MULTIGRADE FATTORIALI

di

GIUSEPPE PALAMÀ

In questo lavoro ci proponiamo di fare una generalizzazione delle uguaglianze multigrade.

Ricordiamo che si dice *uguaglianza* (*od equazione*) *multigrada* la

$$(1)\qquad a_1, \ldots, a_p \overset{x}{=} c_1, \ldots, c_q, \; (x = m_1, m_2, \ldots, m_r),$$

che sta per il sistema

$$(1')\qquad \begin{cases} a_1^{m_1} + \ldots + a_p^{m_1} = c_1^{m_1} + \ldots + c_q^{m_1} \\ a_1^{m_2} + \ldots + a_p^{m_2} = c_1^{m_2} + \ldots + c_q^{m_2} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_1^{m_r} + \ldots + a_p^{m_r} = c_1^{m_r} + \ldots + c_q^{m_r}. \end{cases}$$

Quando in (1′) è $m_i = i$, la (1) si scrive più semplicemente così (¹)

$$a_1, \ldots, a_p \overset{r}{=} c_1, \ldots, c_q.$$

(¹) Per i simboli, nomenclatura, teoremi ecc. relativi alle uguaglianze multigrade. Cfr. A. GLODEN, *Mehrgradige Gleichungen*, 2ª Ediz. 1944. Groningen.

Il teorema fondamentale sulle uguaglianze multigrade fu stabilito sostanzialmente la prima volta dall'ESCOTT, (Quartely Journal of Math., (1910) pp. 141-167), e poi, nella forma in cui in seguito fu sempre applicato nella teoria delle uguaglianze multigrade, prima dal TARRY (Interm. des Math. Vol. 19º, (1912), pp. 219-221). e comunemente perciò è detto teor. di TARRY, e poi dal

Analogamente noi scriveremo

$$(2) \qquad \alpha_1, \ldots, \alpha_p \overset{x/\alpha_i}{=\!=} c_1, \ldots, c_q$$

$(x = m_1, m_2, \ldots, m_r;\ \ \alpha_i = \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{m_r}),$

BARRETTE (Congresso di Grenoble del 1925 dell' Assoc. Franç. pour l'avanc. des Sc.). Esso è il seguente:

''*Se è*

$$(\mathrm{I}) \qquad a_1, \ldots, a_p \overset{n}{=} C_1, \ldots, C_p$$

è anche, qualunque sia il parametro h, purchè non nullo

$$a_1, \ldots, a_p,\ C_1 + h, \ldots,\ C_p + h \overset{n+1}{=\!=} C_1, \ldots,\ C_p,\ a_1 + h, \ldots,\ a_p + h \text{''}.$$

Notevole poi è ancora il seguente teirema dovuto al BASTIEN, (phinx-Oedipe, 1913, p. 131).

''*Se la* (I) *non è banale, nel senso che i* b_i *sono tutti differenti degli* a_i, *non può essere* $p \leq n$. ''

La (I) se non è banale ed è $p = n + 1$, si dice normale.

Interessante è il seguente esempio nel quale, a mezzo del solo Teor. di TARRY applicato successivamente a partire dalla

$$1,\ 9 \overset{1}{=} 4,\ 6,$$

qualora si assumano per h i valori indicati a fianco di ciascuna multigrada ottenuta, si hanno le sei seguenti multigrade

$h = 2$ $$1,\ 8,\ 9 \overset{2}{=} 3,\ 4,\ 11$$

$h = 1$ $$1,\ 5,\ 8,\ 12 \overset{3}{=} 2,\ 3,\ 10,\ 11$$

$h = 7$ $$1,\ 5,\ 9,\ 17,\ 18 \overset{4}{=} 2,\ 3,\ 11,\ 15,\ 19$$

$h = 8$ $$1,\ 5,\ 10,\ 18,\ 23,\ 27 \overset{5}{=} 2,\ 3,\ 13,\ 15,\ 25,\ 26$$

$h = 13$ $$1,\ 5,\ 10,\ 16,\ 27,\ 28,\ 38,\ 39 \overset{6}{=} 2,\ 3,\ 13,\ 14,\ 25,\ 31,\ 36,\ 40$$

$h = 11$ $$1,\ 5,\ 10,\ 24,\ 28,\ 42,\ 47,\ 51 \overset{7}{=} 2,\ 3,\ 12,\ 21,\ 31,\ 40,\ 49,\ 50$$

di cui ben cinque sono normali.

Chi voglia essere rapidamente informato su alcuni dei principali teoremi relativi alle multigrade comuni, Cfr. A. GLODEN, *Sobre el análisis diofántico multigrado*, Euclides (Madrid), N. 40.

Le ricerche oggi sono per lo più orientate a stabilire multigrade normali.

invece del sistema

$$(2') \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^{p} (a_i+\alpha_1)\dots(a_i+\alpha_{m_1}) = \sum_{i=1}^{p} (c_i+\alpha_1)\dots(c_i+\alpha_{m_1}) \\ \sum_{i=1}^{p} (a_i+\alpha_1)\dots(a_i+\alpha_{m_2}) = \sum_{i=1}^{p} (c_i+\alpha_1)\dots(c_i+\alpha_{m_2}) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \sum_{i=1}^{p} (a_i+\alpha_1)\dots(a_i+\alpha_{m_r}) = \sum_{i=1}^{p} (c_i+\alpha_1)\dots(c_i+\alpha_{m_r}), \end{array} \right.$$

purchè $(2')$ sussista qualunque siano le costanti α_i.

Il sistema $(2')$, quando è $m_i = i$, si rappresenta più semplicemente così

$$(3) \qquad a_1, \dots, a_p \overset{r/\alpha_i}{=\!=} c_1, \dots, c_q, \ (\alpha_i, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r).$$

In particolare proponiamo di scrivere la (3) nel seguente modo

$$(4) \qquad a_1, \dots, a_p \overset{r/h}{=\!=} c_1, \dots, c_q,$$

quando è

$$(5) \qquad \alpha_1 = 0, \alpha_2 = h, \ \alpha_3 = 2h, \dots, \ \alpha_r = (r-1)h;$$

e se nelle (5) è $h = 1$, oppure $h = -1$, per analogia con noti simboli, scriviamo la (4) rispettivamente

$$(4') \qquad a_1, \dots, a_p \overset{\overline{r}}{=} c_1, \dots, c_q,$$

$$(4'') \qquad a_1, \dots, a_p \overset{r}{\underline{=}} c_1, \dots, c_q.$$

Le difficoltà che vi si incontrano aumentano con l'aumentare del grado delle multigrade normali da stabilire. Per ora si conoscono soltanto multigrade normali di grado ≤ 9.

Il nostro presente lavoro apre un nuovo campo di ricerche forse altrettanto interessanti, anche perchè mette in nuova luce le multigrade comuni.

Noi diciamo le (2), e quindi anche le (3), (4), (4′), (4″), *uguaglianze* (*od equazioni*) *multigrade fattoriali,* e quest'ultime le diciamo in più *di ordine o di grado r.*

Spesso però diremo *comuni* le solite multigrade, per distinguerle da quelle fattoriali.

La teoria delle uguaglianze multigrade fattoriali può svolgersi indipendentemente, ma parallelamente, a quella delle comuni, le quali perciò non risulterebbero che dei casi assai particolari delle multigrade fattoriali, e possono altresì queste ultime ottenersi subito dalle comuni mediante i tre seguenti teoremi.

1. Teor. 1°. *Se è*

$$a_1, \ldots, a_p \overset{n}{=} c_1, \ldots, c_p,$$

è anche

$$a_1, \ldots, a_p \overset{n/\alpha_i}{=\!=} c_1, \ldots, c_q, \quad (\alpha_i = \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n), \tag{6}$$

essendo le α_i dei parametri del tutto arbitrari.

Questo teorema e gli altri cinque che seguono si dimostrano subito svolgendo i prodotti di ambo i membri della multigrada fattoriale da dimostrarsi.

Teor. 2°. *Se è*

$$a_1, \ldots, a_p \overset{x}{=} c_1, \ldots, c_q, \quad (x = 2, 4, \ldots, 2m)$$

è anche

$$a_1, \ldots, a_p \overset{x/\alpha_i}{=\!=} c_1, \ldots, c_q,$$

$$(x = 2, 4, \ldots, 2m; \quad \alpha_i = -\alpha_1, \alpha_1, -\alpha_2, \alpha_2, \ldots, -\alpha_m, \alpha_m),$$

con $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ parametri del tutto arbitrari.

Teor. 3°. *Se è*

$$a_1, \ldots, a_p \overset{x}{=} c_1, \ldots, c_q, \qquad (x = 1, 3, \ldots, 2m-1),$$

è anche

$$a_1, \ldots, a_p \overset{x/\alpha_i}{=\!=} c_1, \ldots, c_q$$

$$(x = 1, 3, \ldots, 2m-1; \quad \alpha_i = 0, -\alpha_1, \alpha_1, -\alpha_2, \alpha_2, \ldots, -\alpha_{m-1}, \alpha_{m-1})$$

con $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{m-1}$ *arbitrari.*

2. *Oss. 1a*. Sono numerose le note uguaglianze multigrade comuni (2), numeriche o parametriche, con le quali, a mezzo dei teoremi precedenti si possono ricavare subito le corrispondenti multigrade fattoriali che, alla loro volta, danno soluzioni di sistemi indeterminati di tipi corrispondenti.

Oss. 2a. Dal ter. 1o. si trae subito, per es., come corollario il seguente teor. di Frolov relativo alle uguaglianze multigrade comuni (3).

«*Se è*

$$a_1, \ldots, a_p \overset{n}{=} c_1, \ldots, c_q,$$

è anche

$$u\,a_1 + t, \ldots, u\,a_p + t \overset{n}{=} u\,c_1 + t, \ldots, u\,c_q + t,$$

qualunque siano i parametri u, t.

Basta difatti porre nella (6) $\alpha_i = \dfrac{t}{u}$,

e liberare dai denominatori.

3. Ma la teoría delle uguaglianze multigrade fattoriali può evolgersi, como già si e detto, indipendentemente da quella delle comuni, Sussistono difatti per es. i seguenti teoremi, il primo dei quali generalizza quello di Tarry fondamentale (4):

Teor. 4o. *Se è*

$$a_1, \ldots, a_p \overset{n/\alpha_i}{=\!=} c_1, \ldots, c_p, \quad (\alpha_i = \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n),$$

(2) per es. A. Gloden, *Mehrgradige ecc., o. in* (1).

(3) Frolov, Bull. de la Societé Math. de France, Vol. 17o, 1888-9, pp. 69-83, Vol. 20o, 1892, pp. 69-84.

(4) Cfr. la precedente nota (1).

con $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ *parametri arbitrari, è anche*

$$a_1, \ldots, a_p, c_1 + t, \ldots, c_p + t \overset{n+1/\alpha_i}{=\!=} c_1, \ldots, c_p, a_1 + t, \ldots, a_p + t$$

$$(\alpha_i = \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \alpha_{n+1}),$$

se α_{n+1} *e* t *sono due nuovi parametri arbitrari.*

Teor. 5.° (5). *Se è*

$$a_1, \ldots, a_p \overset{x/\alpha_i}{=\!=} c_1, \ldots, c_p,$$

$$(x = 2.4, \ldots, 2m; \quad \alpha_i = \alpha_1\, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2m}),$$

con $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2m}$ *parametri arbitrari, è anche, qualunque siano* t *ed* α_{2m+1}

$$a_1 + t, \ldots, a_p + t, -a_1 + t, \ldots, -a_p + t \overset{2m+1/\alpha_i}{=\!=}$$

$$c_1 + t, \ldots, c_p + t, -c_1 + t, \ldots, -c_p + t,$$

$$(\alpha_i = \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2m}, \alpha_{2m+1}).$$

Teor. 6°. *Se è*

$$a_1, \ldots, a_p \overset{x/\alpha_i}{=\!=} c_1, \ldots, c_q,$$

$$(x = 1, 3, \ldots, 2m-1); \quad \alpha_i = \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2m-1}),$$

con $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2m-1}$ *parametri arbitrari è anche, qualunque siano* α_{2m} *e* t

$$a_1 + t, \ldots, a_p + t, -c_1 + t, \ldots, -c_q + t \overset{2m/\alpha_i}{=\!=}$$

$$c_1 + t, \ldots, c_q + t, -a_1 + t, \ldots, -a_p + t,$$

$$(\alpha_i = \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2m-1}, \alpha_{2m}).$$

(5) I teor. 5° e 6° del testo generalizzano invece note proposizioni che si trovano per es. nei lavori di A. Gloden citati in (1).

Nello stesso modo si stabiliscono subito per le multigrade fattoriali gli analeghi di altri teoremi delle multigrade comuni.

4. Facciamo ora delle applicazioni.

Innanzi tutto se applichiamo il 1.° teorema per es. alla

$$1,\ 5,\ 9,\ 17,\ 18 \stackrel{4}{=} 2,\ 3,\ 11.\ 15,\ 19,$$

abbiamo

$$1,\ 5,\ 9,\ 17,\ 18 \stackrel{4/\alpha_i}{=\!=} 2,\ 3,\ 11,\ 15,\ 19$$

$$(\alpha_i = \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4),$$

con le α_i arbitrarie, da cui se si fa

$$\alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = 1, \quad \alpha_3 = 2, \quad \alpha_4 = 3,$$

oppure

$$\alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = -1, \quad \alpha_3 = -2, \quad \alpha_4 = -3,$$

si trae rispettivamente

$$1^{\overline{k}} + 5^{\overline{k}} + 9^{\overline{k}} + 17^{\overline{k}} + 18^{\overline{k}} = 2^{\overline{k}} + 3^{\overline{k}} + 11^{\overline{k}} + 15^{\overline{k}} + 19^{\overline{k}},$$

$$(k = 1, 2, 3, 4);$$

$$1^{\underline{k}} + 5^{\underline{k}} + 9^{\underline{k}} + 17^{\underline{k}} + 18^{\underline{k}} = 2^{\underline{k}} + 3^{\underline{k}} + 11^{\underline{k}} + 15^{\underline{k}} + 19^{\underline{k}},$$

$$(k = 1, 2\ 3, 4).$$

5. Si possono immaginare diversissimi tipi di sistemi dei quali si hanno subito soluzioni parametriche a mezzo delle multigrade fattoriali.

Difatti per avere, per es., soluzione parametrica del sistema

$$\left\{\begin{array}{l}
\sum_{i=1}^{p} x_{i1}\, x_{i2} = \sum_{i=1}^{p} y_{i1}\, y_{i2} \\
\sum_{i=1}^{p} x_{i1}^2\, x_{i2}^2 = \sum_{i=1}^{p} y_{i1}^2\, y_{i2}^2 \\
\sum_{i=1}^{p} x_{i1}^2\, x_{i2}^2\, x_{i3}\, x_{i4} = \sum_{i=1}^{p} y_{i1}^2\, y_{i2}^2\, y_{i3}\, y_{i4} \\
\sum_{i=1}^{p} x_{i1}^2\, x_{i2}^2\, x_{i3}^2\, x_{i4}^2 = \sum_{i=1}^{p} y_{i1}^2\, y_{i2}^2\, y_{i3}^2\, y_{i4}^2 \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\sum_{i=1}^{p} x^2_{i1} \cdots x^2_{i2m-2}\, x_{i2m-1}\, x_{i2m} = \sum_{i=1}^{p} y^2_{i1} \cdots y^2_{i2m-2}\, y_{i2m-1}\, y_{i2m} \\
\sum_{i=1}^{p} x^2_{i1} \cdots x^2_{i2m} = \sum_{i=1}^{p} y^2_{i1} \cdots y^2_{i2m}
\end{array}\right.$$

nel quale però p ed m non possono essere completamente arbitrari (6), basta ricavare da una nota uguaglianza multigrada comune del tipo occorrente, se nota, la corrispondente multigrada fattoriale:

$$a_1, \dots, a_p \overset{x/\alpha_i}{=\!=} c_1, \dots, c_p,$$

$$(x = 2, 4, \dots, 4m; \quad \alpha_i = -\alpha_1, \alpha_1, -\alpha_2, \alpha_2, \dots, -\alpha_{2m}, \alpha_{2m}),$$

e porre poi in questa

$$\alpha_1 = \alpha_2 = q_1, \alpha_3 = \alpha_4 = q_2, \dots, \alpha_{2m-1} = \alpha_{2m} = q_m,$$

essendo le q_t arbitrarie, per avere il mezzo di ottenere la soluzione parametrica richiesta.

Nella pratica conviene, come abbiamo fatto nei due precedenti es., servirsi dei teoremi 1.°, 2.°, 3.°, anzicchè dei teoremi 4.°, 5.°, 6.° ed analoghi.

7. Naturalmente per le uguaglianze multigrade fattoriali sussiste un teorema analogo a quello di BASTIEN (7), cioè

(6) *Cfr. l. c. in* (2) pp. 56 e 59. In quest'ultima pag. (tabella B,) soni dati i più piccoli valori empirici di p relativi ad alcuni casi conosciuti.

(7) Cfr. BASTIEN, *l. c. n* (1), od anche i lavori citati di A. GLODEN in (1).

Teor. 7°. *Se la*

$$a_1, \ldots, a_p \stackrel{n/\alpha_i}{=\!=} c_1, \ldots, c_p \tag{7}$$

$$(\alpha_i = \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$$

con le α_i *parametri arbitrari, non è banale, non può essere* $p \leqq n$.

Difatti se la (7) non fosse banale e fosse $p \leqq n$, assumendovi i parametri tutti uguali a zero, avremmo una comune non banale con $p \leqq n$, e ciò è assurdo apounto per il teor. di BASTIEN.

In modo analogo si dimostrano i seguenti teoremi [8].

Teor. 8°. *Se la*

$$a_1, \ldots, a_p \stackrel{x/\alpha_i}{=\!=} c_1, \ldots, c_p;$$

$$(x = 2, 4, \ldots, 2m; \ \alpha_i = \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2m})$$

con le α_i *qualsiasi, non è banale, deve essere* $p \geqq m + 1$.

Teor. 9°. *Se la*

$$a_1, \ldots, a_p \stackrel{x/\alpha_i}{=\!=} c_1, \ldots, c_q,$$

$$(x = 1, 3, \ldots; 2m - 1; \ \alpha_i = \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2m-1})$$

con le α_i *arbitrarie, non è banale, deve essere* $p + q \geqq 2m + 1$.

---

(8) Essi generalizzano noti teoremi relativi alle multigrade comuni per i quali Cfr. l. c. n (2) p. 56.