IMPULSO ANGULAR DEL CAMPO DE RADIACION

por José A. Balseiro
Observatorio Astronómico. - Córdoba
(Entregado el 6 de marzo de 1947)

II. Campo mesotrónico vectorial

§ 8. — *Introducción.*

El formalismo aplicado al campo de radiación electromagnético puede ser extendido inmediatamente al campo mesotrónico vectorial, que aparece como una generalización del primero, en el sentido que le está asociado una partícula de masa en reposo no nula [7]. Las ecuaciones de campo:

$$\operatorname{rot}\vec{G} + \varkappa^2 \vec{U} = \frac{\partial \vec{F}}{\partial x_0} \qquad \operatorname{div}\vec{G} = 0$$

$$\operatorname{rot}\vec{F} = -\frac{\partial \vec{G}}{\partial x_0} \qquad \operatorname{div}\vec{F} + \varkappa^2 \vec{U} = 0 \quad \text{con} \quad x_0 = ct \tag{8.1}$$

se reducen a las ecuaciones de Maxwell con $\varkappa = \frac{2\pi mc}{h} = 0$. Las funciones $\vec{U}$ y U_0 corresponden, respectivamente, a los potenciales vector y escalar y $\vec{F}$ y $\vec{G}$ están dados como en el caso del campo electromagnético por:

$$\vec{G} = \operatorname{rot}\vec{U} \qquad \vec{F} = -\frac{\partial \vec{U}}{\partial x_0} - \operatorname{grad} U_0 \tag{8.2}$$

(7) A. Proca. *J. Phys. et Radium*, *7*, 347 (1936). *8*, 23 (1937).

cumpliéndose, además,

$$\operatorname{dir} \vec{U} + \frac{\partial U_0}{\partial x_0} = 0. \tag{8.3}$$

La teoría general de los campos de las partículas elementales da como expresión de la energía total del campo:

$$W = \int [\vec{F}^* \vec{F} + \vec{G}^* \vec{G} + \varkappa^2 (\vec{U}^* U + U_0^* U_0)]\, d\tau \tag{8.4}$$

y del impulso angular total:

$$\vec{J} = \frac{1}{2c} \int [\vec{r} \times (\vec{F}^* \times \vec{G} + \varkappa^2 \vec{U} \,.\, U_0 + \mathrm{conj})]\, d\tau. \tag{8.5}$$

La representación matricial de W y $\vec{J}$ puede hacerse en forma análoga a la expuesta en *I* § 2 usando las soluciones esféricas de las ecuaciones de campo. Existen, sin embargo, diferencias entre ambos casos: En primer término porque las ecuaciones (8.1) admiten como solución ondas longitudinales ($\operatorname{div} F \neq 0$), además de las dos soluciones de ondas transversales equivalentes a las (E) y (M) del campo electromagnético. En segundo lugar, debido a que es posible definir el impulso de espín del campo.

Si se considera al impulso orbital en forma que sea la generalización cuadrivectorial del impulso orbital del campo escalar, se obtiene para el impulso de espín una expresión que es integral de movimiento.

§ 9. — *Soluciones esféricas de las ecuaciones de campo.*

Las ecuaciones de campo (8.1) admiten, para un sistema de referencia dado, tres clases de soluciones. Dos transversales con $U_0 = 0$ ($\operatorname{div} \vec{F} = 0$) y una longitudinal ($\vec{G} = 0$) que en ondas planas se derivan de:

$$\begin{aligned}
&\vec{U}^{(1)} = \Sigma_k\, \alpha_k\, \vec{e}^{(1)}\, e^{i(\vec{k},\vec{r} - k_0 x_0)} && U_0^{(1)} = 0 \\
&\vec{U}^{(2)} = \Sigma_k\, \beta_k\, \vec{e}^{(2)}\, e^{i(\vec{k},\vec{r} - k_0 x_0)} && U_0^{(2)} = 0 \\
&\vec{U}^{(k)} = \Sigma_k\, \gamma_k\, \vec{e}^{(k)}\, e^{i(\vec{k},\vec{r} - k_0 x_0)} && U_0^{(k)} = \Sigma_k \frac{|k|}{k_0}\, e^{i(\vec{k},\vec{r} - k_0 x_0)}
\end{aligned} \tag{9.1}$$

con

$$k_0^2 = k^2 + \varkappa^2 \quad k_0 = \frac{2\pi E}{hc} \quad \vec{k} = \frac{2\pi}{h}\vec{P} \quad \varkappa = \frac{2\pi mc}{h}$$

$\vec{e}^{(1)}$ y $\vec{e}^{(2)}$ son dos vectores complejos unitarios (que dan las soluciones $\vec{U}^{(1)}$ y $\vec{U}^{(2)}$ polarizadas circularmente) y $\vec{e}^{(k)} = \frac{\vec{k}}{|k|}$ (solución $\vec{U}^{(k)}$ polarizada linealmente) que cumplen:

$$\vec{e}^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{\varepsilon}^{(1)} + i\,\vec{\varepsilon}^{(2)}) \qquad \vec{e}^{*(1)}\,\vec{e}^{(2)} = 0 \qquad \vec{e}^{(1)} \times \vec{e}^{(k)} = i\,\vec{e}^{(1)} \tag{9.2}$$

$$\vec{e}^{*(1)}\,\vec{e}^{(1)} = 1 \qquad \vec{e}^{(2)} \times \vec{e}^{(k)} = -i\,\vec{e}^{(2)}$$

$$\vec{e}^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{\varepsilon}^{(1)} - i\,\vec{\varepsilon}^{(2)}) \qquad \vec{e}^{*(1)}\,\vec{e}^{(k)} = \vec{e}^{*(2)}\,\vec{e}^{(k)} = 0 \quad \vec{e}^{(2)} \times \vec{e}^{(1)} = i\,\vec{e}^{(k)}.$$

En ondas esféricas las dos primeras son análogas a las soluciones (E) y (M) de las ecuaciones de Maxwell (Apén. II (T. 1) y (T. 2)). La solución longitudinal se obtiene teniendo presente que rot $\vec{U} = \vec{G} = 0$ con

$$\vec{U} = i\,k_0 \operatorname{grad} N \quad U_0 = k^2 N$$

N es un escalar que satisface a la ecuación

$$\Delta N + k^2 N = 0.$$

cuya solución en coordenadas esféricas es:

$$N = X_l(kr)\, P_l^m(\cos\vartheta)\, e^{im\varphi}$$

$$X_l(kr) = \sqrt{\frac{k}{r}}\, J_{l+1/2}(kr).$$

Las soluciones esféricas del campo (Apén. II (T. 1), (T. 2) y (L) están normalizadas de modo a obtener para el campo de una partícula descripta por cada una de ellas el valor de la energía (8. 4):

$$W = k_0 \frac{h}{2\pi} c = E. \tag{9. 3}$$

Las soluciones son ortogonales en el espacio, de modo que no existen elementos de transición de energía entre las distintas soluciones. Además, la matriz de energía es diagonal.

§ 10. — *Impulsos angulares.*

Los elementos de transición de impulso angular total (8. 5) entre las distintas soluciones son nulos. Para una partícula descripta por cada una de ellas se encuentra que el impulso angular total admite una representación matricial idéntica a la obtenida en el caso del campo electromagnético. Se encuentra, también, en igual forma, el impulso angular del campo de un número arbitrario de mesotrones.

El formalismo general desarrollado por Belinfante[2] y Pauli[1] conduce a una división del impulso angular total en impulso orbital e impulso de espín de la forma:

$$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S} = \int [\sum_{s=1}^{3} F_s^* (\vec{r} \times \text{grad})\, U_s + \text{conj}]\, d\tau + \int [\vec{F}^* \times \vec{U} + \text{conj}]\, d\tau. \tag{10. 1}$$

El impulso orbital, así definido, no es la generalización cuadrivectorial del que se obtiene para el campo escalar:

$$\vec{L} = -\int \left[\frac{\partial \psi^*}{\partial x_0} (\vec{r} \times \text{grad})\, \psi + \text{conj} \right] d\tau. \tag{10. 2}$$

Sin embargo, puede obtenerse una expresión del impulso orbital generalización cuadrivectorial de la (10. 2), a partir del tensor energía impulso del campo que estamos considerando:

$$\vartheta_{ik} = U_{ir}{}^* U_{kr} + \varkappa^2 U_i{}^* U_k + \mathrm{conj} - \delta_{ik}$$

$$\left(\frac{1}{2} U_{rs}{}^* U_{rs} + \varkappa^2 U_r{}^* U_r\right) \qquad (10.3)$$

en donde

$$U_4 = i\, U_0 \quad U_4{}^* = i\, U_0{}^* \qquad U_{ir} = \frac{\partial U_r}{\partial x_i} - \frac{\partial U_i}{\partial x_r}.$$

$$U_{4i} = i\, F_i \quad U_{12} = G_3, \ \text{etc.}$$

Mediante las ecuaciones de campo es expresable en la forma:

$$\vartheta_{ik} = U_{kr}{}^* \frac{\partial U_r}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_r} (U_{kr}{}^* U_i) + \mathrm{conj} - \delta_{ik}$$

$$\left(\frac{1}{2} U_{rs}{}^* U_{rs} + \varkappa^2 U_r{}^* U_r\right) \qquad (10.4)$$

Se obtiene de aquí la forma (10.1).

Teniendo presente la definición de U_{4r} y (8.3), integrando por partes y considerando que en el límite de integración las funciones de campo se anulan se llega a:

$$M_{ij,4} = \int (x_i \vartheta_{j4} - x_j \vartheta_{i4})\, d\tau = \int \sum_{r=1}^{3} \left[\frac{\partial U_r{}^*}{\partial x_0} \left(x_i \frac{\partial}{\partial x_j} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - x_j \frac{\partial x_i}{\partial} \right) U_r + \mathrm{conj} \right] d\tau + \int \left[\frac{\partial U_4}{\partial x_4} \left(x_i \frac{\partial}{\partial x_j} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - x_j \frac{\partial}{\partial x_i} \right) U_4{}^* + \mathrm{conj} \right] d\tau + \int [U_4{}^* U_{ji} + \mathrm{conj}]\, d\tau.$$

El tensor de impulso angular total puede escribirse, pues:

$$M_{ij,4} = \int \sum_{r=1}^{4} \left\{ \frac{\partial U_r{}^*}{\partial x_4} \left(x_i \frac{\partial}{\partial x_j} - x_j \frac{\partial}{\partial x_i} \right) U_r + \mathrm{conj} \right\} d\tau +$$

$$+ \int [U_{4i}{}^* U_j + U_{j4}{}^* U_i - U_{ij}{}^* U_4 + \mathrm{conj}]\, d\tau. \qquad (10.5)$$

El espín total del campo es también expresable en la forma:

$$S_{ij,4}=\int [U_{4i}{}^{*}\,U_j+U_{j4}{}^{*}\,U_i+U_{ji}{}^{*}\,U_4+\text{conj}]\,d\tau=$$

$$\int\left[\frac{\partial U_i{}^{*}}{\partial x_4}U_j-\frac{\partial U_j{}^{*}}{\partial x_4}U_i+\text{conj}\right]d\tau.$$

La densidad de impulso de espín es la parte temporal de un tensor de tercer rango:

$$\sigma_{ij,k}=\frac{\partial U_i{}^{*}}{\partial x_k}U_i-\frac{\partial U_j{}^{*}}{\partial x_k}U_i+\frac{\partial U_i}{\partial x_k}U_j{}^{*}-\frac{\partial U_j}{\partial x_k}U_i{}^{*}$$

que por las ecuaciones de campo satisface la ecuación de continuidad:

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\sigma_{ij,k}=0.$$

En la separación (10. 5) el espín total del campo aparece como integral de movimiento.

El impulso orbital y el de espín expresados vectorialmente tienen la forma:

$$\vec{L}=-\int\sum_{r=1}^{4}\left\{\frac{\partial U_r{}^{*}}{\partial x_0}(\vec{r}\times\text{grad})\,U_r+\text{conj}\right\}d\tau. \qquad (10.\ 6)$$

$$\vec{S}=\int[\vec{F}^{*}\times\vec{U}-\vec{G}^{*}\,U_0+\text{conj}]\,d\tau=$$

$$=\int[\vec{U}^{*}\times\frac{\partial U}{\partial x_0}+\text{conj}]\,d\tau. \qquad (10.\ 7)$$

En la representación matricial de $\vec{S}$, mediante las soluciones esféricas, los elementos de matriz correspondientes a la solución (L) son nulos. Existen, además, elementos de transición no nulos entre las soluciones (T. 1(y (T. 2), (T. 1) y (L), (T. 2) y (L).

En esta representación el impulso total esta sobre ejes principales; no así, el impulso orbital y el impulso de espín.

El factor $\frac{k_0}{\varkappa}$ afecta a los elementos de transición entre las soluciones (T. 1) y (L) y (T. 2) y (L), y su aparición se debe a las propiedades de transformación de las componentes de $\vec{S}$. Este factor desaparece si (L) se da en la aproximación no relativista

$$\frac{E}{c} \approx m\,c\left(1+\frac{P^2}{2m^2c^2}\right) \approx m\,c$$

$$\vec{F} = -i\varkappa\vec{U} \qquad \vec{U} = \operatorname{grad} N$$

$$\Delta N + \frac{8\pi^2 m_0 E}{h} N = 0.$$

§ 11. — *Operador de espín.*

Si el campo es cuantificado la (10. 7) permite definir el operador de espín del campo. Resulta, ahora, más simple emplear las soluciones dadas en ondas planas (9. 1). Normalizados los operadores de amplitud

$$a_k = \sqrt{\frac{4\pi k_0}{hc}}\,\alpha_k, \quad b_k = \sqrt{\frac{4\pi k_0}{hc}}\,\beta_k, \quad c_k = \sqrt{\frac{2}{k_0}}\,\varkappa\,\gamma_k.$$

cumpliéndose

$$a_k a_{k'}^+ - a_{k'}^+ a_k = b_k b_{k'}^+ - b_{k'}^+ b_k = c_k c_{k'}^+ - c_{k'}^+ c_k = \delta_{kk'}. \qquad (11.\ 1)$$

Considerando, ahora, la solución:

$$\vec{U} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left[\sqrt{2k_0}\,\vec{U}^{(1)} + \sqrt{2k_0}\,\vec{U}^{(2)} + \sqrt{\frac{2}{k_0}}\,\varkappa\,\vec{U}^{(k)}\right]$$

se obtiene el operador de energía:

$$W = \Sigma_k (a_k^+ a_k + b_k^+ b_k + c_k^+ c_k)\,E_k. \qquad (11.\ 2)$$

De (10. 7) se obtiene el operador de espín

$$\vec{S}=\frac{h}{2\pi}\Sigma_k(a_k^+ a_k - b_k^+ b_k)\vec{e}^{(k)}+\frac{k_0}{\varkappa}(b_k^+ c_k - c_k^+ a_k)\vec{e}^{(1)}+$$

$$+\frac{k_0}{\varkappa}(c_k^+ b_k - a_k^+ c_k)\vec{e}^{(2)} \qquad (11.3)$$

cuyas componentes según $\vec{e}^{(k)}$, $\vec{\varepsilon}^{(1)}$ y $\vec{\varepsilon}^{(2)}$ son:

$$S_k=\frac{h}{2\pi}\Sigma_k(a_k^+ a_k - b_k^+ b_k)$$

$$S^{(1)}=\frac{h}{2\pi}\Sigma_k\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{k_0}{\varkappa}(c_k^+ b_k - a_k^+ c_k + b_k^+ c_k - c_k^+ a_k)$$

$$S^{(2)}=\frac{h}{2\pi}\Sigma_k\frac{i}{\sqrt{2}}\frac{k_0}{\varkappa}(b_k^+ c_k - c_k^+ a_k - c_k^+ b_k + a_k^+ c_k). \qquad (11.4)$$

S_k es diagonal y tiene los valores propios $+1$, -1 y 0. El factor

$$\frac{k_0}{\varkappa}=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

aparecer en las componentes transversales debido a las propiedades de transformación relativista de $\vec{S}$.

Teniendo presente las reglas de conmutación (11. 1) se obtiene inmediatamente de (11. 2) y (11. 3) que

$$[W,\vec{S}]=W\vec{S}-\vec{S}\,W=0.$$

Nuevamente, se llega a que el espín total es integral de movimiento.

Calculando el impulso orbital (10. 6) se comprueba, igualmente, que conmuta con las componentes (11. 4) de $\vec{S}$. Además, se comprueba, que en la aproximación $\frac{k_0}{\varkappa} \approx 1$, se cumplen las reglas de conmutación:

$$[S_1, S_2] = i\frac{h}{2\pi} S_3$$

$$[S_3, S_1] = i\frac{h}{2\pi} S_2$$

$$[S_2, S_3] = i\frac{h}{2\pi} S_1.$$

Considerando el campo de una partícula en aproximación no relativista se obtienen la representación matricial de las (11.4)

$$\frac{2\pi}{h} S_z = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \qquad \frac{2\pi}{h} S_x = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{Vmatrix}$$

$$\frac{2\pi}{h} S_y = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & \frac{i}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & \frac{i}{\sqrt{2}} \\ -\frac{i}{\sqrt{2}} & -\frac{i}{\sqrt{2}} & 0 \end{Vmatrix}. \qquad (11.5)$$

Mediante la transformación unitaria

$$T = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -i & i & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{Vmatrix} \qquad \varepsilon = T e \qquad \varepsilon = \begin{pmatrix} \vec{\varepsilon}^{(1)} \\ \vec{\varepsilon}^{(2)} \\ \vec{\varepsilon}^{(k)} \end{pmatrix} \quad e = \begin{pmatrix} \vec{e}^{(1)} \\ \vec{e}^{(2)} \\ \vec{e}^{(k)} \end{pmatrix}$$

se obtiene:

$$\vec{\zeta} = T \vec{S} \tilde{T} \tag{11.6}$$

donde $\vec{\zeta}$ son las matrices dadas por Proca (7) y Yukawa (8)

$$\frac{2\pi}{h}\zeta_x = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i \\ 0 & -i & 0 \end{vmatrix} \qquad \frac{2\pi}{h}\zeta_y = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\frac{2\pi}{h}\zeta_z = \begin{vmatrix} 0 & i & 0 \\ -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \tag{11.7}$$

mediante las cuales se escribe:

$$\frac{\partial \vec{U}^*}{\partial x_0} \times \vec{U} = -i \frac{\partial \mathcal{U}^+}{\partial x_0} \vec{\zeta} \vec{\mathcal{U}} = -i \left(\frac{\partial \mathcal{U}^+}{\partial x_0} T \right) \vec{S} (\tilde{T} \mathcal{U}) \tag{11.8}$$

$$\mathcal{U} = \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{pmatrix}. \tag{11.9}$$

La transformación T permite pasar de la representación de polarización lineal a la de polarización circular. Las funciones propias se transforman:

$$V = \tilde{T} U \qquad \begin{matrix} V_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}} (U_1 + i U_2) \\ V_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}} (U_1 - i U_2) \end{matrix} \qquad V_3 = U_3. \tag{10.10}$$

En la aproximación no relativista $U_0 \cong 0$, y por ello pueden considerarse las matrices $\vec{\zeta}$ o $\vec{S}$ como el operador de espín equivalente al de la teoría del espín del electrón de Pauli.

(8) H. Yukawa, *Proc. Phys. Math. Soc. Japan*, *20*, 720, (1938).

§ 12. — *Influencia de un campo magnético.*

Consideremos un mesotrón en un campo magnético constante $\vec{H}$.

Las ecuaciones de campo se obtienen sustituyendo el operador (1):

$$D_k \rightarrow \frac{\partial}{\partial x_k} - \frac{2\pi i e}{hc} A_k$$

donde A_k es el cuadrivector potencial del campo exterior. Se cumple:

$$D_i D_k - D_k D_i = -\frac{2\pi i e}{hc} f_{ik} \qquad f_{ik} = \frac{\partial A_k}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_k}. \tag{12. 1}$$

Las ecuaciones (8. 2) se escriben:

$$U_{ik} = D_i U_k - D_k U_i \tag{12. 2}$$

y las (8. 1)

$$D_k U_{ik} + \varkappa^2 U_i = 0. \tag{12. 2'}$$

De aquí se obtiene la equivalente a la (8. 3):

$$D_i U_i = \frac{1}{2} \cdot \frac{2\pi i e}{\varkappa^2 hc} f_{ik} U_{ik}. \tag{12. 3}$$

Aplicando a (12. 2) D_i y sumando sobre i, mediante la (12. 1) y (12.3) se obtiene:

$$\left[\sum_{k=1}^{4} D_k^2 - \varkappa^2\right] U_i = \frac{\pi i e}{\varkappa^2 hc} D_i \left[f_{ik} U_{ik}\right] - \frac{2\pi i e}{hc} f_{ik} U_k.$$

La transición a la aproximación no relativista se logra sustituyendo

$$D_4^2 \text{ por } \varkappa^2 + \frac{4\pi i m}{h}\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{2\pi i e}{hc}\Phi\right) \qquad \Phi = -i A_4$$

obteniéndose para $\phi=0$ y $H=(f_{23}, f_{31}, f_{12})$

$$\frac{ih}{2\pi}\frac{\partial}{\partial t}U_i=[-\frac{h^2}{8\pi^2 m}\sum_{k=1}^{3} D_k^2 U_i]+\frac{ihe}{4\pi mc}[\vec{H}\times\vec{U}]_i$$

expresiones que mediante las matrices (11. 7) y la representación (11. 8) pueden darse en la forma:

$$\frac{ih}{2\pi}\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{U}=[-\frac{h^2}{8\pi^2 m}\sum_{k=1}^{3} D_k^2-\frac{eh}{4\pi mc}(\vec{H}\,.\,\vec{\zeta})]\mathcal{U}. \qquad (12.4)$$

Los términos entre corchetes representa el hamiltoniano, en el cual aparece el término adicional

$$\frac{eh}{4\pi mc}(\vec{H}\,.\,\vec{\zeta})=\mu\,(\vec{H}\,.\,\vec{\zeta})$$

atribuible a la energía potencial debida al espín del mesotrón.

En el caso particular en que $H=H_z$, $H_x=0$, $H_y=0$, mediante la transformación T, el espín se transforma sobre ejes principales.

En el caso general en que H forme un ángulo ϑ con la dirección z se logra expresar al espín sobre ejes principales mediante una rotación de coordenadas dada por los ángulos ϑ, φ, ψ siendo los dos últimos los otros dos ángulos de Euler. Referidos al nuevo sistema serán:

$$H'=RH \quad H'_x=H'_y=0 \quad H'_z=H \qquad (12.5)$$

$$H=\widetilde{R}H' \quad H_x=\text{sen}\,\varphi\,\text{sen}\,\vartheta\,H; \quad H_y=-\cos\varphi\,\text{sen}\,\vartheta\,H \quad H_z=\cos\vartheta\,H \qquad (12.6)$$

donde R es la matriz unitaria:

$$R=\begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\psi-\text{sen}\,\varphi\,\text{sen}\,\psi\cos\vartheta \\ -\cos\varphi\,\text{sen}\,\psi-\text{sen}\,\varphi\cos\psi\cos\vartheta \\ \text{sen}\,\varphi\,\text{sen}\,\vartheta \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} \operatorname{sen}\varphi\cos\psi+\cos\varphi\operatorname{sen}\psi\cos\vartheta & \operatorname{sen}\psi\operatorname{sen}\vartheta \\ -\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\psi+\cos\varphi\cos\psi\cos\vartheta & \cos\psi\operatorname{sen}\vartheta \\ -\cos\varphi\operatorname{sen}\vartheta & \cos\vartheta \end{matrix}\Bigg).$$

Sustituyendo (12. 6) en (12. 4) se obtiene:

$$\frac{ih}{2\pi}\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{U}=[-\frac{h^2}{8\pi^2 m}\sum_{k=1}^{3}D_k^2-\mu H\sigma_3]\mathcal{U}$$

donde

$$\sigma_3=\widetilde{R}\zeta_3 R.$$

Aplicando la transformación

$$\widetilde{T}R$$

$$\frac{ih}{2\pi}\frac{\partial}{\partial t}(\widetilde{T}RT)\widetilde{T}\mathcal{U}-]=\frac{h^2}{8\pi^2 m}\sum_{k=1}^{3}D_k^2-$$

$$-\mu H(\widetilde{T}R\sigma_3\widetilde{R}T)(\widetilde{T}RT)]\widetilde{T}\mathcal{U}$$

$$\frac{ih}{2\pi}\frac{\partial}{\partial t}V'=[-\frac{h^2}{8\pi^2 m}\Sigma D_k^2-\mu H.S_3]V' \qquad (12.7)$$

$$V'=\widetilde{T}RT.V \quad \text{siendo} \quad V=\widetilde{T}\mathcal{U}. \qquad (12.8)$$

Las componentes de V' están dadas por las combinaciones lineales que resultan de (12. 8). El cuadrado de los coeficientes a_{ik} de estas combinaciones lineales dan la probabilidad que estando orientado el espín según V_k por efecto de un campo magnético $H=H_z$, $H_x=H_y=0$, se oriente por acción del un nuevo campo magnético que sustituye al primero y cuya dirección forma un ángulo ϑ con z, según la componente V_i':

	$V_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(U_1 + iU_2)$	$V_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(U_1 - iU_2)$	$V_3 = U_3$
V'_1	$\operatorname{sen}^4 \frac{\vartheta}{2}$	$\cos^4 \frac{\vartheta}{2}$	$\frac{1}{2} \operatorname{sen}^2 \vartheta$
V'_2	$\cos^4 \frac{\vartheta}{2}$	$\operatorname{sen}^4 \frac{\vartheta}{2}$	$\frac{1}{2} \operatorname{sen}^2 \vartheta$
V'_3	$\frac{1}{2} \operatorname{sen}^2 \vartheta$	$\frac{1}{2} \operatorname{sen}^2 \vartheta$	$\cos^2 \vartheta$

Los valores propios de la energía dados por (12. 7) según (11. 5) son:

$$E_1 = E_0 - \mu H$$
$$E_2 = E_0 + \mu H$$
$$E_3 = E_0$$

donde E es la energía en ausencia del campo magnético y H el valor absoluto del campo magnético. Hay una adición de energía $\mp \mu H$ según las componente V'_1 y V'_2. La energía según la componente V'_3 permanece invariable.

Deseo expresar mi reconocimiento al Prof. Dr. G. Beck por haberme propuesto el tema, por su permanente asesoramiento, y por sus útiles discusiones; y al Prof. Dr. E. Gaviola, por haber hecho posible la realización de este trabajo.

Apéndice II

Soluciones esféricas del campo mesotrónico vectorial:

(T. 1)

$U_r = 0.$

$$G_r = -i\, C_1^{l,m} \frac{l(l+1)}{r^2} \psi_l(kr)\, P_l^m(\cos\vartheta)\, e^{im\varphi}$$

$$U_\vartheta = C_1^{l,m} \frac{m}{r \operatorname{sen}\vartheta} \psi_l(kr)\, P_l^m(\cos\vartheta)\, e^{im\varphi}$$

$$G_\vartheta = -i\, C_1^{l,m} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \psi_l(kr) \frac{d}{d\vartheta} P_l^m(\cos\vartheta)\, e^{im\varphi}$$

$$U_\varphi = C_1^{l,m} \frac{i}{r} \psi_l(kr) \frac{d}{d\vartheta} P_l^m(\cos\vartheta)\, e^{im\varphi}$$

$$G_\varphi = C_1^{l,m} \frac{m}{r\,\mathrm{sen}\vartheta} \frac{d}{dr} \psi_l(kr)\, P_l^m(\cos\vartheta)\, e^{im\varphi}$$

$$\vec{F} = -i\, k_0 \vec{U} \qquad U_0 = 0.$$

(T. 2)

$$U_r = C_2^{l,m} \frac{l(l+1)}{r^2} \psi_l(kr)\, P_l^m(\cos\vartheta)\, e^{im\varphi}$$

$$G_r = 0$$

$$U_\vartheta = C_2^{l,m} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \psi_l(kr) \frac{d}{d\vartheta} P_l^m(\cos\vartheta)\, e^{im\varphi}$$

$$G_\vartheta = C_2^{l,m} \frac{ik^2 m}{r\,\mathrm{sen}\vartheta} \psi_l(kr)\, P_l^m(\cos\vartheta)\, e^{im\varphi}$$

$$U_\varphi = C_2^{l,m} \frac{im}{r\,\mathrm{sen}\vartheta} \frac{d}{dr} \psi_l(kr)\, P_l^m(\cos\vartheta)\, e^{im\varphi}$$

$$G_\varphi = C_2^{l,m} \frac{k^2}{r} \psi_l(kr) \frac{d}{d\vartheta} P_l^m(\cos\vartheta)\, e^{im\varphi}$$

$$\vec{F} = -i\, k_0 \vec{U} \qquad U_0 = 0.$$

(*L*)

$$U_r = C_L^{l,m}\, i\, k_0 \frac{d}{dr} X(kr)\, P_l^m(\cos\vartheta)\, e^{im\varphi}$$

$$\vec{F} = C_L^{l,m} \frac{\varkappa^2}{ik_0} \vec{U}$$

$$U_\vartheta = C_L^{l,m}\, i\, k_0 \frac{1}{r} X_l(kr) \frac{d}{d\vartheta} P_l^m(\cos\vartheta)\, e^{im\varphi}$$

$$\vec{G} = 0$$

$$U_\varphi = - C_L{}^{l,m} \frac{k_0 m}{r \operatorname{sen}\vartheta} X_l(kr)\, P_l{}^m(\cos\vartheta)\, e^{im\varphi}$$

$$U_0 = C_L{}^{l,m} k^2 X_l(kr)\, P_l{}^m(\cos\vartheta)\, e^{im\varphi}.$$

Con:

$$\psi_l(kr) = \sqrt{kr}\, J_{l+1/2}(kr), \quad X_l(kr) = \sqrt{\frac{k}{r}}\, J_{l+1/2}(kr)$$

$$C_1{}^{l,m} = \left[\frac{hc}{8\pi^2 R k_0} \cdot \frac{(2l+1)(l-m)!}{l(l+1)(l+m)!}\right]^{1/2}$$

$$C_2{}^{l,m} = \left[\frac{hck^2}{8\pi^2 R k_0^3} \cdot \frac{(2l+1)(l-m)!}{l(l+1)(l+m)!}\right]^{1/2}$$

$$C_L{}^{l,m} = \left[\frac{hc}{8\pi^2 R} \cdot \frac{1}{k^2\varkappa^2 k_0} \cdot \frac{(2l+1)(l-m)!}{(l+m)!}\right]^{1/2}.$$

Los elementos de matriz del espín se calculan en la representación dada por las soluciones esféricas teniendo presente las relaciones:

$$\frac{d}{dr}\psi_l(kr) = -\frac{l}{r}\psi_l(kr) + k\,\psi_{l-1}(kr) = \frac{l+1}{r}\psi_l(kr) - k\,\psi_{l+1}(kr)$$

$$\frac{d}{dr}X_l(kr) = -\frac{l+1}{r}X_l(kr) + k\,X_{l-1}(kr) = \frac{l}{r}X_l(kr) - k\,X_{l-1}(kr)$$

$$\frac{d}{d\vartheta}P_l{}^m(\cos\vartheta) = -P_l{}^{m+1}(\cos\vartheta) + m\frac{\cos\vartheta}{\operatorname{sen}\vartheta}P_l{}^m(\cos\vartheta)$$

$$\operatorname{sen}\vartheta\, P_l{}^{m-1}(\cos\vartheta) = \frac{1}{2l+1}\left[P_{l+1}{}^m(\cos\vartheta) - P_{l-1}{}^m(\cos\vartheta)\right]$$

$$\cos\vartheta\, P_l{}^m(\cos\vartheta) = \frac{l-m+1}{2l+1}P_{l+1}{}^m(\cos\vartheta) + \frac{l+m}{2l+1}P_{l-1}{}^m(\cos\vartheta).$$