UNION MATEMATICA ARGENTINA

COMUNICACIÓN

UN TEOREMA EQUIVALENTE AL DE ZORN (*) (1)

por Gregorio KLIMOVSKY

Diremos que una relación $<$ sobre un conjunto A es *arreflexiva* si para todo $a \in A$ se cumple $a \not< a$.

Diremos que a_0 es cota superior de un subconjunto A' de un conjunto ordenado (2) A si para todo $a' \in A$ se tiene $a' < a_0$.

1) Si un conjunto A está ordenado por una relación $<$ arreflexiva y a_0 es cota superior de un subconjunto A' de A, entonces $a_0 \notin A'$. En efecto, para todo $a' \in A'$ se tiené $a' < a_0$. Si $a_0 \in A'$ se tendría $a_0 < a_0$, lo que no es posible.

Consideremos el siguiente enunciado:

2) *No existen ordenaciones arreflexivas en las que toda sub-ordenación simple posea cota superior en el sistema.*

Para probar la equivalencia lógica de esta proposición con el teorema de Zorn demostraremos primero que

I) El teorema de Zorn implica la proposición 2).

Supongamos que exista un conjunto A ordenado por $<$, siendo esta relación arreflexiva y con la propiedad de que todo subconjunto simplemente ordenado posee cota superior en el sistema. Por el teorema de Zorn existe un subconjunto A' simplemente ordenado maximal (es decir, al que no se le puede adjuntar ningún elemento mayor o menor que todos los de A' sin que deje de ser simplemente ordenado). Por ser simplemente ordenado poseerá una cota superior a_0 en el sistema, y por 1) se tendrá $a_0 \notin A'$, pues $<$ es arreflexiva. Luego A' puede ampliarse en A por adjunción de a_0 sin dejar de ser simplemente ordenado, lo que contradice su maximalidad. Por lo tanto A no eyiste y 2) queda demostrada.

Veamos ahora que

II) La proposición 2) implica al teorema de Zorn.

Como el teorema de Zorn es equivalente al postulado de buena ordenación, bastará demostrar que

II bis) La proposición 2) implica al postulado de buena ordenación.

Supongamos que exista un conjunto A que no puede bien ordenarse. Consideremos el agregado $E = \{E\alpha\}$ de todos los buenos ordenamientos $E\alpha$ definidos sobre subconjuntos de A (agregado que no es vacío pues al menos los puntos de A constituyen cada uno un conjunto bien-ordenado). Vamos a introducir en E un ordenamiento $<$ de la siguiente manera:

Diremos que $E\alpha < E\beta$ si a) $E\alpha$ es segmento de $E\beta$; b) Hay al menos un elemento de $E\beta$ que no lo es de $E\alpha$. La condición b) da carácter arreflexivo a la relación $<$.

Consideremos un sub-agregado E' de E que esté simplemente ordenado por $<$. Sea A' el subconjunto de A formado por todos los puntos que pertenezcan algún $E\nu \in E'$; vamos a definir una relación R que permitirá bien-ordenar los punto de A'.

Sean a y b dos elementos cualesquiera de A'. Si existe algún $E\gamma \in E'$ al

---

(*) Resumen de la comunicación presentada en la sesión de la U. M. A. del 22 de noviembre de 1947.

(1) Ver S. LEFSCHETZ, *Algebraic Topology*, Am. Math. Soc., 1942, pág. 5. El teorema de Zorn es lógicamente equivalente al postulado de Zermelo, de modo que en el presente trabajo enunciamos a éste en una nueva forma.

(2) Un conjunto se dirá *parcialmente ordenado* u *ordenado* si ciertos pares de elementos del mismo satisfacen alguna relación $<$ sujeta a la mera condición de transitividad. Diremos que es *simplemente ordenado* si además, para todo par a, b del mismo, se tiene $a < b$ ó $b < a$.

cual pertenezcan a y b, diremos que a posee la relación R con b si b sigue a a en E_γ. Dado que E' está simplemente ordenado, E_γ existe siempre. Llamemos $E_{A'}$ a la ordenación obtenida por R sobre A'; es fácil ver que es una buena ordenación, debiendo por consiguiente pertenecer a E. $E_{A'}$ no puede cubrir A (pues ello implicaría que A es bien ordenable), luego algún x de A no entra en $E_{A'}$. Definamos $E_{B'}$ como la ordenación obtenida agregando x a $E_{A'}$, considerando a x posterior a todos los demás elementos. $E_{B'} \epsilon E$ y sigue a todos los E', siendo por lo tanto cota superior del agregado E' con respecto a la ordenación $<$.

De lo anterior se tiene que la ordenación $<$ definida sobre E goza de las siguientes propiedades:

a') es arreflexiva.

b') todo sub-ogregado simplemente ordenado de E posee cota superior en E.

Por consiguiente E contradice 2) y el conjunto A debe poder bien-ordenarse.

Las demostraciones I y II nos permiten concluir que el enunciado 2) es equivalente al del teorema de Zorn.

BIBLIOGRAFIA

LEOPOLDO NACHBIN, *Combinaçao de topologias seudo-metrisaveis e metrisaveis.* Notas de Matemática nº 1. Boffoni. Río de Janeiro, 1948.

Este es el primer fascículo de una serie mimeografiada, NOTAS DE MATEMÁTICA, que se publica en Río de Janeiro bajo la dirección de A. Monteiro. No es libro de exposición de alguna porción conocida de la Matemática, sino que tiene el carácter definido de memoria original corriente, aunque con abundancia de detalles como para que su lectura resulte clara y amena. Como el autor lo dice en el prefacio, lo esencial de este fascículo está contenido en una nota de los Comptes Rendus, París. Consiste en lo siguiente. Sea E un espacio abstracto arbitrario, P el sistema parcialmente ordenado de las topologías sobre E que pueden ser deducidas de alguna pseudométrica (topologías pseudometrizables), y M el sistema parcialmente ordenado de las topologías metrizables (aquí pseudométrica se distingue de la métrica común sólo porque dos puntos distintos pueden tener distancia nula, y la relación de "precede" en las ordenaciones está entendida como "con igual o menos conjuntos abiertos"). Si cuando Z es un conjunto de topologías sobre E ponemos $S(Z)$ e $I(Z)$ para los conjuntos de todos los supremos y, respectivamente, ínfimos de subconjuntos de Z (tanto supremo como ínfimo tomado en el *lattice* completo de todas las topologías sobre E), los resultados fundamentales de Nachbin se expresan: 1. $ISIS(P) = ISI(P)$ es el conjunto de todas las topologías sobre E; 2. $SIS(M) = SI(M)$ es el conjunto de todas las topologías de Fréchet-Riesz (cada punto es un conjunto cerrado). En ambos casos el resultado no se puede mejorar. Además de estos teoremas de representación el autor da para cada clase que aparece, $S(P)$, $IS(P)$, etc., una caracterización en términos de las nociones fundamentales de una topología (conjunto abierto, punto de acumulación, etc.). Un ejemplo típico es el siguiente (que caracteriza a $IS(P)$): si un conjunto X de E no es abierto, o existe un punto de X y un punto de su complementario topológicamente equivalentes (idéntica clausura), o existe un punto de X tal que todo entorno de este punto contiene una infinidad de puntos del complementario.

R. A. RICABARRA