SOBRE UN TEOREMA DE E. HOPF

por M. Cotlar y R. A. Ricabarra

§ 1. *Introducción.*

Sea M un espacio abstracto, T una clase aditiva de subconjuntos $A, B, \ldots$ de M [1], $m(A)$ una medida completamente aditiva definida sobre T que vale 1 sobre el espacio total, $m(M)=1$, y $G=\{g_\alpha\}$ un grupo de transformaciones biunívocas de M sobre sí mismo que deja invariante a T y a la subfamilia de T compuesta por los conjuntos de medida m nula, es decir:

m_1) $A \in T$, $g \in G$ implica $Ag \in T$,

m_2) $A \in T$, $m(A)=0$, $g \in G$, implica $m(Ag)=0$.

En lo que sigue supondremos fijada definitivamente esta notación. Además de la medida fija $m(A)$ consideraremos otras medidas definidas sobre T; una medida $\mu(A)$ definida sobre T se dirá *m-invariante* si: μ_1) $\mu(A)$ es completamente aditiva sobre T; μ_2) $m(A)=0$ equivale a $\mu(A)=0$; μ_3) $\mu(Ag)=\mu(A)$ para todo $A \in T$; $g \in G$; μ_4) $\mu(M)=1$.

Diremos que dos conjuntos $A \in T$, $B \in T$ son *equivalentes por descomposición infinita (finita)*, abreviadamente e. d. i. (e. d. f.), si existen dos descomposiciones $A=A_1+A_2+\ldots$ y $B=B_1+B_2+\ldots$, en número finito o infinito numerable (finito) de sumandos, con

(1) Entendemos por clase aditiva, como de costumbre, una clase no vacía T de conjuntos, que contiene con cada subfamilia numerable su unión y con cada conjunto su complementario respecto de M. Una medida completamente aditiva sobre T es una función que hace corresponder a todo conjunto A de T un número $m(A) \geq 0$ de modo que para toda sucesión de conjuntos disjuntos dos a dos $A_1 A_2, \ldots$, se verifica $m(A_1+A_2+\ldots) = m(A_1)+m(A_2)+\ldots$

$A_n = B_n g_n$, $B_n \in T$, $g_n \in G$ para todo n y $A_i A_j = B_i B_j = 0$ para $i \neq j$. En el caso de un grupo G cíclico o continuo monoparamétrico, E. Hopf demuestra el siguiente teorema (²): *Para que exista una medida m-invariante* $\mu(A)$ *es necesario y suficiente que* M *no sea equivalente por descomposición infinita con ningún subconjunto* M' *de medida* $m(M') < m(M)$. Hopf dejó abierto el problema de si el teorema sigue siendo válido cuando se reemplaza «descomposición infinita» por «descomposición finita». En esta nota extendemos el teorema a una clase muy amplia de grupos G (que contiene a los abelianos y los resolubles). Los argumentos usados por nosotros son enteramente diferentes a los de Hopf y se basan en el uso de la *equicontinuidad* del grupo G: G se dice equicontinuo (respecto de la medida $m(A)$) si dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $m(A) < \delta$ implica $m(Ag) < \varepsilon$, cualquiera sea $g \in G$. Precisamente, probamos que la equicontinuidad de G es equivalente simultáneamente a la existencia de una medida m-invariante y a la imposibilidad de que M sea e. d. i. a un subconjunto M' con $m(M') < m(M)$: Usamos para esto un artificio de von Neumann (ver § 2) con lo que se logra las ventajas de mayor sencillez, concisión y generalidad. Además la medida que proporciona el teorema se obtiene constructivamente, aunque con la intervención esencial del axioma de Zermelo. Estudiamos las propiedades de un conjunto que llamamos *núcleo singular* (§ 4) y que encierra toda la patología que aparece en el caso de no existir una medida m-invariante. En cuanto al problema de Hopf, fué resuelto por P. Halmos (²) con un interesante ejemplo negativo. Combinado este ejemplo con el teorema 5, conduce a curiosas propiedades del grupo de los enteros (teorema 7).

§ 2. *Grupos medibles. La media de v. Neumann.*

Un grupo $G = \{g_\alpha\}$ se llama *medible* (v. Neumann, Zur allgemeine Theorie des Masses, Fund. Math. 13, 1929, pg. 73-116) si existe una medida ν definida para todos los subconjuntos

---

(²) *Theory of measure and invariant integrals.* Trans. Amer. Math. Soc. V 34, 1932, pg. 373-393. Hopf impone a la medida la condición suplementaria: $m(A) > 0$ implica la eristencia de un $B \subset A$ con $0 < m(B) < m(A)$, que nosotros no suponemos. Ver además L. HALMOS, *Ann. of Math.* V. 48 (1947), 735-54.

$E \subset G$, simplemente aditiva, invariante a derecha y que vale 1 sobre G, es decir:

ν_1) $\nu(E)$ es definida para todo conjunto $E \subset G$ y $\nu(E) \geqq 0$,

ν_2) si E_1, E_2 son disjuntos $\nu(E_1+E_2) = \nu(E_1) + \nu(E_2)$,

ν_3) $\nu(Eg) = \nu(E)$ para todo $g \in G$,

ν_4) $\nu(G) = 1$.

Si $f(g)$ es una función real acotada definida sobre G, se puede definir una integral o media

$$M(f) = \int_G f(g)\, d\nu(g)$$

según la construcción usual de Riemann. Esta $M(f)$ posee las propiedades siguientes:

M_1) $M(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) = \lambda_1 M(f_1) + \lambda_2 M(f_2)$ si λ_i son números reales,

M_2) Si $f_1(g) = f(g_1 g)$ es $M(f_1) = M(f)$,

M_3) Si $f(g) \geqq 0$ es $M(f) \geqq 0$,

M_4) Si $f(g) \equiv 1$ es $M(f) = 1$.

La clase de los grupos medibles es bastante amplia (v. Neumann, l. c.); en particular todos los grupos resolubles, y por tanto los abelianos, son medibles.

Retomemos ahora los elementos y terminología del § 1 y supongamos para el resto de este § que el grupo G es medible. Haciendo uso de un simple artificio de v. Neumann (l. c.) asociaremos a la medida $m(A)$, $A \in T$ una medida $m^*(A)$ definida por

$$m^*(A) = M(f_A(g)) \quad \text{donde} \quad f_A(g) = m(Ag).$$

La medida asociada $m^*(A)$ tiene las propiedades siguientes [3]:

[3] Este artificio resulta una herramienta muy útil en la construcción de medidas invariantes, como se proponen mostrar los autores en un próximo trabajo.

$m_1{}^*)$ $m^*(A)$ está definida para todo $A \in T$ y $m^*(A) \geqq 0$,
$m_2{}^*)$ m^* es simplemente aditiva, es decir, $A_1 . A_2 = 0$ implica $m^*(A_1 + A_2) = m^*(A_1) + m^*(A_2)$,
$m^*{}_3)$ $m^*(Ag) = m^*(A)$ para todo $A \in T$, $g \in G$,
$m^*{}_4)$ $m^*(M) = 1$,
$m_5{}^*)$ $m(A) = 0$ implica $m^*(A) = 0$.

La última propiedad es consecuencia de la propiedad de invariancia $m_2)$ de la medida $m(A)$.

§ 3. *Equicontinuidad respecto de $m(A)$.*

Si A y B son equivalentes por descomposición finita o infinita, $A = A_1 + A_2 + \ldots$, $B = B_1 + B_2 + \ldots$, $A_n = B_n g_n$, pondremos $A = Bd$, donde d es la transformación biunívoca definida sobre B, que coincide con g_n en B_n.

Lema 1. (i) *La condición $m_2)$ equivale a la siguiente:*

$m_2')$ para cada $g \in G$ y $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$, $\delta = \delta(\varepsilon, g)$ tal que $A \in T$, $m(A) < \delta$ implica $m(Ag) < \varepsilon$.

(ii) *Si $A = Bd$, dado $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que $B' \subset B$, $m(B') < \delta$ implica $m(B'd) < \varepsilon$.*

Demostración. (i) Evidentemente $m_2')$ implica $m_2)$. Recíprocamente, supuesta $m_2)$, si no se verificara $m_2')$ existiría una sucesión $A_n \in T$, $B_n \in T$ y un $g \in G$ con $m(A_n) < 1 : 2^n$, $m(B_n) > \delta > 0$, $B_n = A_n g$.

Poniendo $A'_n = \sum_n^\infty A_i$, $B'_n = A'_n g$, sería $m(A'_n) \to 0$, $m(B'_n) > \delta > 0$, de donde $m(\bigcap_n A'_n) = 0$ y $m(\bigcap_n B'_n) = m((\bigcap_n A'_n) g) \geqq \delta > 0$ contra $m_2)$.

(ii) Es consecuencia fácil de (i), y omitimos la demostración.

El lema precedente sugiere la siguiente

Definición: El grupo $G = \{g_\alpha\}$ se dirá *equicontinuo* (respecto de $m(A)$) si dado $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$, $\delta = \delta(\varepsilon)$, tal que cualesquiera sean $A \in T$ y $g \in G$, $m(A) < \delta$ implica $m(Ag) < \varepsilon$.

Teorema 1. *Para que un grupo medible G sea equiconti-*

nuo es necesario y suficiente que exista una medida $\mu(A)$ *m-invariante* (§ 1). *Demostración. Necesario.* Sea G equicontinuo. Vamos a probar que la medida $m^*(A) = \mu(A)$ asociada a la $m(A)$ (§ 2) es m-invariante. Si $m^*(A) = 0$ resulta de M_1)—M_4) la existencia de una sucesión $g_n \in G$ tal que $f_A(g_n) \to 0$, donde $f_A(g) = m(Ag)$; luego $m(Ag_n) \to 0$ y por la equicontinuidad $m(A) = 0$. Así pues $m^*(A) = 0$ implica $m(A) = 0$, y por m^*_5) $m(A) = 0$ implica $m^*(A) = 0$. Luego sólo falta probar que $\mu(A) = m^*(A)$ es completamente aditiva sobre T o sea que $A_1 \supset A_2 \supset \ldots, A_n \to 0$ (intersección vacía) implica $\mu(A_n) \to 0$. En efecto, $A_n \to 0$ implica $m(A_n) \to 0$, luego por la equicontinuidad $\sup_g m(A_n g) \to 0$, de donde $M(f_{A_n}) \to 0$, $m^*(A_n) \to 0$.

Suficiente. Supongamos la existencia de una medida $\mu(A)$ m-invariante. Probaremos que G es equicontinuo. De lo contrario, existiría un $\varepsilon_0 > 0$ tal que cualquiera sea la sucesión $\delta_n > 0$ existen $A_n \in T$, $g_n \in G$ con $m(A_n) < \delta_n$, $m(A_n g_n) > \varepsilon_0$. Como $\mu(A) = 0$ si $m(A) = 0$, resulta que dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $m(A) < \delta$ implica $\mu(A) < \varepsilon$; podemos pues tomar los $\delta_n < 1:2^n$ y tales que además $\mu(A_n) < 1:2^n$. Poniendo $B_n = \sum_n^\infty A_n$, $B'_n = \sum_n^\infty A_n g_n$ $m(B_n) \to 0$ y $m(B_n') > \varepsilon_0 > 0$, luego $B_n \to B$ con $m(B) = 0$ y $B_n' \to B'$ con $m(B') > \varepsilon_0$. Pero

$$\mu(B') \leqq \sum_n^\infty \mu(A_n g_n) = \sum_n^\infty \mu(A_n) \leqq \sum_n^\infty 1/2^n,$$

luego $\mu(B') = 0$ y por lo tanto $m(B) = 0$, contradicción.

Lema 2. (i) *Si* $B'_n = B_n d_n$, $\sum m(B'_n) < \infty$, *dada una sucesión de números reales* $\varepsilon_i > 0$ *se puede hacer corresponder a todo número natural* k *un número natural* $N(k)$ *de modo tal que si* $\{n_i\}$ *es una sucesión de números naturales que verifica* $n_{i+1} \geqq N(n_i)$ $(i = 1, 2, \ldots)$, *se puede determinar para cada* i *un conjunto* $C_{n_i} \subset B_{n_i}$ *tal que* $m(B_{n_i} - C_{n_i}) < \varepsilon_i$ *y los* $C'_{n_i} = C_{n_i} d_{n_i}$ *sean disjuntos dos a dos.* (ii) *Si* $C'_n = C_n d_n$, $C = \text{lím sup}\, C_n$ *y los* C'_n *son disjuntos dos a dos, entonces existe* $E \subset C$, $m(C - E) = 0$, *e infinitos conjuntos* E'_n *disjuntos dos a dos, cada uno equivalente por descomposición infinita con* E. *Demostración.* Por el lema 1, (ii), existe un $\delta_k > 0$ tal que $B \subset B'_k$, $m(B) < \delta_k$ implica $m(Bd_k^{-1}) < \varepsilon_k$. Por ser $\sum m(B'_n) < \infty$ podemos elegir, para cada k, el $N(k)$ de modo que $\sum_{N(k)}^\infty m(B'_n) < \delta_k$. Si $\{n_i\}$ es una sucesión que verifica

$n_{i+1} \geqq N(n_i)$, poniendo $D'_i = B'_{n_i} \cdot \sum_{n_i+1}^{\infty} B'_n$, $D_i = D'_i d^{-1}_{n_i}$, será $m(D'_i) < \delta_i$, $m(D_i) < \varepsilon_i$ y los conjuntos $C_{n_i} = B_{n_i} - D_i$ responden a la tesis. (ii) Sea $\varepsilon_i > 0$, $\varepsilon_i \to 0$, y $N_1 < N_2 < \ldots N_k < \ldots$ una sucesión de números naturales tales que para cada k, $m(C - \sum_{n=1+N_k}^{N_{k+1}} C_n) < \varepsilon_k$. Poniendo $S_k = \sum_{1+N_k}^{N_{k+1}} C_n$, $S'_k = \sum_{1+N_k}^{N_{k+1}} C'_n$, es evidente que si $\{k_i\}$ es una sucesión infinita de números enteros y $S = \bigcup_i S_{k_i}$, entonces S es equivalente por descomposición infinita con un $S' \subset \bigcup_i S'_{k_i}$ y $m(C - S) = 0$. Si se descompone la sucesión de los números naturales en infinitos conjuntos $\{k_i^n\}$ disjuntos dos a dos y se pone $S^n = \bigcup_i S_{k_i^n}$; es S^n e. d. i. con un $S'^n \subset \bigcup_i S'_{k_i^n}$, los S'^n disjuntos dos a dos y $m(C - S^n) = 0$. Basta poner $E = \bigcap_n S^n$.

T e o r e m a 2. *Para que un grupo medible G sea equicontinuo respecto de la medida $m(A)$, es necesario y suficiente que M no sea equivalente por descomposición infinita con ningún conjunto M' de medida $m(M') < m(M)$. Demostración. Necesario.* Supongamos que G es equicontinuo y M e. d. i. con M', $m(M') < m(M)$. Como por el teorema 1 existe una medida m-invariante $\mu(A)$, resulta $\mu(M) = \mu(M')$, $\mu(M - M') = 0$, $m(M - M') > 0$, contrariamente a la definición de m-invariancia.

Suficiente. Supongamos que G no es equicontinuo. Entonces existe una sucesión $B_n \in T$, $g_n \in G$, $B'_n = B_n g_n$ con $m(B_n) > \delta > 0$, $m(B'_n) < 1 : 2^n$. Por el lema 2, (i), existe una subsucesión B_{n_k} y conjuntos $C_{n_k} \subset B_{n_k}$, $C'_{n_k} = C_{n_k} g_{n_k}$ con $m(\overline{\lim} C_{n_k}) \geqq \delta > 0$ y los C'_{n_k} disjuntos dos a dos. Por el lema 2, (ii), poniendo $C = \overline{\lim} C_{n_k}$, existe un $E \subset C$ con $m(E) = m(C) \geqq \delta > 0$ y una sucesión infinita de conjuntos E_n disjuntos dos a dos, cada uno e. d. i. con E. Por la propiedad m_2) debe ser $m(E_n) > 0$ para todo n, puesto que $m(E) \geqq \delta > 0$. Por ser los E_n disjuntos y e. d. i. dos a dos, es $E' = \bigcup_1^{\infty} E_n$ e. d. i. con $E'' = \bigcup_2^{\infty} E_n$, mientras que $m(E'') < m(E')$, $E'' \subset E'$. De aquí resulta que M es e. d. i. con $M' = E'' + (M - E')$, $m(M') < m(M)$.

Observación. Las partes «suficiente» de los teoremas 1 y 2 valen para grupos G arbitrarios.

De los teoremas 1 y 2 resulta la generalización del teorema de Hopf:

Teorema 3. *Si G es un grupo medible, una condición necesaria y suficiente para que exista una medida m-invariante, es que M no sea equivalente por descomposición infinita con ningún conjunto M' de medida $m(M')<m(M)$.*

Para cerrar este § observemos que con idéntico método al usado hasta aquí se extiende a grupos G medibles el teorema de Birkhoff-Smith sobre las medidas de orden m (teorema 2 del trabajo citado de E. Hopf).

§ 4. *El núcleo singular S.*

En este § consideraremos algunos aspectos de la no equicontinuidad del grupo G.

Definición: Designaremos con $\Delta=\{\delta\}$ $(\Delta'=\{\delta'\})$ al conjunto de los números reales $\delta\geqq 0$ $(\delta'\geqq 0)$ tales que existe un conjunto $B\in T$, $m(B)=\delta$ $(m(B)=\delta')$ y una sucesión de conjuntos B_n, $n=1,2,\ldots$, disjuntos dos a dos, tales que B es e. d. i. (e. d. f.) con cada B_n; diremos que el conjunto B *pertenece* a $\delta\in\Delta$ $(\delta'\in\Delta')$. Evidentemente $\Delta'\subset\Delta$ e $\inf\Delta=\inf\Delta'=0$.

Lema 3. (i) Sup $\Delta=\sup\Delta'=\delta_0$. (ii) $\delta_0\in\Delta$ [4]. (iii) *Si B_1 pertenece a δ, B_2 a δ_0, entonces $m(B_1-B_2)=0$, luego si B_1 y B_2 pertenecen ambos a δ_0 es $m(B_1-B_2)=m(B_2-B_1)=0$.* (iv) *Todo conjunto B perteneciente a δ_0 es invariante salvo medida m nula* [5]. *Demostración.* (i) Evidentemente basta probar que $\sup\Delta'\geqq\sup\Delta$. Sea B perteneciente a $\delta\in\Delta$ y B_n infinitos conjuntos disjuntos, cada uno e. d. i. con B. Dado $\varepsilon>0$, podemos determinar para cada n un $B^n\subset B$ tal que $m(B-B^n)<\varepsilon:2^n$ y que B^n sea e. d. f. con una parte B'_n de B_n. Poniendo $C=\bigcap B^n$ es $m(C)>\delta-\varepsilon$ y C e. d. f. con infinitos subconjuntos $C_n\subset B'_n$ disjuntos dos a dos. Luego C pertenece a un $\delta'\in\Delta'$ con $\delta'>\delta-\varepsilon$,

(4) El problema de si también $\delta_0\in\Delta'$ equivale, en virtud de (iv), al problema de Hopf (§ 1).

(5) Si G es numerable, por ej. cíclico, se puede afirmar más aún: entre los conjuntos pertenecientes a δ_0 hay uno invariante.

lo que termina la demostración (i). (ii) Sean $\delta_n \to \delta_0$, $\delta_n \in \Delta$, B^n perteneciente a δ_n y, para cada n, $B^n{}_1$, $B^n{}_2$, ... infinitos conjuntos disjuntos ,cada uno e. d. i. con B^n. Por ser los $B^n{}_k$ disjuntos dos a dos para cada n fijo, podemos elegir k_n de modo tal que $\sum_{n=1}^{\infty} m(B^n{}_{k_n}) < \infty$, luego por aplicación sucesiva de (i) y (ii) del lema 2, resulta la existencia de un conjunto E con $m(E) = \delta' \geqq \delta_0$ e. d. i. con infinitos E_n disjuntos dos a dos; luego $\delta' \in \Delta$, $\delta' \geqq \delta_0$ y resulta $\delta' = \delta_0$, $\delta_0 \in \Delta$. (iii) Suponiendo lo contrario o sea B_1 perteneciente a δ, B_2 a δ_0 y $m(B_1 + B_2) > \delta_0$, poniendo $B^{2k} = B_1$, $B^{2k+1} = B_2$, $B = \overline{\lim} B^n$, eligiendo la sucesión $\{n_k\}$ del lema 2 (i) de modo que n_k sea par o impar conjuntamente con k y aplicando (i) y (ii) de dicho lema a los conjuntos actuales B^n, resulta que B pertenece a $\delta' = m(B) > \delta_0$, contrariamente a la definición de δ_0. (iv) Consecuencia inmediata de (iii).

Lema 4. *Existe un conjunto S de medida $m(S) = \delta_0$, invariante salvo medida nula* (ver nota (5) al pie de la pág. 55), *y que contiene una infinidad de conjuntos S_n disjuntos dos a dos, cada uno equivalente por dscomposición infinita con S. Demostración.* Si B pertenece a δ_0 y $B_n = Bd_n$ son los conjuntos disjuntos dos a dos y e. d. i. con B, resulta del lema 3, (iv) que el conjunto $B'_n = B_n - B$ $(n = 1, 2, \ldots)$ es de medida $m(B'_n) = 0$, luego también es de medida nula el conjunto $B' =$ cápsula invariante de $\sum_1^{\infty} B'_n$ respecto del grupo numerable generado por todos los $g \in G$ que intervienen en algún d_n. Basta poner $S = B - B'$.

Definición. Al conjunto S del lema 4, que en virtud del lema 3 (iii) está determinado salvo medida m nula, lo llamaremos *núcleo singular* del espacio (respecto del grupo G).

Observación: Si G es numerable, en particular cíclico, S puede tomarse estrictamente invariante. El significado del núcleo singular como acumulador de la no-equicontinuidad del grupo G, aparece claramente en el siguiente teorema 4 y corolarios, que son consecuencias inmediatas del lema 4 y de la demostración del teorema 2. Valen «salvo medida nula».

Teorema 4. *En $M - S$ es G equicontinuo. Dentro de S, G no es equicontinuo en ningún subconjunto invariante.*

Corolario 1. *Para que exista una medida m-invariante es necesario y suficiente que el núcleo singular tenga medida* $m(S)=\delta_0=0$.

Corolario 2. *En* $M-S$ *existe una medida m-invariante.*

Corolario 3. *Toda medida completamente aditiva e invariante* (¡no necesariamente m-invariante!), *definida en S, es idénticamente nula.*

Corolario 4. *Si* $G'\subset G$ *es un subgrupo de G de índice finito y S' es el núcleo singular correspondiente a G', es* $m(S-S')=m(S'-S)=0$. *En particular si G es cíclico,* $G=\{g^n\}$, $n=0, \pm1, \pm2, \ldots$, *todos los subgrupos de G tienen un mismo núcleo singular S.* [Más general: esto vale si G/G' es «equicontinuo»].

Reunimos en el siguiente teorema las propiedades patológicas del núcleo singular S.

Teorema 5. (i) *Todos los puntos* $x\in S$ *son no periódicos, es decir hay infinitos elementos distintos de la forma* xg, $g\in G$. (ii) *Existe una sucesión no decreciente de conjuntos* S^n *tales que* $\lim S^n=S$, *y para cada* S^n *existen infinitos* $S^n{}_k$ $(k=1,2,\ldots)$ *disjuntos dos a dos, cada uno* e. d. f. *con* S^n. (iii) *Para todo* $\varepsilon>0$, *existe* $E\subset S$, $m(S-E)<\varepsilon$, *e infinitos* $g_n\in G$ *tales que los conjuntos* Eg_n *son disjuntos dos a dos.* (iv) *Para todo* $\varepsilon>0$ *existe un conjunto* $E\subset S$ *e infinitos* $g_n\in G$ *tales que* $m(E)<\varepsilon$ *y* $m(Eg_n)\to m(S)$. (v) *Existe una partición* (salvo medida nula) *de S en infinitos conjuntos* disjuntos, $S=\sum_1^\infty S^n+S^0$, $m(S^0)=0$, *tales que cada* S^n *admite infinitos trasladados* $S^n g_k$ $(k=1,2,\ldots)$ *disjuntos dos a dos.* (vi) *Existe un continuo de particiones de S en infinitos conjuntos disjuntos* $S=\sum_1^\infty S^n$ *tales que cada* S^n *es* e. d. i. *con S.* (vii) *Si* $G=\{g^n\}$, $n=0, \pm1, \pm2, \ldots$ *es cíclico, existe una partición de S en infinitos conjuntos disjuntos* $S=\sum_1^\infty S^p$ *donde* S^p *es* e. d. i. *con S respecto del subgrupo* $G^p=\{g^{np}\}$, $n=0,\pm1,\pm2,\ldots$

Demostración. (i) y (ii) son consecuencias inmediatas del lema 3 (i). (iii) Sea S^n la sucesión de los conjuntos de (ii) y n_0 tal que poniendo $E_1=S^{n_0}$ sea $m(S-E_1)<\varepsilon/2$. Si $m^*(A)$ es la medida asociada (§ 2) que es invariante y finitamente aditiva, resulta de la definición de los S^n que $m^*(E_1)=0$, luego por la propiedad $m^*_5)$ existen infinitos $g_n \in G$ con $m(E_1 g_n) \rightarrow 0$. Por la aplicación del lema 2 se consigue un $E \subset E_1$ y una subsucesión g_{n_i} con $m(E_1-E) < \varepsilon : 2$, $m(S-E) < \varepsilon$, y los Eg_{n_i} disjuntos dos a dos. (iv) Si S^n es la sucesión de (ii) n_0 tal que $m(S-S^n) < \varepsilon$, poniendo $E=S-S^{n_0}$ será $m(E) < \varepsilon$ y como $m^*(S^{n_0})=0$, resulta $m^*(E)=m^*(S)=m(S)$, pues S es invariante salvo medida nula. Luego por $m^*_5)$ existen infinitos $g_n \in G$ con $m(Eg_n) \rightarrow m(S)$. (v) Poniendo $R'=S^1$, $R^n=S^n-S^{n-1}$, los razonamientos de (iv) prueban que para cada n existe un $E_n{}^1 \subset R^n$ con $m(R^n-E_n{}^1) < \varepsilon_1 : 2^n$ e infinitos $E_n{}^1 g_k$ $(k=1,2,\ldots)$ disjuntos dos a dos. Análogamente para cada n existe un $E_n{}^2 \subset R^n - E_n{}^1$ con $m(R^n-E_n{}^1-E_n{}^2) < \varepsilon_2 : 2^n$ y con infinitos $E_n{}^2 g_k$ disjuntos dos a dos. Siguiendo en esta forma y eligiendo $\varepsilon_k \rightarrow 0$, los $E_n{}^k$ proporcionan la descomposición deseada. (vi) Por definición de S, existen infinitos conjuntos S_1, S_2, ... contenidos en S, disjuntos dos a dos, cada uno e. d. i. con S. Si $\{n_k\}$ es una sucesión de números naturales que no contiene a todos los números naturales, el conjunto $S_0=S-\Sigma S n_k$ contiene por lo menos un S_i, e. d. i. con S, luego por el teorema de Cantor-Bernstein, en la forma que le dió Banach (ver Fund. Math. 6, 1924, pg. 236-239), es S_0 e. d. i. con S. De modo que para cada tal sucesión $\{n_k\}$ hay una partición $S=\Sigma S_n$ deseada, luego las hay un continuo. (vii) Daremos sólo un esbozo de demostración porque los detalles requieren un espacio que está en desproporción con la importancia de la propiedad. Sea E_1 e. d. i. respecto de G con S, $\{E_i{}^p\}$ una descomposición respecto de G^p. Se elige $\{n_p\}$, $p=1,2,\ldots$ suficientemente grande, $E_2, E_3 \in \{E_i{}^2\}$, $i \geqq n_2$, y se pone $E'_1=(E_1-\sum\limits_{\substack{i\geq np \\ p-1}}^{\infty} E_i{}^p)+\{$la imagen en E_2 de la parte restante de $E_1\}$ en reemplazo de E_1. Así E'_1, E_3 son conjuntos e. d i. con S respecto de G, G^2 y disjuntos. Luego se busca E_4, E_5, $E_6 \in \{E_i{}^3\}$, $i \geqq n_3$, y se hace aquí con E'_1, E_3 y E_4, E_5 respectivamente lo que primero con E_1 y E_2. Siguiendo de esta manera, E_1 (y lo mismo cada conjunto E_i que aparece) queda reemplazado por una suma de conjuntos e. d. i. con una parte de él, que por el lema 1 será todo E_1, salvo medida nula, con sólo tomar n_i suficientemente grande; y estas sumas son disjuntas dos a dos.

Corolario 1. *Existe una sucesión de conjuntos S^n conte-*

nidos en S *con* $\lim S^n = S$, *tales que toda medida finitamente aditiva, invariante, definida en* S, *se anula en* S^n, $n = 1, 2, \ldots$

Corolario 2. *Para que exista en* M *una medida m-invariante, es necesario y suficiente que para cada conjunto* E_0, $m(E_0) > 0$, *exista una medida* $\nu(E)$ *finitamente aditiva e invariante con* $\nu(E_0) > 0$. La necesidad es obvia; la suficiencia es consecuencia de (ii), poniendo $E_0 = S^n$ si $m(S^n) > 0$.

De (vi) se deduce inmediatamente la siguiente generalización para grupos G arbitrarios del teorema 1 de la memoria citada de E. Hopf, sobre la medida de compresibilidad: Si $\{A\}$ es el mínimo conjunto invariante que contiene a A, se define para todo $B \subset \{A\}$ la medida de compresibilidad $\mu_A(B)$ como el ínfimum de las sumas $\sum_1^\infty m(B_i g)$ para las posibles particiones $B = \sum_{i=1}^\infty B_i$ y los posibles $g_i \in G$ tales que $B_i g_i \subset A$. Para A fijo es $\mu_A(B)$ una medida invariante, completamente aditiva sobre la familia aditiva formada por los conjuntos de T contenidos en $\{A\}$. Por tanto de (vi) resulta:

Corolario 3. *Para todo* $A \subset S$ *es* $\mu_A(\{A\}) = 0$ o ∞.

§ 5. *El problema de E. Hopf.*

Diremos que $E \in T$ verifica la *propiedad* (h) (respectivamente (h^*)) si para ningún $g \in G$ es $Eg \subset E$, $Eg \neq E$ $(Eg \subset E,\ m(E-Eg) > 0)$; análogamente E *verifica* $(h_\infty)((h^*_\infty))$ si E no es e.d.i. con una parte $E_1 \subset E$, $E_1 \neq E$, $(E_1 \subset E,\ m(E-E_1) > 0)$. T verifica (h) etc., si lo verifica todo $E \in T$. E. Hopf probó (l. c.) que la condición (h^*) para T equivale, en el caso de G cíclico, a la no equivalencia por descomposición finita de M con una parte propia. Aunque el problema de Hopf fué resuelto por la negativa por Halmos, cabe considerarlo para cada T particular: ¿Es cierto que si T verifica (h^*) verifica también (h^*_∞)? Para grupos G no cíclicos el problema de Hopf se resuelve trivialmente por la negativa: sea M el conjunto de los números naturales, $m(A)$ una medida completamente aditiva definida para todo subconjunto $A \subset M$ no idénticamente nula, g_i la permutación de M que permuta i con $2i$ y deja invariantes los demás puntos, G=grupo generado por los g_i. Vamos pues a limitarnos al caso de G cíclico, $G = \{g^n\}$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, generado por una transformación g. En este caso la diferencia entre (h^*) y (h^*_∞) (para T) se advierte claramente, teniendo en cuenta que (h^*_∞) se expresa teorema 5 (iii) como la imposibilidad de la existencia de un conjunto de medida m positiva con *infinitos* congruentes disjuntos, mientras que (h^*) equivale a la imposibilidad de la existencia de un conjunto de medida m positiva con *todos* sus congruentes disjuntos dos a dos (en efecto, si $Eg \subset E$, $m(E-Eg)>0$, el conjunto $E-Eg$ tiene medida positiva y todos sus congruentes disjuntos dos a dos).

Observemos que si $M=\{x_i\}$ es numerable y $G=\{g^n\}$ cíclico, el problema de Hopf se resuelve por la afirmativa; en efecto, en este caso la clase aditiva T es atómica, es decir existe una sucesión de conjuntos disjuntos $\{A_k\}$ tal que todo $E \in T$ es unión de átomos A_k y por tanto $A_k g \in \{A_k\}$. Si hay un A_k de medida $m(A_k)>0$ tal que $A_k g^i \neq A_k g^j$ si $i \neq j$ (es decir A_k es no periódico) entonces no se verifica (h^*) y por consiguiente tampoco (h^*_∞); y si todo A_k de medida $m(A_k)>0$ es periódico, existe evidentemente una medida m-variante y se verifican ambas condiciones (h^*) y (h^*_∞). Como simple corolario de esta observación resulta el siguiente

Teorema 6. *Si T es una clase completa respecto de una medida finita $\mu(A)$ completamente aditiva e invariante respecto de $G=\{g^n\}$, y M es de potencia cardinal no-medible* (6), *el problema de Hopf tiene solución afirmativa. Demostración.* Sea $m=a+s$, $a=$ absolutamente continua respecto de μ, $s=$ singular. Si T no verifica (h^*_∞) es M e. d. i. con M', $m(M-M')>0$, $\mu(M-M')=0$, $a(M-M')=0$ y por tanto $s(M-M')>0$, y en virtud del teorema 3, no existe ninguna medida s-invariante. Por ser T completa respecto de μ y M de potencia cardinal no-medible, se sabe (B. Pettis, Duke M. J. 4, 1938, pg. 552-565) que s se reduce a su espectro numerable, es decir, existe un conjunto numerable de puntos $\{x_n\} \subset M$ con $s(x_n)>0$ y tal que s se anula en su complementario. Además es fácil ver que el espectro de s es invariante respecto de G. La observación que precede este teorema termina la demostración.

(6) T es completa respecto de μ, si μ está definida sobre T y si todo conjunto contenido en un conjunto de medida μ nula pertenece a T. Un número cardinal es no medible, si una medida completamente aditiva nula en los puntos, definida sobre todos los subconjuntos de un espacio de esta potencia, se anula idénticamente (ver S. Ulam, *Fund Math.* 16, 1930, pg. 140-150).

Sea Z el grupo de los números enteros y g la transformación que a n hace corresponder $g(n)=n+1$, y $G=\{g^n\}$ el grupo cíclico correspondiente

Definición. Diremos que $Y\subset Z$ es un conjunto (P) si cualquiera sea el entero p, $-\infty<p<+\infty$, el conjunto $Y\cup Yg^p\cup\ldots$ $Yg^{np}\cup\ldots$ $(n>0)$ tiene la propiedad (h) respecto de $G=\{g^n\}$. $Y\subset Z$ se dirá un *conjunto* (Q) (respectivamente (Q^p)) si Y es un conjunto (P) y si además Y es e. d. i. con Z respecto de $G=\{g^n\}$ (respectivamente $G^p=\{g^{pn}\}$) y respecto de los conjuntos (P), es decir si $Y=Y_1+Y_2+\ldots$, $Z=Z_1+Z_2+\ldots$, $Y_iY_j=Z_iZ_j=0$ para $i\neq j$, $Y_i=Z_ig^{n_i}$ $(Y^i=Z_ig^{pn_i})$, siendo cada Y_i un conjunto (P). La demostración del siguiente lema es fácil y la omitimos.

Lema 5. (i) *Las propiedades* (h), (P), (Q) *son invariantes respecto de* g. (ii) Y *tiene la propiedad* (P) *si y sólo si* $U^\infty_{n=1}$ $Yg^{np}\supset Y$ *para todo* p, $-\infty<p<-\infty$. (iii) *Si cada* Y_i *verifica* (P) *también lo verifica* U_iY_i. (iv) *Si* Y *verifica* (h) *también lo verifica el complementario de* Y.

Teorema 7. *El grupo* Z *de los números enteros posee las siguientes propiedades:*

(i) Z *admite un continuo de particiones en infinitos conjuntos disjuntos* $Z=U^\infty{}_{p=1}Y_p$, *donde* Y_p *es un conjunto* (Q^p).

(ii) *Existe un* $Y\subset Z$ *que es un conjunto* (P) *y tal que para cada entero* p, $-\infty<p<+\infty$, *existen infinitos* $n_i=n_i(p)$ *tales que los conjuntos* Yg^{pn_i} *son disjuntos dos a dos.*

(iii) *Para cada* p *existe una infinidad no numerable de conjuntos* (Q^p) *incongruentes dos a dos.*

(iv) *Para cada* p *existe un* Y *que es un conjunto* (Q^p) *y tal que designando con* I_N *al intervalo* $(-N,N)$, *se verifica, para* $N\rightarrow\infty$,

límite $\{$(*número de elementos del conjunto* $Y\cap I_N)\,.\,N^{-1}\}=0$.

Demostración. Según Halmos existe una T que verifica (h^*) y no (h^*_∞). Primeramente observemos que si T verifica (h^*), dada una sucesión de conjuntos $E_n\in T$, existe otra $E'^n\in T$ tal que $E'^n\subset E_n$, $m(E'_n)=m(E_n)$ y tal que todos los conjuntos $E'_{n,p}=E'^n\cup E'^ng^p\cup E'^ng^{2p}\cup\ldots$ $(n=1,2,\ldots,$ p entero arbitrario) verifican la propiedad (h); para ello basta evidentemente suprimir los conjuntos de medida nula que distinguen la propiedad (h') de la (h). Como para todo punto $x \in M$ no periódico la trayectoria $\{x_p\} = \{xg^p\}$ es isomorfa con el grupo Z, las definiciones de conjuntos (P) y (Q^p) se transportan obviamente a subconjuntos de una trayectoria. Entonces si $E \in T$ es tal que E y todo $E^p = E \cup Eg^p \cup Eg^{2p} \cup \ldots$ (p entero cualquiera) verifican (h), para todo punto $x \in E$ no periódico, $E \cap \{x_p\}$ es un conjunto (P). Luego, de la observación anterior y del hecho de que todo $x \in S$ es no periódico, se deduce que si T verifica (h^*), para todo $E \subset S$, $m(E) > 0$, existe un $E' \subset E$, $m(E') = m(E)$, tal que para todo todo punto $x \in E'$ es $E' \cap \{x_p\}$ un conjunto (P). De estas observaciones y de (iii), (vi), (vii) del teorema 5 resultan inmediatamente (i) y (ii) de la tesis. Para demostrar (iii) supongamos, por lo contrario, que los conjuntos (Q^p) forman una familia $\{Y_i\}$ numerable. Por (vii) del teorema 5 y por lo dicho más arriba, existe un conjunto $E \subset S$, $m(E) > 0$, tal que para todo $x \in E$ es $E \cap \{x_p\}$ un conjunto (Q^p). E queda descompuesto en una infinidad numerable de conjuntos, $E = \Sigma E_i$, $i = 1, 2, \ldots$, donde E_i está formado por aquellos puntos x de E para los cuales $E \cap \{x_p\}$ es congruente al conjunto Y_i; en otros términos, si x', x'', son dos puntos de un mismo E_i, sus trayectorias interceptan a E_i en conjuntos isomorfos a Y_i. Fijando un $x \in E_i$ y poniendo $E_r^{i(x)} = (E_i \cap \{x_p\})\, g^r$, por ser los $E_r^{i(x)}$ subconjuntos de una misma trayectoria isomorfa a Z, existe un sistema atómico $\{A_j^i(x)\}$ tal que cada $A_j^i(x)$ es una intersección de una infinidad numerable de conjuntos $E_r^{i(x)}$, cada $E_r^{i(x)}$ es unión de átomos $A_j^i(x)$, $A_j^i(x)\, g \in \{A_j^i(x)\}$, y dos átomos coinciden o son disjuntos. De lo observado más arriba respecto del isomorfismo de los conjuntos $E_i \cap \{x^p\}$ para i fijo y $x \in E_i$ variable, resulta que llamando $K_i = U_{p=-\infty}^{+\infty}(E_i g^p)$ y poniendo $E_r^i = E_i g^r$, existe un sistema atómico $\{A_j^i\}$, $A_j^i \subset K_i$, tal que cada A_j^i es una intersección de una infinidad numerable de conjuntos E_r^i, $A_j^i = K_i \cap Eg^{n_1} \cap Eg^{n_2} \cap \ldots$, $n_r = n_r(j)$, cada E_r^i es unión de átomos A_j^i, $A_j^i g \in \{A_j^i\}$, y dos átomos o coinciden o son disjuntos. Como E tiene infinitos conjuntos e. d. i. disjuntos y $E \cap \{x_p\}$ es un (Q), se deduce que para cada A_j^i son disjuntos dos a dos los congruentes $A_j^i g$, $A_j^i g^2$, ... Luego poniendo $H = Eg^{n_1} \cap Eg^{n_2} \cap \ldots$, $H \cap K_i = A_j^i$, se tendrá $Hg \subset H$, $A_j^i \subset H - Hg$, $H \in T$, lo que en virtud de la condición (h^*) de la hipótesis implica $m(A_j^i) = 0$, para todo átomo A_j^i. Luego $m(E_i) = 0$ y $m(E) = \Sigma m(E_i) = 0$, obteniéndose una contradicción, lo que prueba (iii). En cuanto a (iv), se obtiene fácilmente la tesis, combinando el corolario 1 del teorema 5 con propiedades conocidas del grupo medible Z. Con esto queda terminada la demostración del teorema 7.

Finalmente observemos que si $Y \subset Z$ es un conjunto (P), se deduce del lema 5, (ii), que toda progresión aritmética contiene ninguno o infinitos puntos de Y. Luego existe una función que a todo sistema finito $(i_1, \ldots, i_n)$ de números enteros (n arbitrario) hace corresponder un número entero $a(i_1, \ldots, i_n) > 0$ tal que Y contiene a todos los números de la forma $\{a(i_1)i_1 + a(i_1, i_2)i_2 + \ldots a(i_1, \ldots i_n)i_n\}$. Por lo tanto un conjunto (P) debe ser extraordinariamente abundante en puntos, y ya para $p > 2$ no hemos podido encontrar ejemplos de conjuntos (Q^p) (7). En una nota siguiente desarrollaremos el método de equicontinuidad aquí usado para obtener una caracterización de los operadores de Koopman y una simplificación de los teoremas de Dunford-Miller.

(7) En cambio se construye con toda facilidad un contínuo de conjuntos (P), no congruentes dos a dos, observando que la intersección de un arco de la circunferencia con la trayectoria de un punto respecto de una rotación irracional determina un conjunto (P).