LE THEOREME ET LE PROGRAMME DE BOREL (*)

par Georges Valiron

Professeur à la Faculté des Sciences de Paris

Le second des travaux fondamentaux de Borel auquel il a été fait allusion dans la troisième conférence, créa toute une théorie en posant le problème de l'étude des singularités essentielles d'une façon entièrement nouvelle. Avec Picard et son lointain successeur Juliá, l'étude des points où la fonction $f(z)$ prend une valeur donnée arbitraire Z est qualitative: une valeur Z est ordinaire si elle est prise une infinité de fois dans le domaine envisagé, sinon elle est exceptionnelle. Avec Hadamard, le problème de la décomposition en facteurs avait conservé son aspect formel. Des propriétés des coefficients ou de la croissance du module maximum, on déduisait la forme des facteurs exponentiels de la décomposition, ce qui avait certes de l'importance, Hadamard le montra dans l'application de son théorème à la fonction de Riemann.

Borel s'est proposé de pénétrer beaucoup plus profondement dans l'étude de la fonction. Ses idées à ce sujet, qui apparaissent dans les conclusions de son Mémoire des Acta mathematica de 1896, sont précisées dans son Livre sur les fonctions entières de 1900. Il s'agit de connaître autant que possible la fonction. Ce n'est pas, dit-il, parce qu'elles sont données par des séries simples toujours convergentes, que les fonctions trigonométriques $\cos z$, $\sin z$, sont bien connues, c'est parce qu'elles sont périodiques, donc parce qu'on sait que les points où elles prennent une valeur donnée arbitraire se déduisent les uns des autres par des translations. Connaître une fonction, ce sera connaître des propriétés des points où elle prend une valeur donnée arbitraire. Pour une fonction entière $f(z)$, on sait que, si la valeur Z n'est pas exceptionnelle au sens de Picard, elle est prise une infinité de fois. Quelles sont les propriétés générales des zéros $a_n(Z)$ de $f(z)-Z$ losque Z est quelconque? Borel fournit une première réponse à cette question.

(*) Cuarta clase (6 de agosto de 1946) del cursillo sobre *Funciones enteras* dictado en el Instituto de Matemática de la Universidad de Buenos Aires.

Si la fonction est d'ordre ρ positif, c'est-à-dire si

$$(1) \qquad \overline{\lim_{r=\infty}} \frac{\log(\log M(r))}{\log r} = \rho, \qquad M(r) = \max_{0 \leq \varphi < 2\pi} |f(re^{i\varphi})|$$

(Voir la première conférence) et si $n(r; Z)$ est le nombre des zéros de $f(z) - Z$ qui appartiennent au cercle $|z| \leq r$, on a

$$(2) \qquad \overline{\lim_{r=\infty}} \frac{\log n(r; Z)}{\log r} = \rho$$

pour toutes les valeurs de Z, sauf au plus pour une seule valeur Z. Cette valeur exceptionnelle ne peut exister que si ρ est un nombre entier; la valeur du premier membre de (2) est inférieure à ρ lorsque Z est valeur exceptionnelle. Dans le cas de l'ordre infini, Borel introduit un ordre $\omega(r)$ qui dépend de r et est tel que

$$\overline{\lim_{r=\infty}} \frac{\log \log M(r)}{\omega(r) \log r} = 1$$

on a encore

$$\overline{\lim_{r=\infty}} \frac{\log n(r; Z)}{\omega(r) \log r} = 1$$

sauf au plus pour une seule valeur exceptionnelle de Z pour laquelle la limite supérieure est inférieure à 1. Mais il n'atteint par sa méthode que certaines classes de fonctions d'ordre infini. La méthode de Borel est basée sur la décomposition en facteurs et sur la détermination de l'ordre de la fonction entière définié par un produit de Weierstrass-Hadamard, à partir de l'ordre du nombre de ces zéros. Dans le cas de l'ordre fini non entier ρ, il montre que si l'on avait

$$\overline{\lim_{r=\infty}} \frac{\log n(r; Z)}{\log r} = \rho_1 < \rho,$$

le produit canonique figurant dans le théorème d'Hadamard, formé avec les zéros de $f(z) - Z$ serait d'ordre ρ_1 au plus; en le multipliant par une exponentielle $e^{Q(z)}$ où $Q(z)$ est un polynôme de degré moindre que ρ, on ne pourrait pas obtenir une fonction d'ordre ρ. Pour traiter le cas de l'ordre entier, il s'agit de montrer qu'il ne peut pas exister deux valeurs de Z pour lesquelles le premier membre de (2) serait inférieur à ρ. Il est loisible de supposer ces valeurs exceptionnelles égales à 0 et 1. On aurait

$$f(z) \equiv Pe^{Q}, \qquad f(z)-1 \equiv P_1 e^{Q_1},$$

donc

$$Pe^{Q} - P_1 e^{Q_1} \equiv 1, \tag{3}$$

P et P_1 étant des produits infinis d'ordre inférieur à ρ et Q et Q_1 des polynômes de degré ρ. En multipliant les deux membres de (3) par e^{-Q_1}, on montre que e^{Q-Q_1} est aussi d'ordre ρ; $Q-Q_1$ est un polynôme de degré ρ. Dérivant (3), on obtient

$$(P'+Q'P)\,e^{Q} - (P'_1+Q'_1P_1)\,e^{Q_1} \equiv 0 \tag{4}$$

donc

$$e^{Q-Q_1} \equiv \frac{P'_1+Q'_1P_1}{P'+Q'P}.$$

Ceci est impossible parce que le second membre est d'ordre inférieure à ρ (c'est ce que montre Borel) tandis que le premier membre est d'ordre ρ. Borel généralise ce raisonnement au cas de l'ordre infini; sur ce point, sa méthode qui ne couvrait pas tous les cas a été reprise et complétée par Blumenthal. Il convient de noter qu'en écrivant (4) sous la forme

$$\frac{f'}{f} Pe^{Q} - \frac{f'}{f-1}\, P_1 e^{Q_1} \equiv 0$$

et éliminant $P_1 e^{Q_1}$ entre cette identité et (3), on obtient en résolvant par rapport à Pe^{Q} qui est f, l'identité indépendante de toute hypothèse:

$$f \equiv \frac{\dfrac{f'}{f-1}}{-\dfrac{f'}{f}+\dfrac{f'}{f-1}}. \tag{5}$$

La méthode de Borel équivaut à écrire f sous cette forme. Si l'ordre du nombre des zéros de $f(z)$ et $f(z)-1$ est inférieur à ρ, l'ordre du second nombre de (5) est inférieur à ρ, d'où contradiction.

Le théorème de Borel met en évidence l'invariance de l'ordre du nombre des zéros de $f(z)-Z$ lorsqu'on compte ces zéros dans des cercles de centre origine: sauf pour une valeur exceptionnelle au plus, cet ordre est toujours le même, c'est l'ordre de la fonction $f(z)$. Il ne s'agit évidemment que d'une première approximation. Les fonctions $\sin \pi z$ et $\dfrac{1}{\Gamma(z)}$ remarque Borel, ont des nombres de zéros dont le rapport est 2 alors que les modules maxima sont comparables à $e^{\pi r}$ et à $e^{r \log r}$ respectivement. Il conviendra donc de préciser les résultats obtenus, ce qui ne doit pas présenter de grosses difficultés dans le cas de l'ordre non entier. En outre, dit Borel, on sera sans doute amené à tenir compte des arguments des zéros. Comme exemple particulier de cette nécessité, Borel signale le cas des fonctions d'ordre non entier ρ dont les zéros sont alignés et sont des fonctions régulières de leur nombre, ainsi, si le $n^{ième}$ zéro est $n^{\frac{1}{\rho}}$, le maximum du module sera asymptotiquement égal à $A_\rho r^\rho$ Inversement, si l'on sait que les zéros sont alignés, ou même si leurs arguments ont une limite, π par exemple, on doit pouvoir déduire la valeur asymptotique de leur nombre de la valeur asymptotique de la fonction dans la direction opposée, ici la droite d'argument 0. D'une façon générale, connaître les zéros, c'est connaître non seulement leurs modules, mais aussi leurs arguments. Mais, dit encore Borel, s'il importe de poser des questions, il importe encore plus de trouver des méthodes pour y répondre. On pourrait aussi dire qu'il faut que les questions soient bien posées. Les questions posées par Borel dans les conclusions de son livre sur les fonctions entières étaient bonnes puisqu'elles sont aujourd'hui à peu près résolues, ce qui ne signifie pas que la théorie soit achevée, bien au contraire: chaque pas en avant découvre des horizons nouveaux et le plus souvent chaque question résolue augmente au lieu de le diminuer le nombre des questions à résoudre.

Parmi ceux qui ont tout d'abord poursuivi les recherches de Borel *et obtenu des résultats très précis sur les fonctions d'ordre fini positif, il faut citer à part* Lindelöf. Alors que Borel compare la croissance à $r^{\rho+\varepsilon}$, Lindelöf la compare à

$$r^{\rho}(\log r)^{\rho_1}\dots(\log_p r)^{\rho_p},$$

il obtient des résultats précis et traite le cas des fonctions d'ordre entier avec un grand succès. On peut étendre ses résultats et les rendre applicables à toutes les fonctions d'ordre fini en introduisant l'ordre précisé defini dans la première conférence. Pour les fonctions d'ordre non entier, le théorème de Borel est remplacé par le suivant:

Si $f(z)$ est d'ordre non entier ρ et d'ordre précisé $\rho(r)$, on a, à partir d'une valeur $r(Z)$ de r,

$$n(r;Z) < Kr^{\rho(r)}, \tag{5'}$$

K étant une constante fonction de ρ, et pour une suite de valeurs r_p de r indépendante de Z,

$$n(r;Z) > K'r^{\rho(r)}, \qquad r = r_p, \qquad r > r(Z), \tag{6}$$

K' étant aussi une constante dépendant de ρ.

Dans le cas de l'ordre entier, l'inégalité (5′) reste valable, mais (6) peut ne pas être vérifiée. Les recherches relatives à ce cas de l'ordre entier étaient gênées par la présence des exponentielles dans la décomposition en facteurs et, d'autre part les inégalités du type (6) valables pour une suite seulement de valeurs de r proviennent des irrégularités possibles de la fonction $n(r;Z)$. J'ai introduit à la place de cette fonction sa moyenne logarithmique qui s'introduit dans le théorème de Jensen:

$$N(r;Z) = \int_0^r [n(t;Z) - n(o;Z)]\frac{dt}{t} + n(o;Z)\log r.$$

On sait en effet que, dans le cas des fonctions d'ordre nul à croissance assez lente, on a

$$N(r;Z) \sim \log M(r,f).$$

(Voir la deuxième conférence). On peut d'autre part reprendre la méthode de démonstration de Borel, mais en écrivant

$$f = Pe^{Q}, \quad f-1 = P_1 e^{Q_1}$$

P et P_1 étant des polynômes formés avec les zéros de f et $f-1$ intérieurs à un cercle $|z|<r'$ et en faisant l'hypothèse que, pour une suite de valeurs r indéfiniment croissantes, on aurait

$$N(r;o) \leqq H \log M\left(\frac{r}{k}\right), \quad N(r;1) \leqq H \log M\left(\frac{r}{k}\right).$$

On arrive à une contradiction si r', H et k sont convenablement choisis (Voir Lectures on the general theory of integral functions) et l'on a le résultat suivant:

Si $f(z)$ est d'ordre fini, à $k>1$ correspond un nombre $H(k)$ tel que, si $Z_1 \neq Z_2$, on a, pour $r > r(Z_1, Z_2)$:

$$(7) \qquad N(r;Z_1) + N(r;Z_2) \geqq H(k) \log M\left(\frac{r}{k}\right).$$

Dans le cas de l'ordre infini, on a un résultat analogue, mais moins précis; il peut d'ailleurs exister dans ce cas un ensemble de valeurs Z ayant la puissance du continu pour lesquelles

$$\lim_{r=\infty} \frac{\log N(r;Z)}{\log_2 M(r)} < 1.$$

Je me borne à indiquer que de l'inégalité (7) et de l'inégalité de Jensen (Voir Première conférence), on déduit après multiplication par $\dfrac{1}{r^{1+\rho}}$ et intégration la proposition suivante:

Si l'intégrale

$$(8) \qquad \int_1^\infty \frac{\log M(r)}{r^{1+\rho}}\, dr$$

diverge, la série

$$(9) \qquad \sum_1^\infty \frac{1}{|a_n(Z)|^\rho}$$

diverge pour tous les Z sauf un au plus. Si l'ordre ρ n'est pas entier, la valeur exceptionnelle n'existe pas. Si l'intégrale (8) converge, la série (9) converge pour tous les Z (Il est entendu que ρ est l'ordre et les $a_n(Z)$ les zéros non nuls de $f(z)-Z$).

Ce résultat régle encore quelques questions posées par Borel et permet de traiter la question du genre. La question relative aux fonctions à zéros alignés fut également traitée dans le cas de l'ordre non entier. Si l'on suppose que les arguments des zéros ont pour limite π et si

$$n(r)=n(r;\,o)\sim r^{\rho(r)},$$

$\rho(r)$ jouissant des propriétés de l'ordre précisé, on obtient l'égalité asymptotique

$$\log f(z)=\left[\frac{\pi e^{i\varphi\rho}}{\sin\pi\rho}+\varepsilon(r,\varphi)\right]r^{\rho(r)},\qquad z=re^{i\varphi},$$

valable pour $|\varphi|<\pi$, la fonction $\varepsilon(r,\varphi)$ tendant vers zéro avec $\dfrac{1}{r}$. Cette égalité permet d'étudier les zéros de $f(z)-Z$ d'une façon très précise.

Inversement, si l'on sait que les arguments des zéros ont pour limite π et que

$$\log f(r)\sim(-1)^p\, r^{\rho(r)},\qquad p=\text{partie entière de }\rho,$$

la résolution de l'équation intégrale asymptotique

$$(10\qquad \log f(r)\sim(-1)^p\int_0^\infty\frac{n(x)\,r^{p+1}}{x^{p+1}(x+r)}\,dx\sim(-1)^p\,r^{\rho(r)}$$

est possible et montre que

$$n(r)\sim\frac{|\sin\pi\rho|}{\pi}\,r^{\rho(r)}.$$

Le procédé de résolution de l'équation (10) que j'avais utilisé a été simplifié, dans le cas où $\rho(r) = p + \frac{\rho_1}{\log r}$, par Hardy et Titchmarsh. Tout récemment Delange (Comptes Rendus, 1944), a repris la question et obtenu de jolis résultats même dans le cas de l'ordre entier.

L'étude circulaire du nombre des zéros a pris une forme encore plus précise avec l'introduction par R. Nevanlinna d'une fonction caractéristique nouvelle, qui permet en outre de traiter le cas des fonctions méromorphes. Le théorème de Jensen, dans le cas général d'une fonction méromorphe qui n'est ni nulle ni infinie pour $z = 0$, s'écrit

$$N(r;0) - N(r;\infty) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(re^{i\varphi})|\,d\varphi - \log|f(0)|.$$

R. Nevanlinna eut l'idée de séparer dans l'intégrale du second membre les termes positifs et les termes négatifs. Si l'on désigne par $\log^+ a$ le nombre $\log a$ lorsque a est $\geqq 1$ et 0 si $a \leqq 1$, la formule peut s'écrire

$$N(r;0) + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+ \frac{1}{|f(re^{i\varphi})|}\,d\varphi + \log|f(0)| =$$

$$= N(r;\infty) + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+|f(re^{i\varphi})|\,d\varphi.$$

R. Nevanlinna prend pour fonction caractéristique

$$T(r,f) = N(r;\infty) + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+|f(re^{i\varphi})|\,d\varphi.$$

Dans le cas où $f(z)$ est une fonction entière, $T(r,f)$ se réduit à son second terme qu'on désigne par $m(r,f)$. On a, si $k > 1$,

$$\frac{k-1}{k+1}\log M\left(\frac{r}{k}, f\right) < m(r,f) < \log M(r,f)$$

ce qui établit le lien entre les résultats obtenus à partir de la nouvelle fonction caractéristique et l'ancienne. L'ordre défini par

$$\overline{\lim_{r=\infty}} \frac{\log T(r,f)}{\log r}$$

coïncide avec l'ordre de Borel dans le cas des fonctions entières et aussi avec eclui qu'il avait défini, et dont nous n'avons pas parlé, dans le cas des fonctions méromorphes. La fonction $T(r,f)$, comme $\log M(r,f)$ lorsque $f(z)$ est entière, est une fonction convexe de $\log r$; cette propriété joue un rôle fondamental dans certaines démonstrations. Utilisant l'identité (5), R. Nevanlinna obtint de premiers résultats qui étendent et précisent mon inégalité (7). Sa méthode prit sa forme définitive à la suite d'une remarque de Littlewood et Collingwood qui introduisent non plus deux valeurs Z, mais p valeurs dans les formules. L'identité (5) de Borel est alors remplacée par

$$(f-a_1)(f-a_2)\ldots(f-a_{p-1}) = \frac{\dfrac{f'}{f-a_p}}{\sum\limits_1^p \dfrac{b_j f'}{f-a_j}},$$

les b_j étant des constantes convenables qui s'expriment au moyen des a_j. On obtient notamment l'inégalité

$$(11) \qquad (p-2)\,T(r,f) \leqq \sum_1^p N(r;a_j) + S(r),$$

le reste $S(r)$ étant de l'ordre de $\log r$ pour les fonctions d'ordre fini. Mon but n'est pas de dire ici tout ce qu'on peut tirer de cette remarquable inégalité. On se reportera, pour ce point au Livre de Nevanlinna de la Collection Borel. Je signalerai seulement que, dans la définition des valeurs déficientes, valeurs Z pour lesquelles

$$\overline{\lim_{r=\infty}} \frac{N(r;Z)}{T(r,f)} < 1$$

il convient de remplacer la fonction $T(r,f)$ par une fonction majorante, à croissance régulière, $r^{\rho(r)}$ par exemple dans le cas de l'ordre fini. De l'inégalité (11), j'avais déduit que, pour une fonction d'ordre fini, on a

$$(12) \qquad \lim_{r=\infty} \frac{N(r;Z)}{T(r,f)} = 1$$

pour tous les Z sauf ceux d'un ensemble de mesure linéaire nulle; pour l'ordre infini, le résultat était plus compliqué. A la suite de divers travaux, l'égalité (12) a été étendue par Ahlfors à toutes les fonctions méromorphes, l'ensemble exceptionnel, qui peut exister étant du type indiqué. Cette proposition est liée à un théorème d'Henri Cartan, qui a établi que la fonction $T(r,f)$ est la moyenne superficielle ou linéaire de $N(r;Z)$ lorsque Z décrit un domaine ou une courbe, à un terme additif fini près. A la même époque, c'est-à-dire vers 1929-30, la théorie de Nevanlinna a été étendue aux fonctions algébroïdes $u(z)$ définies par une équation

$$A_q(z)\,u^q + A_{q-1}(z)\,u^{q-1} + \ldots + A_1(z)\,u + A_0(z) = 0$$

où les coefficients $A_j(z)$ sont des fonctions entières. Mais le théorie générale de ces fonctions algébroïdes reste moins développée que celle des fonctions méromorphes.

La méthode de Nevanlinna permet de généraliser le théorème de Schottky. On obtient d'abord la proposition suivante:

Si $F(z)$ est méromorphe pour $|z| \leqq R$, si $F(0)$ est différent des valeurs $0, 1, \infty$ et si $F'(0)$ est fini non nul, on a, pour $r < R$,

$$T(r,F) < 5\{N(R,0) + N(R,1) + N(R,\infty)\} + 405 + 10\log^+|F(0)|$$

$$+ 5\log^+\left|\frac{1}{F'(0)R}\right| + 14\log\frac{R}{R-r}.$$

Cette inégalité donne le théorème de Landau, elle fournit une borne du nombre des zéros de $F(z) - Z$ lorsque Z est arbitraire et $|z| < r < R$. On obtient ce résultat

I - Si $F(z)$ est méromorphe pour $|z| < R$ et prend n fois au plus dans ce cercle trois valeurs a, b, c telles que les distances des images sphériques de a, b, c soient supérieures à δ; dans le cercle $|z|<kR$, $k<1$, $F(z)$ prend au plus

$$\frac{1}{(1-k)^2}\left[(An+B)\log\frac{2}{1-k}+C\log\frac{1}{\delta}+D\log\frac{1}{d}\right]$$

fois toute valeur Z dont la distance sphérique à un point $Z(k)$ est au moins d. Les nombres n, k, δ, d sont arbitraires; A, B, C, D sont des constantes numériques positives.

Cette inégalité a été remplacée pour Milloux par une autre qui semble être la plus précise possible, mais elle suffit pour l'étude de la distribution des valeurs des fonctions méromorphes. Enfin, le théorème de Schottky se généralise comme suit (Pour les démonstrations, voir: Mémorial des Sciences math., n°. 89, 1938):

II - Si $F(z)$ est holomorphe pour $|z|<1$, prend n fois au plus dans ce cercle les valeurs Z et Z' telles que $|Z|<P$, $|Z'|<P$, $|Z'-Z|>\frac{1}{P}$, où $P>1$, et si

$$|F(z)|<M$$

en des points du cercle $|z|<\tau$ qui ne peuvent pas être enfermés dans $2n$ cercles dont la somme des rayons est inférieure à $d<\tau$, on a, pour $|z|\leqq r$ et $\tau<r<1$,

$$\log|F(z)|<\frac{1}{(1-r)^2}\left[\alpha n\log\frac{2}{d(1-r)}+\beta\log\frac{2}{1-r}+\gamma\log(P+M)\right],$$

α, β, γ étant des constantes numériques positives.

Ces propositions permettent de remplacer l'étude des fonctions autour d'une singularité essentielle faite au moyen de la théorie des familles normales ou même quasi-normales de Montel (Julia, Saxer) par une étude directe qui fournit des résultats quantitatifs. Le théorème I s'utilise comme suit:

Supposons que $F(z)$ soit méromorphe dans un domaine D et soit D' complètement intérieur à D. Couvrons D' par p cercles C_j ($j=1, 2, \ldots, p$) intérieurs à D et tels que, pour chaque j existe un cercle Γ_j concentrique à C_j, intérieur à D, dont le rayon soit k fois le rayon de C_j, k étant un nombre donnée supérieur à 1. Considérons le nombre des zéros de $F(z)-Z$ (des pôles si $Z=\infty$) appartenant à Γ_j, il a un minimum n''_j atteint pour Z'''_j. Supprimons de la sphère où l'on représente Z le cercle de centre Z'''_j et rayon δ. Pour les points restants, on a un nouveau minimum n'_j atteint pour Z''_j; supprimons de la sphère le cercle de centre Z''_j et rayon δ. On a encore un minimum n_j pour les points restants atteint pour Z'_j. Les distances sphériques de Z'_j, Z''_j, Z'''_j étant au moins δ, $F(z)$ prendra dans C_j,

$$A(k)\left[n_j + \log\frac{2}{\delta} + \log^+\frac{1}{\delta_j}\right]$$

fois au plus les valeurs Z pour lesquelles, Z_j étant un certain point, on a: distance $Z, Z_j > \delta_j$. En ajoutant ces nombres, on a une borne du nombre des zéros de $F(z) - Z$ dans D' lorsque Z est extérieur à certains cercles (sur la sphère). En comparant cette borne au nombre effectif des zéros, on obtient une borne inférieure de Σn_j, donc de n_j dans l'un des cercles Γ_j.

Dans le cas le plus simple, celui des fonctions d'ordre fini positif on obtient des résultats précis que l'on trouvera dans le Mémorial cité. De ces résultats, on déduit ce corollaire:

Si $f(z)$ est une fonction méromorphe d'ordre fini positif ρ, il existe une suite de cercles Λ_j définis par

$$|z - z_j| < \varepsilon_j |z_j|, \qquad \lim_{j=\infty} |z_j| = \infty, \qquad \lim_{j=\infty} \varepsilon_j = 0,$$

tels que, dans Λ_j, $f(z)$ prend

$$|z_j|^{\rho - \eta_j}, \qquad \lim_{j=\infty} \eta_j = 0.$$

fois au moins toute valeur Z sauf celles représentés dans deux cercles de rayon $e^{-|z_j|^{\rho-\eta_j}}$ de la sphère.

De tels cercles sont des cercles de remplissage d'ordre ρ. En prenant une direction D, $\arg z = C^{te}$, d'accumulation des arguments des z_j, on a ce que j'ai appelé une direction de Borel (d'ordre ρ).

Une direction de Borel est une direction D telle que le théorème de Borel soit vrai dans tout angle de sommet origine et bissectrice D, si petite que soit son ouverture. Si $r(n, Z)$ est le module de $n^{ième}$ zéro de $f(z) - Z$ dans cet angle, la série

$$\Sigma \frac{1}{r(n, Z)^{\rho-\varepsilon}}$$

est divergente, pour $\varepsilon > 0$ si petit soit-il, sauf pour deux valeurs de Z au plus.

L'enoncé II donné plus haut, qui complète le théorème de Schottky, sert à étudier les directions de Borel des fonctions entières, en cherchant les relations entre ces directions et l'ordre de grandeur du maximum du module dans un angle. Il montre par exemple, que, pour une fonction entière d'ordre fini ρ supérieur à $\frac{1}{2}$, il existe au moins deux directions de Borel. Tout angle dont l'ouverture est supérieure au plus grand des deux nombres $\frac{\pi}{\rho}$ et $2\pi - \frac{\pi}{\rho}$ en contient une, ce qui complète un théorème de Bieberbach. Si $\rho > 1$ et s'il n'y a que deux directions de Borel, leur angle est $\frac{\pi}{\rho}$.

De nombreuses recherches ont été faites sur les directions de Borel, la plus grande partie est exposée dans le Mémorial cité. Mais beaucoup de questions restent à résoudre, par exemple: la comparaison des directions de Borel d'une fonction et de sa dérivée; l'étude des directions de Borel des fonctions algebroïdes d'ordre fini.

CHEMINS DE DETERMINATION. FONCTIONS INVERSES DOMAINES D'UNIVALENCE (*)

Lorsqu'on considère les valeurs d'une fonction entière $f(z)$ sur une courbe ou chemin qui joint un point à distance finie au point à l'infinie, les circonstances les plus diverses peuvent se présenter. On sait que pour la fonction e^{z^k}, où k est un entier positif, on aura une valeur limite qui sera zéro lorsque z ira à l'infini sur les demi-droites $\varphi = \arg. z$ pour lesquelles $\cos k\varphi$ est négatif, infinie lorsque $\cos k\varphi$ est positif, tandis que si $\cos k\varphi = 0$ il n'y a pas de limite, la valeur Z de la fonction tourne indéfiniment sur la circonférence $|Z| = 1$. On a de même des secteurs $\varphi_0 < \varphi < \varphi_1$ dans lesquels $f(z)$ tend vers zéro lorsque $|z| \to \infty$ et d'autres où $|f(z)| \to \infty$, pour les fonctions dont les zéros sont alignés et régulièrement distribués, lorsque l'ordre est supérieur à $\dfrac{1}{2}$. Pour les fonctions de Mittag-Leffler

$$E_\rho(z) = \sum_0^\infty \frac{z^n}{\Gamma\left(1+\frac{n}{\rho}\right)}, \quad \rho > \frac{1}{2},$$

la fonction se comporte comme

$$\rho e^{z^\rho}$$

lorsque $|\varphi = \arg z| < \dfrac{\pi}{2\rho}$, la différence entre $E_\rho(z)$ et cette expression tendant vers zéro lorsque $|z| \to \infty$, tandis qu'à l'extérieur de l'angle $|\varphi| \leqq \dfrac{\pi}{2\rho} + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, $E_\rho(z)$ tend vers zéro. Lorsque ρ devient très grand, l'angle dans lequel la fonction tend vers zéro

(*) Quinta y última clase (10 de agosto de 1946) del cursillo sobre *Funciones enteras* dictado en el Instituto de Matemática de la Universidad de Buenos Aires.

devient très voisin de 2π. Mittag-Leffler a indiqué des fonctions d'ordre infini pour lesquelles la valeur de la fonction a pour limite zéro lorsque z tend vers l'infini sur toute demi-droite $\varphi =$ const. (mais cette convergence n'est pas uniforme).

Winan a montré que, lorsqu'une fonction entière $f(z)$ est d'ordre inférieur à $\frac{1}{2}$, il existe une suite de circonférences

$$|z| = A_n, \quad n = 1, 2, \ldots, \quad \lim A_n = \infty,$$

telles que le minimum de $|f(z)|$ pour $|z| = A_n$ soit de l'ordre du maximum $M(A_n)$. On a d'une façon plus précise

$$|f(z)| > M(A_n)^k, \qquad |z| = A_n,$$

k est un nombre positif. On a vu ensuite (Littlewood, Winnan et Valiron) que l'on peut prendre pour k tout nombre inférieur à $\cos(\pi\rho)$, ρ étant l'ordre. Les fonctions d'ordre moindre que $\frac{1}{2}$ sont donc à rapprocher des polynômes, il ne peut pas exister de courbes allant à l'infini sur lesquelles le module de la fonction resterait borné.

D'une façon générale, soit $f(z)$ une fonction méromorphe autour du point à l'infini, qui est limite de pôles, ou point essentiel, et une courbe continue C qui va à l'infini. Prenons les valeurs de la fonction $f(z)$ sur la portion de C pour laquelle $|z| > r'$ et adjoignons à cet ensemble ses valeurs limites; nous obtenons un ensemble $E(r')$. Lorsque r' croît indéfiniment, l'ensemble $E(r')$ tend vers un ensemble limite $D(C, f)$ qui est contenu dans tous les $E(r')$. Bien que $D(C, f)$ puisse se réduire à un point ou à une courbe, nous l'appellerons le domaine d'indétermination de $f(z)$ sur C (sous-entendu, à l'infini). Lorsque $D(C, f)$ se réduit à un point w, la courbe C sera appelée chemin de détermination w, et w sera une valeur asymptotique. Pour les fonctions entières examinées plus haut, on a trouvé des chemins de détermination o, d'autres de détermination ∞ et des chemins d'indétermination finie, $D(C, f)$ étant borné et étant une courbe. Si l'on prend la fonction e^z, $z = x + iy$ et la courbe $x = \sin ky$; k étant incommensurable, on obtient un domaine d'indétermination qui est une couronne. Pour la fonction elliptique pz, toute branche parabolique d'une courbe algébrique est chemin, d'indétermination complète, $D(C, f)$ comprend tout le plan.

Hurwitz et Denjoy ont montré en 1907 que les valeurs asymptotiques sont les points singuliers transcendants de la fonction inverse $z = \varphi(Z)$ de la fonction considerée $Z = f(z)$. Cette fonction inverse peut être définié par prolongement analytique de l'un quelconque de ses éléments, c'est une fonction multiforme à une infinité de branches, elle est uniforme sur une surface de Riemann à une infinité de feuillets qui est aussi la surface décrite par le point $Z = f(z)$ lorsque z décrit son plan. Les points de ramification de la surface sont les points critiques algébriques définis par $Z' = f(z')$, $f'(z') = 0$ et les points singuliers transcendants w correspondant aux valeurs asymptotiques de $f(z)$. Car, si w est une singularité quelconque de la fonction inverse $z = \varphi(Z)$, lorsque Z tend vers w, z tend vers une limite finie ou vers l'infini. En effet, soit C une circonférence $|z| = R$ de grand rayon sur laquelle $f(z) - w$ ne s'annule pas $|f(z) - w|$ y reste supérieur à un nombre positif η. Si $z_1, z_2, \ldots, z_p$ sont les zéros de $f(z) - w$ intérieurs au cercle $|z| \leqq R$ et si l'on trace des cercles ayant pour centres ces zéros et pour rayon ρ, ρ étant assez petit pour que ces cercles soient extérieurs les uns aux autres et ne coupent pas $|z| = R$, on aura sur ces cercles et à leur extérieur $|f(z) - w| \geqq \eta'$. Par suite si $|Z - w|$ est inférieur au plus petit des nombres η et η' $z = \varphi(Z)$ sera extérieur au cercle $|z| \geqq R$ ou intérieur aux cercles $|z - z_q| < \rho$, $q = 1, 2, \ldots, p$. Lorsque $Z \to w$, $\varphi(Z)$ tend vers l'infini ou vers un zéro de $f(z) - w$. Les singularités de la fonction $\varphi(Z)$, autres que les singularités algébriques, sont les valeurs asymptotiques w. En changeant $f(z)$ en $\dfrac{1}{f(z)}$ on voit que ceci vaut encore si ∞ est valeur asymptotique.

Si w est une valeur asymptotique qu'on peut supposer finie et si C est un chemin de détermination w, l'un des domaines, D_ε, où $|f(z) - w| < \varepsilon$ contient C à partir d'un de ces points. Si l'on prend une suite de valeurs $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_q, \ldots$ décroissantes et tendant vers zéro, on a une suite de domaines D_{ε_q} tels que D_{ε_q} contient $D_{\varepsilon_{q+1}}$. Toute courbe qui va à l'infini en restant à partir de l'un de ses points dans D_{ε_q}, si grand que soit q, est aussi un chemin de détermination w. Ce chemin est équivalent à C, il définit la même singularité w sur la surface de Riemann.

L'étude des chemins de détermination des fonctions entières repose sur quelques propositions simples dues en grande partie à Lindelöf. Tout d'abord, une généralisation du théorème de Cauchy sur le module maximum:

I - Si $F(z)$ est holomorphe dans un domaine borné D, si en tout point de la frontière C de D sauf en un nombre fini de points a_j de C $(j=1,2,\ldots,p)$ on a $|F(z)|\leqq K$ et si $|F(z)|$ est bornée dans D par un nombre M, on a dans tout le domaine D, $|F(z)|\leqq K$.

Car, on peut touver un nombre H tel que dans D et sur C

$$|\phi(z)|=|H\,\Pi(z-a_j)|\leqq 1.$$

Si ε est positif arbitrairement petit, on a encore, pour toutes les branches de $\phi(z)^\varepsilon$, qui sont holomorphes dans D et sur C sauf aux points a_j,

$$|\phi(z)^\varepsilon|\leqq 1.$$

Sur C, sauf aux points a_j, on a

$$|F(z)\,\phi(z)^\varepsilon|\leqq K. \tag{1}$$

Mais si $z-a_j$ tend vers zéro, $|\phi(z)^\varepsilon|$ tend vers zéro, et puisque $|F(z)|<M$ l'inégalité (1) vaut encore pour $|z-a_j|\leqq\rho_\varepsilon$, $j=1,\ldots,p$, si ρ_ε est assez petit. Soit alors z_1 un point de D. Pour ε donné, l'inégalité (1) vaut sur la frontière d'un domaine contenant z_1, frontière constituée par des portions de C et d'arcs de cercles $|z-a_j|=\rho_\varepsilon$. On a donc

$$|F(z_1)|\,|\phi(z_1)^\varepsilon|\leqq K.$$

Comme ε est arbitraire, et comme $|\phi(z_1)^\varepsilon|$ tend vers 1 lorsque ε tend vers zéro, on voit que le théorème est établi:

Une transformation homographique permet d'étendre le résultat aux domaines non bornés.

De ce théorème de Lindelöf, on déduit une proposition qui avait été démontré autrement par Iversen:

II - Si $f(z)$ est méromorphe dans tout le plan à distance finie, si S est la surface de Riemann décrite par $Z=f(z)$ et si Z_1

est un point de S et w un nombre quelconque, il existe un chemin de S joignant Z_1 à un point Z, qui appartient au cercle $|Z-w|\leqq\varepsilon$ arbitraire.

(Lorsque w ou Z_1 est infini, il faut considérer les images sphériques).

Soit D celui des domaines définis par $|f(z)-w|<|Z_1-w|$ dont la frontière contient le point z_1 pour lequel $f(z_1)=Z_1$. S'il existe dans D un point z_0 tel que $f(z_0)=w$, le théorème est établi. Supposons donc que $f(z)-w$ ne s'annule pas dans D. La fonction $g(z)=\dfrac{1}{f(z)-w}$ est holomorphe dans D. $g(z)$ n'est pas bornée dans D. Car si $g(z)$ était bornée dans D, le théorème de Cauchy ou le théorème I de Lindelöf montrerait que $|g(z)|\leqq\dfrac{1}{|Z_1-w|}$ et l'on aurait dans D, $|g(z)|=\dfrac{1}{|Z_1-w|}$, $g(z)$ et par suite aussi $f(z)$ serait constant. Donc $g(z)$ n'est pas borné dans D, il existe dans D un point z_2 en lequel $|g(z)|>\dfrac{2}{|Z_1-w|}$, on peut joindre z_1 à z_2 par une courbe appartenant à D puis prendre le domain D_1 défini par $|f(z)-w|<|f(z_2)-w|$ dont la frontière contient z_2. D_1 appartient à D et l'on peut recommencer le raisonnement, et ainsi de suite. On définit un chemin dans le plan des z auquel correspond sur S le chemin cherché.

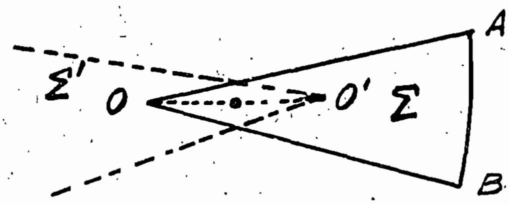
En particulier, on voit que si $f(z)$ est bornée dans un domaine D, ne s'y annule pas, et si $|f(z)|=$const. sur la frontière de D sauf en un point O de cette frontière, il existe un chemin aboutissant à O sur lequel $f(z)$ tend vers zéro. Et il suffit de supposer $f(z)$ holomorphe dans D et continue sur la frontière sauf au point O.

Notamment, on voit que

L'infini est valeur asymptotique pour toute fonction entière. Une valeur exceptionnelle au sens de Picard est valeur asymptotique.

III. - Théorème de Lindelöf. — Soit C une courbe fermée simple et $f(z)$ une fonction qui est holomorphe et bornée dans le domaine D intérieur à C. Si $f(z)$ est encore continue sur C sauf en un point O de C et si ses valeurs ont une limite finie w lorsquee z tend vers O sur C, f(z) tend uniformément vers w lorsque z tend vers O dans D ou sur C.

Au moyen d'une représentation conforme, on peut se ramener au cas où D est un secteur Σ de sommet O, de rayon R et de petite ouverture α. Si z_0 est un point du secteur et $|z_0|<\frac{1}{2}R$, (O est l'origine) le secteur Σ' symétrique de Σ par rapport au



point z_0 a une portion commun avec Σ; cette portion commune Λ est limitée par des segments OA, OB et leurs symétriques, les points de ces segments étant respectivement à des distances de O et O' inférieures à $2|z_0|$. La fonction

$$g(z)=f(z)\,f(z_0-(z-z_0))$$

est holomorphe dans Λ et y est bornée. Si l'on suppose, ce qui est loisible, que $f(z)$ tend vers zéro lorsque z tend vers O sur OA et OB, on a sur la frontière de Λ

$$|g(z)|<M\varepsilon$$

M étant la borne de $|f(z)|$ dans Λ et ε arbitrairement petit, pourvu que $|z_0|$ soit assez petit. En appliquant le théorème I, on voit que

$$|g(z_0)|=|f(z_0)|^2<M\varepsilon \quad \text{si } |z_0|<\eta_\varepsilon,$$

ce qui démontre le théorème.

Comme corollaire, on voit que, les autres hypothèses du théorème étant les mêmes, si l'on suppose seulement que $f(z)$ a des limites finies lorsque z tend vers O sur C, de part et d'autre de C, ces limites sont les mêmes. Car si a et b sont ces limites,

$$\left(f(z)-\frac{a+b}{2}\right)^2$$

tend uniformément vers $\left(\frac{b-a}{2}\right)^2$ lorsque z tend vers O dans D ou sur C, donc $f(z) - \frac{a+b}{2}$ doit tendre soit vers $\frac{b-a}{2}$, soit vers $\frac{a-b}{2}$, uniformément, ce qui exige $a = b$.

Par des considérations analogues, Lindelöf montre que

IV. - Si $F(z)$ est bornée dans un angle $|\arg z| \leqq \alpha$ et si $F(z)$ tend vers une limite finie w lorsque z tend vers le sommet de l'angle en restant sur un chemin appartenant à cet angle, $F(z)$ tend uniformément vers w lorsque z tend vers le sommet dans un angle intérieur au premier: $|\arg z| \leqq \alpha - \varepsilon$, ε positif arbitraire.

Une méthode analogue à celle qui a donné le théorème I fournit le théorème de Phragmén (Voir Valiron, I, p. 496).

V. - Soit un secteur $r = |z| > R$, $|\varphi = \arg z| < \frac{\pi}{2\gamma}$ avec $\gamma \geqq \frac{1}{2}$. Soit $\phi(z)$ une fonction holomorphe dans ce secteur et sur son contour à distance finie, dont le module vérifie dans ce secteur l'inégalité

$$\log|\phi(z)| < r^\delta, \quad 0 < \delta < \gamma,$$

dès que $|z| > R' \geqq R$. Si $|\phi(z)|$ reste inférieur ou égal à un nombre K sur le contour du secteur, à distance finie, on a dans tout le secteur

$$|\phi(z)| \leqq K.$$

A ces théorèmes de Lindelöf, Phragmén, Iversen, dont on trouvera quelques applications dans le livre cité, il faut joindre un théorème de Gross dont on trouvera la démonstration dans l'Ouvrage de Nevanlinna: Eindentige analytische Funktionen (p. 276):

VI. - Si $z = \varphi(Z)$ est la fonction inverse d'une fonction $Z = f(z)$ méromorphe dans tout le plan à distance finie et si l'une de ses branches est holomorphe en un point Z_0, cette branche peut être prolongée radialement jusqu'à l'infini dans presque toutes les directions (c'est-à-dire sur les demi-droites $\arg(Z - Z_0) = \phi = \text{const.}$, sauf au plus pour un ensemble de mesure nulle de nombres ϕ).

Ceci dit, on doit observer que l'étude de la fonction inverse d'une fonction méromorphe dans tout le plan à distance finie, admettant le point à l'infini pour point limite de pôles ou pour point essentiel, et de la surface de Riemann sur laquelle cette fonction est uniforme, renseigne sur la forme de ces surfaces de Riemann dites du type parabolique. Les difficultés proviennent notamment de l'existence possible de singularités transcendentes non isolées. Sire a donné le premier exemple d'une fonction entière dont la fonction inverse a des singularités transcendentes ayant la puissance du continu (1913), Gross en 1921 a construit une fonction admettant toute valeur pour valeur asymptotique. Mais Denjoy avait prévu en 1907 qu'une fonction entière d'ordre ρ a au plus 2ρ valeurs asymptotiques finies et l'avait prouvé dans certains cas particuliers. En 1921, Carleman a établi un théorème moins précis en montrant que le nombre de ces valeurs asymptotiques est au plus égal à $\frac{\pi^2}{2}\rho$; on pourra se reporter pour son intéressante démonstration à mes Lectures on the general theory of integral functions. Le résultat definitif a été donné par Ahlfors en 1932. Pour énoncer le résultat d'Ahlfors, il faut d'abord donner deux définitions.

Si w est une singularité transcendente de la fonction inverse de la fonction méromorphe $f(z)$, on dit que w est un point directement critique si l'on peut trouver un nombre ε assez petit pour que dans celui des domaines où $|f(z)-w|<\varepsilon$ qui fournit cette singularité, $f(z)$ ne preune pas la valeur w. On dira d'autre part que l'ordre inférieur de $f(z)$ est le nombre

$$\rho' = \varliminf_{r=\infty} \frac{\log T(r,f)}{\log r},$$

$T(r,f)$ étant la fonction caractéristique de Nevanlinna. Le théorème d'Ahlfors est alors:

Le nombre des points directement critiques de l'inverse d'une fonction d'ordre inférieur ρ' est au plus égal à 1 si $\rho' < \frac{1}{2}$ et à $2\rho'$ si $\rho' \geqq \frac{1}{2}$.

Pour une fonction entière, les points critiques de la fonction inverse situés à l'infini sont directement critiques. D'après les théorèmes de Lindelöf, entre deux chemins de détermination finie se trouvent des chemins de détermination infinie si ces deux chemins ne sont pas équivalents. Si m est le nombre des singularités directes à distance finie, n le nombre des autres singularités transcendentes à distance finie, il y a $m+n$ points critiques à l'infini pour la fonction inverse, donc

$$2m+n \leqq 2\rho', \qquad \rho' \geqq \frac{1}{2}.$$

Le maximum $2\rho'$ de points critiques à distance finie ne peut être atteint que pour $m=0$. C'est ce qui a lieu pour les fonctions d'ordre $\rho=\rho'$ entier

$$\frac{\sin^{\rho} z}{z^{\rho}}, \quad \int_0^z \frac{\sin^{\rho} t}{t^{\rho}}\, dt.$$

On trouvera la démonstration d'Ahlfors dans le livre cité de Nevanlinna. Et il faut signaler que dans la Note des Comptes Rendus de 1907, Denjoy énonce un autre théorème qui reste à démontrer. J'ai d'autre part établi (Circolo Palermo, 1925) qu'une fonction méromorphe pour laquelle

$$\lim_{r=\infty} \frac{T(r,f)}{(\log r)^2} = \infty$$

peut avoir une infinité non dénombrable de valeurs asymptotiques, tandis que les fonctions pour lesquelles

$$\overline{\lim_{r=\infty}} \frac{T(r,f)}{(\log r)^2} < \infty$$

ne peuvent avoir qu'une seule valeur asymptotique et n'en ont pas en général. Ce résultat s'étend aux fonctions algébroïdes (Comptes Rendus, 1935).

Boutroux avait donné une classification des singularités isolées des fonctions inverses des fonctions entières qui a été complétée et précisée par Iversen (Thèse, 1914) et étendue au fonctions inverses des fonctions méromorphes. Un exemple simple de singularité non isolée est fourni par l'inverse de

$$(2) \qquad Z=(e^{e^z}-1)\,e^{iz},$$

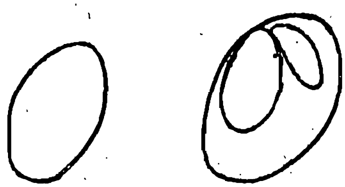
soit $z=\varphi(Z)$, une singularité $Z=\infty$ n'est pas isolée. Elle correspond au chemin $z=iy$, $i=\sqrt{-1}$, $y<0$; tandis que les chemins $z=2i\pi h$, $x>0$, h entier, fournissent à l'infini des singularités isolées les unes des autres.

On a déjà dit ce qu'on entend par point directement critique de la fonction inverse $z=\varphi(Z)$. Si w est un tel point et ε assez petit, lorsque le point Z reste dans un cercle $|Z-w|<\varepsilon$, qui a nécessairement une infinité de feuillets, et tend vers w, $\varphi(Z)$ tend vers l'infini. Si, en outre, ce cercle peut être pris de rayon ε assez petit pour qu'il ne contienne pas de singularité algébrique, le point w est dit de première espèce (ou point logarithmique); sinon, w est point limite de points critiques algébriques, le point est de seconde espèce.

Lorsque w n'est pas directement critique, il existe dans $|Z-w|<\varepsilon$ des chemins sur lesquels $\varphi(Z)$ a une limite finie lorsque Z tend vers w. Si ceci a lieu lorsque $Z\to w$ avec $\arg(Z-w)=$ const., quelle que soit cette constante, le point w est dit indirectement critique. Ce ne sera en quelque sorte que sur des chemins en spirale tendant vers w que $\varphi(Z)$ tendra vers l'infini.

Un point qui n'est ni directement critique, ni indirectement critique est dit directement et indirectement critique.

Si $f(z)$ est une fonction entière, le domaine du plan des z qui correspond à un cercle $|Z-w|<\varepsilon$, w fini, est simplement connexe au sens large ou resteint. Par exemple pour la fonction (2) et $Z=0$, le domaine $|Z|<\varepsilon$ est simplement connexe au sens large



sens restreint sens large

seulement. Mais pour une fonction entière d'ordre fini, et w fini, les domaines considérés sont simplement connexes au sens strict dès quee ε est assez petit. Pour la fonction inverse d'une fonction entière d'ordre fini les points directement critiques à distance finie sont tous de première espèce; mais le point à l'infini est de deuxième espèce pour les inverses des fonctions entières d'ordre inférieur à $\frac{1}{2}$.

La façon la plus simple de définir la surface de Riemann décrite par $Z = f(z)$ est a priori la suivante, dans le cas où il n'y a qu'un nombre fini de singularités transcendantes (Pour le cas général, voir les travaux de Marty et de Shimizu). Prenons les branches de $z = \varphi(Z)$ qui sont holomorphes autour de $Z = 0$; prolongeons radialement ces branches, on obtient pour chacune d'elles une étoile d'holomorphie. Pour les branches qui présentent à l'origine un pôle ou un point critique algébrique, on coupera d'abord par un rayon $\arg Z = \text{const}$. et on prolongera radialement les diverses branches dans les deux sens à partir d'une petite circonférence $|Z| = \text{const}$. Si $Z = 0$ est point critique transcendant, on coupe encore par un rayon $\arg Z = \text{const}.$, ce qui rend les diverses branches uniformes. Si $Z = 0$ est directement critique de première espèce, on obtient en prolongeant radialement à partir d'un petit cercle $|Z| = \varepsilon$, des étoiles d'ouverture 2π. Si $Z = 0$ est directement critique de seconde espèce (cas des fonctions méromorphes) ou est directement et indirectement critique, on peut obtenir des étoiles d'ouverture inférieure à 2π. A cette division en feuillets de la surface de Riemann correspond dans le plan des z une division en domaines d'univalence dans chacun desquels la fonction prend une seule fois la même valeur. A une étoile d'ouverture 2π dont toute le frontière est accessible correspond un domaine complet d'univalence, dans un tel domaine auquel on adjoint sa frontière à distance finie, la fonction $f(z)$ prend toute valeur finie. Si une partie de la frontière d'une étoile d'ouverture 2π est inaccessible, le domaine correspondant est un domaine complet singulier d'univalence; dans ce domaine et sur sa frontière $f(z)$ prend toute valeur sauf celles appartenant à certaines lignes. A une étoile d'ouverture moindre que 2π correspond un domaine incomplet d'univalence dans lequel la fonction ne prend pas les valeurs appartenant à un domaine. On peut évidemment, s'il n'y a qu'un nombre fini de valeurs asymptotiques, éviter cette circonstance en prenant pour origine $Z = 0$ une valeur non asymptotique.

D'autres anomalies peuvent se présenter, même lorsque $f(z)$ est une fonction entière d'ordre fini, dans la jonction des feuillets entre eux, c'est-à-dire dans la juxtaposition, dans le plan des z, des domaines d'univalence. On pourra avoir une division impropre, telle que pour passer de certaines de ces domaines à d'autres, il soit nécessaire de traverser une infinité de domaines.

On trouvera dans le Journal de Math., 1940, p. 339, une étude de la division du plan des z en domaines d'univalence, par la méthode qui vient d'être sommairement indiqué, dans les trois cas

$$\text{(I)} \qquad Z=\frac{e^z-1}{z}.$$

$$\text{(II)} \qquad Z=\frac{e^z-1}{z}-1,$$

$$\text{(III)} \qquad Z=\frac{e^z-1}{z}+1.$$

Dans le cas I, $Z=0$ est point critique, on a un domaine incomplet d'univalence; dans le cas II, $Z=0$ est point d'holomorphie sur tous les feuillets, mais il y a un domaine complet singulier d'univalence; dans le cas III, la division est impropre.

La division du plan en domaines d'univalence par des méthodes élémentaires a été abordée par Hibbert. Mais il importerait de poursuivre ces études et classifications.

Dans tous les cas étudiés jusqu'ici d'une façon précise, on trouve que, à la condition de supprimer sur la sphère où l'on peut représenter Z, le voisinage de quelques points, puis de rendre simplement connexe, on peut former un domaine auquel correspond dans le plan des z un domaine d'univalence qui peut être aussi éloigné que l'on veut de l'origine et qui est vu de cette origine sous un angle qui tend vers zéro. Cette propriété est-elle générale? Les méthodes nouvelles introduites par Ahlfors et developpées par Dufresnoy à partir de 1941 n'ont pas encore permis de répondre à cette question. On a vu dans la deuxième conférence que la réponse est affirmative pour les fonctions d'ordre nul assez régulières et pour toutes celles pour lesquelles

$$\overline{\lim_{r=\infty}}\frac{\log M(r)}{(\log r)^2}<+\infty.$$

La théorie des fonctions entières et des fonctions méromorphes a été étendue aux fonctions holomorphes et aux fonctions méromorphes dans un cercle et satisfaisant à certaines conditions. Le théorème de Weierstrass sur la décomposition en facteurs des fonctions entières a été étendue par Picard aux fonctions holomorphes dans un cercle et s'y annulant une infinité de fois. On étendit également à ces fonctions holomorphes dans un cercle la théorie de la croissance du module maximum, c'est-à-dire la recherche des relations entre les coefficients du développement taylorien et la fonction $M(r)$. Plus tard la théorie de Nevanlinna a été étendue ainsi que la definition des cercles de remplissage et l'étude de points de Picard ou de Borel correspondant aux directions de Picard et de Borel.

En dehors de leur intérêt propre, certaines de ces recherches ont une application immédiate dans l'étude des propriétés angulaires des fonctions entières ou méromorphes dans tout le plan à distance finie. Si $f(z)$ est une telle fonction et si l'on se propose d'étudier les zéros de $f(z)-Z$ dans un angle $|\varphi-\varphi_0|<\frac{\pi}{\alpha}$, où $\varphi=\arg z$; une transformation $\zeta=z^\alpha e^{i\omega}$ ramène à une étude pour une fonction $g(\xi)$ définie pour $R\xi>0$ et la transformation $u=\frac{\xi-1}{\xi+1}$ au cas d'une fonction $F(u)$ définie pour $|u|<1$. De telles considérations auraient dû s'imposer dès que Schottky eùt établi son théorème, mais ce ne fut qu'en 1918-1919, en même temps que Julia abordait l'étude des zéros, que cette transformation simple fut utilisée. Le théorème de Schottky, sous la forme précise fournie par l'emploi de la fonction modulaire, permet d'affirmer que, si $F(z)$ est holomorphe pour $|z|<1$ et si

$$M(r)=\max|F(re^{i\varphi})|,$$

$F(z)$ prend nécessairement toute valeur sauf une au plus dans ce cercle si

$$\overline{\lim_{r=1}}\frac{\log M(r)}{\frac{1}{1-r}}=\infty.$$

Les transformations précédentes conduisent alors à une extension du théorème de Picard à une fonction holomorphe dans un angle d'ouverture $\frac{\pi}{\alpha}$ pourvu que l'ordre de la fonction dans cet angle (ordre défini à partir de $M(r)$, maximum du module pour $|z|=r$, le point z étant dans l'angle) soit supérieur à α. En combinant ce résultat avec un théorème de Phragmén-Lindelöf, Bieberbach montra que, $f(z)$ étant une fonction entière d'ordre $\rho > \frac{1}{2}$, le théorème de Picard s'applique à $f(z)$ dans tout angle dont l'ouverture est supérieure au plus grand des deux nombres $\frac{\pi}{\rho}$ et $2\pi - \frac{\pi}{\rho}$. On a vu qu'il avait été prouvé ultérieurement que le théorème de Borel vaut aussi dans un tel angle.

Ceci montre le genre d'application que l'on peut faire de la considération des fonctions holomorphes dans un cercle. On a d'ailleurs aussi étudié directement les fonctions holomorphes ou méromorphes dans un angle et sur ses côtés à distance finie. Il est clair que lorsqu'on prend, par exemple, les valeurs d'une fonction entière en supposant z intérieur à un angle A, on obtient une fonction holomorphe dans A mais qui est particulière. Les anomalies que peuvent présenter les fonctions holomorphes dans un angle ne se transposent donc pas automatiquement aux fonctions entières. Par exemple, il est clair que l'on peut définir des fonctions holomorphes dans un angle et qui n'y admettent aucune valeur asymptotique alors qu'elles sont bornées. Mais il faut faire un effort supplémentaire pour montrer qu'une fonction entière peut rester bornée dans un angle de sommet origine et n'y admettre aucune valeur asymptotique. Un exemple simple de ce cas est fourni par

$$E(z) = M(z)\,(e^{\pi\sqrt{2}z} - 1)\,(e^{2\pi z} - 1)$$

où

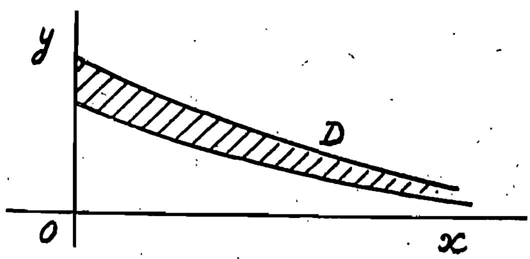
$$M(z) = \prod_{0}^{\infty} \frac{2^n - z^2}{2^n + z^2}$$

vérifie l'équation fonctionnelle

$$(1-2z^2)\,M(z) = (1+2z^2)\,M(\sqrt{2}z)).$$

E(z) est bornée pour $\frac{\pi}{2} + \varepsilon < \arg z < \frac{3\pi}{2} - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, mais le domaine d'indétermination à l'infini de toute demi-droite $\arg z =$ const., est une courbe. D'après le théorème IV il en résulterait qu'il n'y a pas de valeur asymptotique dans cet angle, ce qu'on voit directement. On forme des exemples plus généraux en utilisant des fonctions d'ordre nul générales (Journal de math., 1928).

Parmi les fonctions méromorphes dans un cercle, il faut donner une place à part à celles qui ne sont pas prolongeables au-delà de ce cercle. La surface de Riemann décrite par les valeurs de la fonction est alors du type hyperbolique. En particulier, si $f(z) = \Sigma c_n z^n$ est holomorphe pour $|z| < 1$, le cercle de convergence de la série étant $|z| < 1$, on sait que si l'on multiplie les c_n par ± 1, le signe $+$ ou $-$ étant pris ou hasard, on obtient une fonction non prolongeable. Cette opération ne changera pas en général l'ordre de la fonction $M(r)$. L'étude des fonctions holomorphhes pour $|z| < 1$ et non prolongeables fournira des renseignements sur les surfaces de Riemann du type hyperbolique. Si $Z = f(z)$ est une fonction holomorphe pour $|z| < 1$ et non prolongeable et $z = \varphi(Z)$ sa fonction inverse, le raisonnement fait plus haut pour montrer que, lorsque Z tend vers une singularité non algébrique, z a une limite, tombe en défaut et montre seulement que, ou bien z a une limite de module moindre que un, ou bien $|z|$ tend vers un. On peut former des exemples de cas où z n'a pas de limite. On peut en effet construire des fonctions holomorphes pour $|z| < 1$ et dont le module croît indéfiniment lorsque z décrit une spirale asymptote à la circonférence $|z| = 1$, la valeur infinie étant la seule valeur asymptotique. On peut même faire en sorte que $Z = \infty$ soit la seule singularité de la fonction inverse $\varphi(Z)$ et qu'elle soit isolée des points critiques algébriques. Pour faire cette construction d'une façon générale, on peut utiliser des théorèmes



généraux sur les fonctions entières qui ont d'abord été obtenus par la considération du polygone de Newton d'Hadamard (Voir Première conférence). On montre que, dans le voisinage des points z_0 où une fonction entière $f(z)$ atteint le maximum de son module pour $|z|=|z_0|$, elle se comporte sensiblement comme $\left(\frac{z}{z_0}\right)^n f(z_0)$, n étant le rang du terme maximum de la série de Taylor; la partie réelle passe rapidement de valeurs voisines de $M(|z_0|)$ à des valeurs voisines de $-M(|z_0|)$. La fonction $e^{f(z)}$ passe de valeurs très grandes à des valeurs très petites en module. On pourra construire une fonction entière dont le module tend rapidement vers zéro lorsque z décrit les courbes frontières d'un domaine D rapidement asymptote à l'axe réel Ox, tandis que le module tend vers l'infini sur certaines courbes appartenant à D. Une transformation $\xi=e^{iz}$ transformera D en un domaine Λ du cercle $|\xi|<1$ asymptote à la circonférence $|\xi|=1$ et la fonction entière se transformera dans Λ en une fonction $g(\xi)$ holomorphe dans Λ et tendant rapidement vers zéro lorsque $|\xi|$ tend vers un, tandis que sur des courbes intérieures à Λ, $|g(\xi)|$ tend vers l'infini. L'intégrale de Cauchy $\int \frac{g(\xi)}{\xi-z}\,d\xi$ calculée sur les bords de Λ définira à l'extérieur de Λ une fonction holomorphe que l'on prolongera en déformant Λ. On aura pour $|z|<1$ une fonction de l'espèce cherchée.

Pour les fonctions ainsi construites, le maximum du module pour $|z|=r$ croît très rapidement lorsque r tend vers un. Cette propriété de $M(r)$ est assez caractéristique. On pourrait chercher à caractériser d'une façon analogue d'autres anomalies du même genre. Pour le détail des calculs on pourra se reporter au Journal de mathématiques de 1936.