottky s'enonce comme suit:

Si la fonction $F(z)$ définie par (1) est holomorphe pour $|z| < 1$ et ne prend pas dans ce cercle les valeurs 0 et 1, on à, pour $|z| \leqq r < 1$,

$$(2) \qquad |F(z)| < \Theta(r, c_0),$$

la fonction au second membre ne dépendant que de r et c_0 En outre, si $|c_0| < A$, on a

$$|F(z)| < \Omega(r, A),$$

Ω ne dépendant que de r et A.

Le théorème de Schottky contient le théorème de Landau. Car, si la fonction définie par (1) est holomorphe para $|z| \leqq r$ et ne prend pas les valeurs 0 et 1 dans ce cercle, $F(zr)$ qui est holomorphe pour $|z| < 1$ vérifie la condition (2), et, en particulier,

$$\left| F\left(\frac{e^{i\vartheta}}{2} r\right) \right| < \Theta\left(\frac{1}{2}, c_0\right), \quad 0 \leqq \vartheta < 2\pi,$$

donc, d'après les inégalités de Cauchy

$$\frac{r}{2} |F'(0)| < \Theta\left(\frac{1}{2}, c_0\right), \quad F'(0) = c_1,$$

et finalment

$$r < \frac{2\Theta(\frac{1}{2}, c_0)}{|c_1|}.$$

A la voie de démonstration élémentaire se substitua bientôt de nouveau l'emploi des fonctions modulaires, ce qui permit à Caratheodory de donner des inégalités exactes (Voir Valiron, I, p. 456). En particulier, dans l'énoncé du théorème de Schottky, on peut, en explicitant les constantes, donner à $\Theta(r, A)$ la valeur

$$(3) \qquad (CA + C)^{\frac{1+r}{1-r}},$$

C étant une constante numérique.

Le théorème général de Picard se déduit aisément du théorème de Schottky. Une démonstration très suggestive a été donnée par Goursat dans l'une des éditions de son traité d'Analyse (t. II). Supposons que la fonction $f(z)$ soit holomorphe pour $|z| < 2R$ sauf pour $z=0$ qui est point essentiel et ne prenne pas les valeurs 0 et 1 dans ce cercle. Prenons un point z_0 de module R et supposons que $|f(z_0| < A$. Pour $|z - z_0| \leqq \frac{R}{2}$, on a d'après le théorème de Schottky (puisque $f(z)$ est holomorphe pour $|z - z_0| < R$),

$$|f(z)| < \Omega\left(\frac{1}{2}, A\right).$$

Le cercle $|z - z_0| = \frac{2}{R}$ coupe le cercle $|z| = R$ et deux points z_1 et z_2. On a en ces points $|f(z_1)| < \Omega\left(\frac{1}{2}, A\right)$

$$|f(z_2)| < \Omega\left(\frac{1}{2}, A\right).$$

On peut recommencer le raisonnement précédent en partant de ces points. Sur tout l'arc de la circonférence $|z| = R$ dont z_0 est le centre et dont l'onverture est $4 \cdot \frac{\pi}{6}$ on aura

$$|f(z)| < \Omega\left(\frac{1}{2}, \Omega\left(\frac{1}{2}, A\right)\right).$$

On peut continuer. Au bout de 5 opérations on aura couvert la circonférence $|z|=R$; on aura sur toute cette circonférence

$$|f(z)|<\psi(A),$$

où ψ est une fonction déduite de $\Omega\left(\frac{1}{2}, A\right)$. *Or*, d'après le théorème de Weierstrass, il existe des points z_0 aussi voisins de l'origine que l'on veut en lesquels $|f(z_0)|<1$; il existerait des circonférences $|z|=|z_0|$ de rayon arbitrairement petit sur lesquelles $|f(z)|<\psi(1)$, ce qui est impossible d'après le théorème de Liouville. L'hypothèse faite est absurde, $f(z)$ prend l'une des valeurs 0 et 1 dans un cercle de centre 0 et rayon arbitrairement. On en déduit que $f(z)$, prend une infinité de fois toute valeur finie sauf une au plus. Le théorème de Picard est démontré.

Il est aisé de modifier ce mode de démonstration pour obtenir le théorème que Julia établit en 1919 par une tout autre méthode. Tout d'alord, on peut faire l'hypothèse que la fonction $f(z)$ ne prend pas deux valeurs α et β telles que $|\alpha-\beta|>\frac{1}{B}$, $|\alpha|<B$, $|\beta|<B$ dans l'un des cercles considérés. Alors la fonction

$$g(z)=\frac{f(z)-\alpha}{\beta-\alpha}$$

ne prend pas les valeurs 0 et 1 et si, au centre du cercle $|f(z)|<A$, on a, en ce centre $|g(z)|<(A+B)B$, et dans le cercle concentrique de rayon moitié,

$$|g(z)|<\Omega\left(\frac{1}{2}, (A+B)B\right),$$

donc

$$|f(z)|<B+2B\,\Omega\left(\frac{1}{2}, (A+B)B\right). \tag{4}$$

Ceci dit, considérons une fonction holomorphe autour de $z=0$ qui est point essentiel. Prenons un point z_0 voisin de l'origine, en lequel $|f(z_0)|<A$. ε étant donné positif arbitraire, supposons que $f(z)$ ne prenne pas dans le cercle $|z-z_0|<\varepsilon\,|z_0|$, deux valeurs α et β satisfaisant aux conditions précédentes. Dans le cercle

$$(5) \qquad |z-z_0| \leqq \frac{1}{2}\varepsilon|z_0|$$

$f(z)$ vérifiera l'inégalité (4). On pourra recommencer le même raisonnement à partir des points z_1 et z_2 intersections de la circonférence du cercle (5) et de la circonférence $|z_0|=|z|$. Au bout d'un nombre d'opérations au plus égal au nombre n défini par

$$n \, . \, \text{arc} \sin \frac{\varepsilon}{2} = \pi$$

on aura couvert la circonférence $|z|=|z_0|$. Sur toute cette circonférence on aura

$$|f(z)|<K(A, B, \varepsilon),$$

ce qui est impossible, d'après le théorème de Cauchy-Liouville si $|z_0|$ est pris assez petit. Et il existe effectivement des points z_0 en lesquels on a, par exemple $|f(z_0)|<A=1$, aussi proches de $z=0$ que l'on veut. C'est donc que, pour l'un des cercles de recouvrement de la circonférence $|z|=|z_0|$, l'hypothèse faite était inexacte. Il existe des cercles

$$|z-z'|<\varepsilon\,|z'|,$$

avec $|z'|$ aussi petit que l'on veut, dans chacun desquels $f(z)$ prend toute valeur Z telle que $|Z|<B$ sauf au plus des valeurs Z telles que $|Z-Z'|<\frac{1}{B}$, $|Z'|<B$. Les nombres ε et B sont arbitraires, on peut faire tendre ε vers zéro et B vers l'infini. On obtient cet énoncé:

Si $f(z)$ est holomorphe autour du point $z=0$ qui est point essentiel, il existe une suite infinie de cercles C_n, d'équations $|z-z_n|<\varepsilon_n|z_n|$, ε_n tendant vers zéro avec $\frac{1}{n}$, ainsi que

$|z_n|$, tels que, dans chaque cercle C_n, $f(z)$ prend toute valeur Z de module inférieur à A_n sauf au plus des valeurs Z que l'on peut enfermer dans un cercle γ_n de rayon $\frac{1}{A_n}$, A_n croissant indéfiniment avec n.

La suite de cercles C_n est ce que Milloux appelle une suite de cercles de remplissage. En prenant le théorème de Schottky sous la forme précise (3) on peut déterminer, à un multiple fini près, la rayon minimum des cercles correspondant à A_n fixe, c'est-à-dire la valeur de ε_n en fonction de $|z_n|$. On peut dire que, à un facteur près, ε_n est de l'ordre de

$$\frac{1}{\log M(|z_n|)}$$

$M(r)$ étant le maximum de $|f(re^{i\varphi})|$ (Voir, Valiron, Bulletin des Sciences math., 1927).

Le théorème sur les cercles de remplissage contient les théorèmes de Julia relatifs aux fonctions holomorphes autour d'une singularité essentielle, tels qu'ils ont été complétés par Ostrowski: Voici, par exemple, comment on obtiendra l'un des énoncés de Julia. Supposons que les cercles exceptionnels γ_n existent; γ_n a pour équation $|Z-Z_n|=\frac{1}{A_n}$. Si $|Z_n|$ tend vers l'infini, on se ramène au cas où les γ_n n'existent pas en diminuant A_n. Si les Z_n ont un point limite Z' à distance finie, on peut extraire de la suite C_n une suite C'_n pour laquelle les γ_n tendront vers Z'. Dans la suite C'_n et dans toute suite qu'on en extrait, $f(z)$ prend toute valeur finie une infinité de fois sauf la valeur Z'. Dans les cas écartés, on a une suite analogue, mais il n'y a pas valeur exceptionnelle Z'. Si φ est une valeur limite des arguments des centres des cercles C'_n, $f(z)$ prend toute valeur finie une infinité de fois, sauf au plus la valeur exceptionnelle Z', dans tout angle, d'ouverture arbitrairement petite, admettant la demidroite d'argument φ pour bissectrice, puisque cet angle contiendra une infinité de cercles C'_n.

C'est par la méthode des familles normales de Montel que Julia était parvenu à ses résultats. Rappelons que Montel dit qu'une famille de fonctions $f(z)$ méromorphes dans un domaine D est normale dans D lorsque, de toute suite infinie de fonctions de la famille, on peut extraire une autre suite qui converge uniformément dans D, c'est-à-dire dans toute région fermée intérieure à D. Cette convergence uniforme peut être definie en utilisant la représentation sphérique des nombres complexes. Pour qu'une famille soit normale dans D, il faut et il suffit qu'elle soit normale en tout point z_0 de D, c'est-à-dire dans tout cercle de rayon arbitrairement petit intérieur à D ayant z_0 pour centre. Montel montre que les fonctions holomorphes dans un domaine D et qui sont bornées dans leur ensemble dans toute région intéreure à D formént una famille normale dans D. Car elles sont également continues dans tout cercle appartenant à D et la démonstration donnée par Arzelà pour les fonctions réelles peut être adaptée. Montel en déduit que les fonctions holomorphes dans un domaine D, qui ne prennent pas dans ce domaine les valeurs 0 et 1, forment une famille normale. Car si C est un cercle de centre z_0 appartenant à D et C' un cercle concentrique de rayon plus grand, les fonctions de la famille pour lesquelles $|f(z_0)| \leqq 1$ sont bornées dans C d'après le théorème de Schottky appliqué à C', elles forment une famille normale dans C. Les fonctions pour lesquelles $|f(z_0)| > 1$ peuvent être étudiées en considérant les fonctions $g(z) = \frac{1}{f(z)}$, les $g(z)$ forment une famille normale dans G, donc aussi les $f(z)$. Une transformation homographique

$$g(z) = \frac{f(z)-a}{f(z)-b} \, \frac{c-a}{c-b}$$

conduit au théorème général de Montel:

Les fonctions $f(z)$ méromorphes dans un domaine D, qui ne prennent pas dans D trois valeurs distinctes a, b, c quelconques, forment une famille normale dans D.

Montel a donné une démonstration directe de ce théorème n'utilisant pas le théorème de Schottky, et il déduit ce théorème de Schottky de ses méthodes. Pour étudier une fonction $f(z)$ admittant le point $z=\infty$ comme point essentiel, il introduit la famille de fonctions

$$(6) \qquad f_n(z) = f(zs^n), \quad |s| > 1,$$

qu'il étudie dans une couronne

$$1 < |z| < S', \quad S' > |s|.$$

Julia utilise ces résultats de Montel. Il fait la remarque essentielle suivante: si les fonctions $f(z)$ méromorphes dans un domaine D ne forment pas une famille normale, il existe un point z_0 de D au moins où la famille n'est pas normale et, d'après le théorème général de Montel, les fonctions $f(z)$ prennent dans leur ensemble toute valeur dans un cercle de rayon arbitraire ayant z_0 pour centre, sauf au plus deux valeurs exceptionnelles. Appliquant ceci à la famille (6) et aux familles analogues, il obtient ses théorèmes. Ostrowski complète les résultats de Julia. Il appelle le point z_0 un point de Julia. A z_0 correspond un moins une suite $f_n(z)$ de fonctions de la famille dont on ne peut extraire aucune suite uniformément dans un cercle $|z-z_0| < \varepsilon$, si petit que soit ε; cette suite est dite suite exceptionnelle au point z_0. Ostrowski montre que:

Si la suite $f_n(z)$ est exceptionnelle au point z_0, et si ε et d sont donnés arbitrairement petits, on peut trouver $N(\varepsilon, d)$ tal que, pour $n > N(\varepsilon, d)$, $f_n(z)$ prend dans le cercle $|z-z_0| < \varepsilon$ toute valeur sauf au plus des valeurs qui sont représentées dans deux cercles de rayon d sur la sphère de rayon 1.

Dans le cas de la famille (6), l'existence d'un point J entraîne l'existence d'une suite de cercles de remplissage. Or, si $f(z)$ est holomorphe autour du point à l'infini, la famille (6) ne peut pas être normale, le point J existe et l'on retrouve le théorème donné plus haut. Si $f(z)$ est méromorphe autour du point à l'infini qui est limite de pôles, le point J n'existe pas toujours. Julia avait donné de nombreux cas où il existe, et reconnu l'existence de cas exceptionnels où il n' existe pas de points J. Ostrowski a complétement determiné la classe des fonctions méromorphes exceptionnelles. Si $f(z)$ est méromorphe dans tout le plan à distance fixe, elle est exceptionnelle si elle est le quotient de deux fonctions entières d'ordre nul satisfaisant à la condition de croissance $\log M(r) < K (\log r)^2$ et dont les zéros verifient certaines conditions.

Lorsqu'on se donne une fonction $f(z)$ méromorphe autour du point à l'infini, non exceptionnelle, et une courbe simple L joignant l'origine au point à l'infini, on peut faire tourner L

autour de l'origine d'un angle tel que dans se nouvelle position L' elle jouisse de la propriété suivante : si petit que soit $\varepsilon > 0$, le domaine balayé par le cercle $|z-z'| < \varepsilon . |z'|$ lorsque z' decrit L', contient une infinité de cercles de remplissage. Dans ces conditions le théorème de Picard s'applique dans ce domaine : $f(z)$ y prend une infinité de fois toute valeur sauf au plus deux valeurs exceptionnelles. Il peut arriver qu'une courbe L' allant de l'origine à l'infini jouisse de cette propriété, c'est-à-dire que le théorème de Picard s'applique dans le domaine balaye par le cercle $|z-z'| < \varepsilon . |z'|$ lorsque le point z' décrit L', si petit que soit ε, alors que ce domaine ne contient pas de suite de cercles de remplissage. J'ai propose d'appeler une telle courbe, courbe de Picard (ou direction de Picard lorsque L' est une demi-droite) en réservant le nom de Julia au cas où existent les cercles de remplissage (Journal de Mathématiques, 1928). Toute fonction méromorphe autour du point à l'infini qui es limite de pôles où point essentiel admet des courbes simples de Picard ou Julia. Notamment, si l'on considerè les spirales logarithmiques définiés par

$$z = e^{i\delta}\, t^{1+ik},$$

où δ et k sont réels et fixes et t variable, réel positif, et une fonction $f(z)$, toutes ces spirales sont, quel soit δ, courbes de Picard où Julia, sauf au plus pour un ensemble de mesure nulle, $E(f)$, de valeurs de k.

Une courbe de Picard L', qui n'est pas courbe de Julia, est courbe d'indétermination complète. J'entends par là que, si l'on adjoint à l'ensemble des valeurs prises par $f(z)$ sur la portion de L' extérieure à un cercle de rayon arbitrairement grand, son ensemble dérivé, on obtien tout le plan. Mais cette propriété n'est pas caracteristique, et il conviendrait de chercher una propriété caractéristique des courbes de Picard ou des courbes de Picard ou Julia.

Il existe des fonctions entières admettand des directions de Picard, qui ne sont pas directions de Julia.

Il nous reste à parler de la seconde voie ouverte par la démonstration élémentaire de Borel. Complétant des résultats de Wiman, j'avais établi que $f(z)$ étant une fonction entière et z_0 un point en lequel $|f(z_0)| = M(r, f)$, $r = |z_0|$, on a, sauf pour certaines valeurs r exceptionnelles

$$Z = f(z) = \left(\frac{z}{z_0}\right)^n f(z_0)\,(1 + \varepsilon(z)),$$

n désignand le rang du terme maximum de la série $f(z)$ pour la valeur r, $\varepsilon(z)$ tendant vers zéro avec $\frac{1}{r}$, cette égalité étant valable dans un petit domaine entourant z_0. Il en résultait que la fonction inverse $z = \varphi(Z)$ de $f(z)$ admettait des branches holomorphes dans des couronnes

$$R_p < |Z| < R_{p+1},$$

fendues le long d'un rayon, dont l'épaisseur $R_{p+1} - R_p$ croît indéfiniment avec p. On a un résultat analogue pour les fonctions $F(z)$ holomorphes pour $|z| < 1$ et dont le maximum du module $M(r, F)$ croît très rapidement lorsque r tend vers un. A. Bloch a étendu ce résultat à toutes les fonctions holomorphes pour $|z| < 1$ et dont la dérivée est égale à un au centre du cercle. Le résultat qu'il obtint par la méthode de Wiman-Valiron est le suivant:

Si $f(z)$ est holomorphe pour $|z| < 1$, si $f'(0) = 1$, le domaine décrit par le point $Z = f(z)$, domaine qui est en général une surface de Riemann à plusieurs feuillets, contient soit un cercle à un seul feuillet $|Z| < B'$, soit une couronne d'épaisseur $2B'$ à un seul feuillet, $\alpha < |Z| < 2B' + \alpha$, fendue le long d'un rayon, $B' < 0$.

J'ai donné en 1930 dans Mathematica un exposé détaillé de la démonstration que Bloch avait donnée sons forme géométrique dans son mémoire de 1925. Cette démonstration peut être abrégée grâce à des considérations de Macintyre.

Du théorème complet de Bloch, on déduit ce corollaire;

Dans les conditions indiquées, la surface de Riemann décrite par le point $Z = f(z)$ contient un cercle à un feuillet de rayon supérieur ou égal à une constante $B \geq B'$.

J'ai donné en 1926 une démonstration de cette proposition qui tienne deux pages, quelques semaines plus tard, elle a été encore simplifiée par Landau. On peut s'appuyer sur ce lemme connu (Voir Valiron. Cours d'Analyse, II, p. 72). Si $g(z)$ est holomorphe pour $|z|<1$, $g(0)=0$, $|g'(0)|=1$, et si $|g'(z)|<M$ pour $|z|<1$, $g(z)$ prend une fois et une seule dans le cercle $|z|<$ $<\frac{1}{1+M}$ toute valeur de module inférieur à $\frac{1}{2(M+1)}$. C'est le théorème sur les fonctions inverses, un peu précisé.

Soit alors $Z=f(z)$ que nous supposeron holomorphe pour $|z|\leqq 1$, et $|f'(0)|=1$. Si $M_1(r)$ est le maximum de $|f'(z)|$ pour $|z|=r\leqq 1$, la fonction

$$M_1(r)\,(1-r)$$

est égale à 1 pour $r=0$, à 0 pour $r=1$ et elle est continue, elle a un maximum m au moins égal à 1 qui est atteint pour une valeur $r_0<1$, il existe un point z_0 pour lequel

$$|f'(z_0)|\,(1-r_0)=m.$$

On a

$$M_1(r)\leqq \frac{m}{1-r}.$$

Soit alors

$$Z_1=g(\xi)=\left[f\left(z_0+\xi\frac{1-r_0}{2}\right)-f(z_0)\right]\frac{2}{m}.$$

Cette fonction est holomorphe pour $|\xi|<1$, on a $g(0)=0$, $|g'(0)|=1$ et $|g'(\xi)|<2$. D'après le lemme, les valeurs Z_1 couvrent à un seul feuillet le cercle $|Z_1|<\frac{1}{6}$, et en revenant à $f(z)$, on voit que ses valeurs couvrent un cercle à un seul feuillet de rayon au moins égal à $\frac{m}{2}\frac{1}{6}\geqq\frac{1}{12}$. Le théorème est établi, on a B.

La constante de Bloch, B, est encore inconnue. Ahlfors a montré en 1938 que $\frac{\sqrt{3}}{4}<B<0,\ 472$.

De son théorème Bloch a déduit le théorème de Schottky. Si $f(z)$ est holomorphe pour $|z|<1$, et ne prend pas les valeurs 0 et 1, la fonction

$$F(z) = \frac{\log f(z)}{2i\pi}$$

(où l'on prend la valeur réduite pour $z=0$) est encore holomorphe et ne prend pas les valeurs entières, positives, négatives ou nulle. La fonction

$$G(z) = \sqrt{F(z)} - \sqrt{F(z)-1}$$

est holomorphe et ne prend pas les valeurs 0 et $\sqrt{p} \pm \sqrt{p-1}$, p entier $\geqq 1$. Alors

$$H(z) = \log G(z)$$

ne prend pas les valeurs

$$\pm \log (\sqrt{p} + \sqrt{p-1}) + 2 i \pi q, \quad q \text{ entier.}$$

La plus grande distance de ces points est inférieure à 8. En appliquant le théorème de Bloch à $H(z)$ dans le cercle de centre z tangent intérieurement à $|z|=1$, on obtient

$$B|H'(z)|\ |1-z| < 4,$$

B étant la constante de Bloch. On en déduit une borne de $H(z)$ et, en remontant à $f(z)$ on obtient le théorème de Schottky.

Bloch a aussi déduit de son théorème une démonstration du théorème de Picard sur l'uniformisation, des critères de familles normales; toute une branche de la théorie des fonctions en écoule.

Le théorème de Schottky permet d'étendre le théorème de Picard aux fonctions holomorphes dans le cercle $|z|<1$ et à croissance rapide. Il rentre d'ailleurs aujourd'hui, comme cas particulier, dans un théorème plus général dont il sera question dans la quatrième conférence.

Le théorème de Picard, a été étendu à des transformations plus générales que la transformation conforme définie par les fonctions analytiques. On peut signaler à ce sujet les travaux sur les representations quasi-conformes (Ahlfors), des travaux de Stoïlow et un travail récent de M. Cotlar.