SOBRE LA CONSTRUCCION DE SISTEMAS PARCIALMENTE ORDENADOS CON GRUPO DE AUTOMORFISMOS DADO

por Roberto Frucht

Universidad Técnica F. Santa María, Valparaíso (Chile)

En una nota publicada en esta misma Revista (1), el conocido matemático norteamericano Garrett Birkhoff ha demostrado tres teoremas en los cuales afirma que, dado un grupo abstracto G de α elementos (2), existen siempre:

1) un álgebra abstracta de α elementos y α operaciones unitarias,
2) un sistema parcialmente ordenado de $\alpha^2+\alpha$ elementos,
3) una estructura (3) distributiva («distributive lattice») con a lo sumo $2^{\alpha^2+\alpha}$ elementos,

tales que (en cada uno de los tres casos) el grupo de automorfismos del ente construído es isomorfo (4) al grupo dado G.

Termina la breve, pero interesantísima nota del prof. Birkhoff con la pregunta de si se podría reducir las constantes α, $\alpha^2+\alpha$, $2^{\alpha^2+\alpha}$ en los casos 1, 2, 3, respectivamente.

(1) Garrett Birkhoff: *Sobre los grupos de automorfismos*. Revista de la Unión Matemática Argentina, vol. XI, págs. 155-157.

(2) Por un error de imprenta, en el teorema 1) de Birkhoff se habla de x (en lugar de α) elementos. Birkhoff, evidentemente, está pensando siempre en el caso en que G es un grupo infinito, pero tampoco carece de interés el caso de un grupo de orden finito (o sea con un número finito α).

(3) Siguiendo a la propuesta hecha por el prof. A. E. Sagastume Berra en su comunicación: *El Algebra moderna y sus problemas*, uso la palabra "estructura" — en lugar de "red" — como traducción de la palabra inglesa "lattice".

(4) Seguiremos a Birkhoff en el uso de la palabra "isomorfismo" como correspondencia biunívoca entre dos grupos que conserva la multiplicación.

Objeto de la presente nota es contestar afirmativamente con respecto a los casos 2 y 3. En efecto, demostraremos que basta modificar la construcción de Birkhoff en un detalle *para obtener un sistema parcialmente ordenado con* α^2 (en lugar de $\alpha^2+\alpha$) *elementos,* de modo que la constante del caso 2) se reduce a α^2 y la del caso 3, automáticamente, a 2^{α^2}.

Conviene recordar, en primer lugar, la construcción de Birkhoff para introducir en sus notaciones algún pequeño cambio que nos facilitará la explicación y demostración de la modificación propuesta por nosotros con el objeto de obtener un sistema parcialmente ordenado con α^2 elementos cuyo grupo de automorfismos sea isomorfo a un grupo abstracto dado G de α elementos.

(Recordemos brevemente la definición de un «sistema parcialmente ordenado»: «Para todos los elementos x del sistema rige: $x \geqq x$; si para 2 elementos x e y del sistema rige, a la vez: $x \geqq y$ e $y \geqq x$, entonces: $x=y$; y si para 3 elementos x, y, z del sistema rige, a la vez: $x \geqq y$ e $y \geqq z$, entonces: $x \geqq z$»).

Sea ahora G el grupo dado de α elementos $g_1, g_2, g_3, \ldots$, los que se suponen «bien ordenados» («well-ordered»), si α no es un número finito; g_1 *sea, de una vez para siempre, el elemento unidad* del grupo G. Para obtener un sistema parcialmente ordenado X de $\alpha^2+\alpha$ elementos, con el mismo grupo G como grupo de automorfismos, Birkhoff procede como sigue:

A cada elemento g_ς de G corresponda un elemento (g_ς) de X, y a cada par (ordenado) de dos elementos g_σ y g_τ (iguales o distintos) corresponda un elemento (g_σ, g_τ) de X. En total X contendrá pues α elementos del tipo (g_ς) y α^2 elementos del tipo (g_σ, g_τ) (5). Para estos $\alpha^2+\alpha$ elementos Birkhoff define ahora las relaciones siguientes:

$$(g_\varsigma) > (g_\varsigma, g_1) > (g_\varsigma, g_2) > (g_\varsigma, g_3) > \ldots \quad \text{para} \quad \varsigma = 1, 2, 3, \ldots$$

y además:

$$(g_\sigma) > (g_\tau\, g_\sigma, g_\tau) \quad \text{para} \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma = 1, 2, 3, \ldots \\ \tau = 1, 2, 3, \ldots \end{array} \right\} \; (6).$$

(5) Llamaremos a g_τ la segunda componente del elemento (g_σ, g_τ).
(6) Bastaría exigir estas últimas relaciones tan sólo para $\tau = 2, 3, \ldots$,

El sistema X así definido tiene un grupo de automorfismos isomorfo a G (la demostración véase en la nota de Birkhoff).

Veamos ahora cómo se puede reducir el número de elementos de X sin alterar el grupo de automorfismos. Es fácil darse cuenta de que los elementos «menos importantes» de X son los elementos:

$$(g_1, g_1),\ (g_2, g_1),\ (g_3, g_1),\ \ldots$$

con la segunda componente g_1, pues ellos figuran únicamente en las relaciones: $(g_\varsigma) > (g_\varsigma, g_1) > (g_\varsigma, g_2)$. Al suprimir por completo todos los elementos (g_ς, g_1) con la segunda componente g_1 y las relaciones que para ellos regían, conjuntamente con las relaciones $(g_\varsigma) > (g_\varsigma, g_2)$ que de aquellas se derivarían (7) (debido a la transitividad de la relación $>$), queda pues un *sistema modificado «Y»*, cuya definición será, en resumen, la siguiente:

En Y hay α^2 elementos: los elementos (g_1), (g_2), (g_3), ... que corresponden a los elementos del grupo G, y los elementos

---

porque para $\tau = 1$ ellas son una consecuencia de las anteriores. Birkhoff exige, además:

$$(g_\tau\, g_\sigma, g_\tau) > (g_\tau\, g_\sigma, g_{\tau+1}) > (g_\tau\, g_\sigma, g_{\tau+2}) \ldots,$$

pero me parece que estas relaciones se pueden suprimir por ser contenidas en las anteriores:

$$(g_\varsigma) > (g_\varsigma, g_1) > (g_\varsigma, g_2) > \ldots,$$

si se pone $g_\tau\, g_\sigma = g_\varsigma$.

(7) Esta eliminación también de las relaciones $(g_\varsigma) > (g_\varsigma, g_2)$ es necesaria, porque de lo contrario el grupo de automorfismos del sistema modificado puede ser distinto de G. Véase, por ejemplo, el caso $\alpha = 2$, o sea el grupo cíclico del orden $2 (g_2^2 = g_1)$. En este caso Y tendrá 4 elementos: (g_1), (g_2), (g_1, g_2), (g_2, g_2) y sólo habrá 2 relaciones en Y:

$$(g_1) > (g_2, g_2), \quad (g_2) > (g_1, g_2);$$

efectivamente hay sólo dos automorfismos: el idéntico y el que cambia (g_1) con (g_2) y (g_1, g_2) con (g_2, g_2). En cambio, al admitir, además, las relaciones:

$$(g_1) > (g_1, g_2) \text{ y } (g_2) > (g_2, g_2),$$

habría evidentemente dos automorfismos más, p. ej. aquel que cambia (g_1) con (g_2) sin alterar los elementos (g_1, g_2) y (g_2, g_2).

con (g_2) y (g_1, g_2) con (g_2, g_2). En cambio, al admitir, además, las relaciones

(g_σ, g_τ) *con* $\tau \neq 1$, los que corresponden a los pares (ordenados) de dos elementos de G (sin que la segunda componente pueda ser el elemento unidad g_1 del grupo G). Entre estos α^2 elementos se definen las siguientes relaciones:

$$(g_\varsigma, g_2) > (g_\varsigma, g_3) > (g_\varsigma, g_4) > \ldots \text{ para } \varsigma = 1, 2, 3, \ldots$$

y

$$(g_\sigma) > (g_\tau\, g_\sigma, g_\tau) \text{ para } \sigma = 1, 2, 3, \ldots; \quad \tau = 2, 3, \ldots$$

Demostraremos en seguida que el grupo de automorfismos de este sistema parcialmente ordenado Y sigue siendo isomorfo a G.

Muy fácil es ver que Y admite α automorfismos que forman un grupo isomorfo a G. Sea, en efecto, g_λ un elemento cualquiera de G. Entonces la correspondencia biunívoca

$$\phi_\lambda \left\{ \begin{array}{c} (g_\sigma, g_\tau) \rightarrow (g_\sigma\, g_\lambda, g_\tau) \\ \\ (g_\varsigma) \rightarrow (g_\varsigma\, g_\lambda) \end{array} \right\} (\tau \neq 1)$$

representa un automorfismo de Y, como se comprueba de inmediato. Además, al tomar λ sucesivamente los valores $1, 2, 3, \ldots$, se obtiene un conjunto de automorfismos de Y que evidentemente forman un grupo isomorfo a G.

Hay que demostrar, pues, que Y no admite otros automorfismos fuera de éstos. En otras palabras: si ϕ es un automorfismo cualquiera de Y, hemos de demostrar que siempre existe un λ tal que $\phi = \phi_\lambda$.

¿En qué forma puede actuar ϕ sobre los elementos (g_1), (g_2), (g_3), ...? Sólo permutándolos entre sí, por tratarse de elementos máximos [8] de Y, mientras que ninguno de los demás elementos de Y es «máximo», ya que por definición rige: $(g_\tau^{-1}\, g_\sigma) > (g_\sigma, g_\tau)$.

Pero también los elementos con la segunda componente g_2, o

[8] En un sistema parcialmente ordenado, un elemento m se llama "máximo", si no hay otro elemento x tal que $x > m$.

sea los elementos (g_1, g_2), (g_2, g_2), (g_3, g_2), ... pueden ser sólo permutados entre sí por el automorfismo Φ, pues se trata también de elementos caracterizados por una propiedad invariante frente a automorfismos: ellos serían los elementos máximos en el sistema que resultaría si se eliminara a los verdaderos elementos máximos (g_1), (g_2), (g_3), ... Por inducción completa (respectivamente transfinita) se reconoce, usando un razonamiento análogo, que para cualquier valor de τ, Φ permuta sólo entre sí a los elementos (g_1, g_τ),(g_2, g_τ),(g_3, g_τ), ... con la segunda componente g_τ.

Sea ahora (g_λ) aquel elemento máximo en que es transformado por Φ el elemento (g_1) de Y:

$$(g_1) \rightarrow (g_\lambda).$$

Entre los elementos (g_ς, g_2) con la segunda componente g_2, hay sólo uno que sigue a (g_1): el elemento (g_2, g_2), ya que $(g_1) > (g_2, g_2)$; análogamente hay, entre los mismos elementos, sólo uno que sigue a (g_λ): el elemento $(g_2\, g_\lambda, g_2)$, ya que $(g_\lambda) > (g_2\, g_\lambda, g_2)$. Por lo tanto:

$$(g_2, g_2) \rightarrow (g_2\, g_\lambda, g_2).$$

Repitiendo el mismo razonamiento para los «sucesores inmediatos» (9) de estos dos elementos tenemos que Φ transforma también

$$(g_2, g_3) \rightarrow (g_2\, g_\lambda, g_3)$$

y de un modo general (empléese inducción completa o transfinita):

$$(g_2, g_\tau) \rightarrow (g_2\, g_\lambda, g_\tau) \qquad (\tau \neq 1).$$

Si en la relación general: $(g_\sigma) > (g_\tau g_\sigma, g_\tau)$ ponemos $g_\sigma = g_\tau^{-1}\, g_2$, resulta: $(g_\tau^{-1}\, g_2) > (g_2, g_\tau)$, o sea: (g_2, g_τ) es también «sucesor inmediato» del elemento máximo $(g_\tau^{-1}\, g_2)$; análogamente

(9) Diremos que b es "sucesor inmediato" de a (en inglés: "a covers b"), cuando $a > b$, sin que exista en el sistema un elemento c tal que $a > c > b$.

se ve que $(g_2 g_\lambda, g_\tau)$ es sucesor inmediato del elemento máximo $(g_\tau^{-1} g_2 g_\lambda)$. Por consiguiente, el automorfismo Φ transforma $(g_\tau^{-1} g_2)$ en $(g_\tau^{-1} g_2 g_\lambda)$:

$$(g_\tau^{-1} g_2) \rightarrow (g_\tau^{-1} g_2 g_\lambda)$$

o si ponemos $g_\tau^{-1} g_2 = g_\varsigma$ (con $\varsigma \neq 2$, ya que $\tau \neq 1$), resulta que

(a) $$(g_\varsigma) \rightarrow (g_\varsigma g_\lambda) \quad \text{para } \varsigma \neq 2.$$

Aquí la excepción $\varsigma = 2$ es sólo aparente: pues supongamos que Φ transformaría a (g_2) en algún elemento máximo (g_μ) distinto de $(g_2 g_\lambda)$:

$$(g_2) \rightarrow (g_\mu), \text{ con } g_\mu \neq g_2 g_\lambda;$$

entonces resultaría también

$$(g_\mu g_\lambda^{-1}) \rightarrow (g_\mu)$$

(según (a), para $g_\varsigma = g_\mu g_\lambda^{-1}$, con $\varsigma \neq 2$) y tratándose de un automorfismo en que dos elementos distintos no pueden tener la misma «imagen» (g_μ), resultaría:

$$g_\mu g_\lambda^{-1} = g_2,$$

contrariamente a la hipótesis de que $g_\mu \neq g_2 g_\lambda$. Esta hipótesis es, pues, absurda y *la fórmula* (a) *rige también para* $\varsigma = 2$.

Tomando, por fin, en (a) $g_\varsigma = g_\tau^{-1} g_\sigma$, también se puede decir que siempre rige

$$(g_\tau^{-1} g_\sigma) \rightarrow (g_\tau^{-1} g_\sigma g_\lambda)$$

y para los sucesores inmediatos de estos dos elementos entre los elementos con la segunda componente g_τ rige por consiguiente:

$$(g_\tau \cdot g_\tau^{-1} g_\sigma, g_\tau) \rightarrow (g_\tau \cdot g_\tau^{-1} g_\sigma g_\lambda \cdot g_\tau)$$

o sea:

(b) $$(g_\sigma, g_\tau) \rightarrow (g_\sigma g_\lambda, g_\tau) \qquad (\tau \neq 1).$$

(a) y (b) juntos demuestran la tesis: $\phi = \phi_\lambda$.

Para terminar observaremos que la construcción del sistema X de Birkhoff o la del sistema modificado Y que acabamos de exponer, permiten también encontrar una nueva solución para otro problema parecido: buscar un «diagrama» [10] («graph») cuyo grupo de automorfismos sea isomorfo a un grupo abstracto dado G. Para el caso de un grupo de orden finito α, en una publicación anterior del autor [11] se había indicado una solución en que el «diagrama» construído tenía $\alpha^2(2\alpha-1)$ puntos. (Este número, sin embargo, se reducía a $\alpha(1+\beta)(1+2\beta)$ para un grupo G que se puede engendrar por β de sus elementos). Ahora bien, si $\alpha > 2$, partiendo del sistema parcialmente ordenado Y se puede encontrar un «diagrama» D con $\frac{1}{2}(\alpha^3+\alpha^2)$ puntos, tal que su grupo de automorfismos sea isomorfo al grupo dado G del orden finito α.

La construcción de este «diagrama» D se efectúa de la manera siguiente: A cada elemento del sistema Y se hace corresponder un punto de D, y si en Y un elemento es «sucesor inmediato» de otro, en D los dos puntos correspondientes se unen por una arista. Además se aplica en cada punto del tipo (g_ς, g_τ) una «cola» de longitud $\tau - 1$; es decir: se introducen en D todavía $\frac{1}{2}(\alpha^3-\alpha^2)$ nuevos puntos que podemos llamar

$$(g_\varsigma, g_\tau, \nu), \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots, \tau-1);$$

y se introducen sendas aristas entre (g_ς, g_τ) y $(g_\varsigma, g_\tau, 1)$ para $\varsigma = 1, 2, \ldots, \alpha$; $\tau = 2, 3, \ldots, \alpha$; y entre $(g_\varsigma, g_\tau, \nu)$ y $(g_\varsigma, g_\tau, \nu-1)$ para $\varsigma = 1, 2, \ldots, \alpha$; $\tau = 2, 3, \ldots, \alpha$; $\nu = 2, 3, \ldots, \tau-1$.

Es fácil ver que el grupo de automorfismos de este «diagrama» D es isomorfo al grupo dado G (siempre que el orden α de este último sea finito y mayor que 2).

---

(10) Propongo esta palabra como traducción de lo que en inglés y alemán se llama "Graph", o sea de un conjunto de puntos que pueden ser unidos entre sí por medio de "aristas".

(11) *Herstellung von Graphen mit vorgegebener abstrakter Gruppe*, Compositio Mathematica, vol. 6 (1938), págs. 239-250.