NOTA SOBRE LOS COEFICIENTES DE KUMMER

por José Babini

En el trabajo anterior, el señor Pizá señala algunas propiedades de los coeficientes $\varphi(n, m)$ del desarrollo de Kummer ($z = x + y$):

$$x^n + y^n = \sum_{m=0}^{m \leq \frac{n}{2}} (-1)^m \varphi(n, m)\, x^m y^m z^{n-2m}, \tag{1}$$

de la forma:

$$\varphi(0, 0) = 2$$

$$\varphi(n, m) = \frac{n(n-m-1)(n-m-2)\ldots(n-2m+1)}{m!},$$

$$0 \leqq m \leqq \frac{n}{2} > 0.$$

Es claro que esta última expresión puede escribirse

$$\varphi(n, m) = \frac{n}{n-m}\binom{n-m}{m} = \frac{n}{m}\binom{n-m-1}{m-1} =$$

$$= \binom{n-m}{m} + \binom{n-m-1}{m-1} \tag{2}$$

y aplicando a cada uno de estos números combinatorios la conocida relación de recurrencia, se obtiene la relación de recurrencia de los coeficientes de Kummer

$$\varphi(n, m) = \varphi(n-1, m) + \varphi(n-2, m-1) \tag{3}$$

que el señor Pizá comprueba, en su artículo, para casos numéricos, (propiedad 1).

La propiedad 5 del señor Pizá se deduce inmediatamente de la anterior escribiéndola

$$\varphi(n-2, m) = \varphi(n, m+1) - \varphi(n-1, m+1)$$

y sumando estas igualdades para n desde $2m+2$ a $p+2$. Será

$$\sum_{n=2m+2}^{p+2} \varphi(n-2, m) = \sum_{n=2m}^{p} \varphi(n, m) = \varphi(p+2, m+1) - \varphi(2m+1, m+1) = \varphi(p+2, m+1)$$

pues $\varphi(2m+1, m+1) = 0$.

Para demostrar la propiedad 2 del señor Pizá consideremos el polinomio $P_n(x)$ $(n>0)$ cuyos coeficientes son los elementos de las diagonales descendentes de su cuadro. Ese polinomio será

$$P_n(x) = \sum_{m=0}^{n} \varphi(n+m, m)\, x^m$$

y aplicando la expresión (2):

$$P_n(x) = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} x^m + \sum_{m=1}^{n} \binom{n-1}{m-1} x^m = (1+x)^n + x(1+x)^{n-1} = (1+2x)(1+x)^{n-1}.$$

que para $x=1$ da la propiedad indicada por el señor Pizá, pero que permite otras relaciones entre los coeficientes de Kummer. Así

$$P_n(-1) = \sum_{m=0}^{n} \varphi(n+m, m)(-1)^m = 0 \quad (n>1)$$

$$P_n\left(-\frac{1}{2}\right) = \sum_{m=0}^{n} \varphi(n+m, m)(-1)^m 2^{-m} = 0 \quad (n>0).$$

Muchas otras relaciones entre estos coeficientes pueden obtenerse. Así, consideremos la serie entera, convergente para $|x|<1$

$$S_m(x) = \sum_{n=2m} \varphi(n, m)\, x^{n-2m} = \sum_{n=0} \varphi(n+2m, m)\, x^n$$

que, utilizando la (2), permite calcularse fácilmente

$$S_m(x) = \sum_{n=0} \left[\binom{n+m}{m} + \binom{n+m-1}{m-1} \right] x^n =$$

$$= \frac{1}{(1-x)^{m+1}} + \frac{1}{(1-x)^m} = \frac{2-x}{(1-x)^{m+1}}$$

Así, por ejemplo

$$S_m\left(\frac{1}{2}\right) = \sum_{n=0} \varphi(n+2m, m)\, 2^{-n} = 3 \,.\, 2^m.$$

En forma semejante se obtiene al valor de la serie ($|x| < 1$; $n > 0$):

$$\sum_{m=0} \varphi(n+2m, m)\, x^m = \sum_{m=0} \left[\binom{n+m}{m} + \binom{n+m-1}{m-1} \right] x^m =$$

$$= \sum_{m=0} \binom{n+m}{m} x^m (1+x) = \frac{1+x}{(1-x)^{n+1}}$$

Relaciones entre los coeficientes de Kummer y los números combinatorios pueden obtenerse partiendo directamente del desarrollo (1). En efecto, si en él se sustituye z por $x+y$, de la identidad resultante se obtiene

$$\sum_{m=0}^{r} (-1)^m \varphi(n, m) \binom{n-2m}{r-m} = 0 \qquad 0 < r \leqq \frac{n}{2},$$

expresión que también podría obtenerse directamente pues el primer miembro no es sino

$$\frac{n}{r!} \Delta^r (n-1)^{(r-1} = 0.$$

Una expresión del coeficiente $\varphi(n, m)$ como determinante cuyos elementos son números combinatorios, puede obtenerse como sigue. Si llamamos $x^r + y^r = \alpha_r$ se obtiene el desarrollo

$$(x+y)^p = z^p = \binom{p}{0} \alpha_p + \binom{p}{1} xy\, \alpha_{p-2} + \binom{p}{2} x^2 y^2 \alpha_{p-4} + \dots$$

y si de las igualdades que se obtienen haciendo $p=n,\ n-2,\ n-4,\ldots$, se elimina $\alpha_{n-2},\ \alpha_{n-4},\ldots$ se llega después de algunas simples transformaciones a

$$\alpha_n=\begin{vmatrix} z^n & \binom{n}{1} & \binom{n}{2} & \cdots\cdots \\ z^{n-2}\,x\,y & \binom{n-2}{0} & \binom{n-2}{1} & \cdots\cdots \\ z^{n-4}\,x^2\,y^2 & 0 & \binom{n-4}{0} & \cdots\cdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \end{vmatrix}$$

que, teniendo en cuenta la (1) da, para $m\geqq 1$.

$$\varphi(n,m)=\begin{vmatrix} \binom{n}{1} & \binom{n}{2} & \binom{n}{3} & \cdots\cdots & \binom{n}{m-1} & \binom{n}{m} \\ \binom{n-2}{0} & \binom{n-2}{1} & \binom{n-2}{2} & \cdots\cdots & \binom{n-2}{m-2} & \binom{n-2}{m-1} \\ 0 & \binom{n-4}{0} & \binom{n-4}{1} & \cdots\cdots & \binom{n-4}{m-3} & \binom{n-4}{m-2} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots\cdots & \binom{n-2m+2}{0} & \binom{n-2m+2}{1} \end{vmatrix}$$

Por lo demás es fácil demostrar directamente esta expresión y con ello el desarrollo de Kummer. En efecto, el determinante anterior, para $m\geqq 1$, es un polinomio en n de grado m que se anula para $n=0$, por anularse todos los términos de la primera fila y para $n=m+k$; $k=1,2,3,\ldots,m-2$, por hacerse iguales los términos de la última columna con los de la columna k^{a}. De ahí que $\varphi(n,m)=Cn\,(n-m-1)^{(m-1}$.

Como para $n=m$ el determinante toma el valor $(-1)^{m-1}$; $C=\dfrac{1}{m!}$ y finalmente

$$\varphi(n,m)=\frac{n}{m!}(n-m-1)^{(m-1}=\frac{n(n-m-1)(n-m-2)\ldots(n-2m+1)}{m!}$$