TRANSFORMACION DE CONFIGURACIONES DEL CAMPO DE RADIACION.
APLICACION A LA RADIACION DE MULTIPOLOS.

por José A. Balseiro
Instituto de Física — La Plata

Summary: The problem of determining the photon distribution over the states of a quantized radiation field described by means of two systems of orthogonal vibrations both referred to the same radiation field is solved.

The formalism is applied in order to find the probabilities of a given configuration of the radiation emitted by electric and magnetic multipoles. Known expressions for angular intensity distribution are obtained.

§ 1. - *Introducción.* — En un trabajo anterior (¹) se ha planteado el problema de determinar la distribución de las configuraciones de fotones del campo de radiación descripto mediante un sistema de soluciones ortogonales $\vec{B}_s$ de las ecuaciones de campo, cuando inicialmente se tiene una distribución dada de fotones referidos a otro sistema de soluciones $\vec{A}_r$. El formalismo se refiere al caso en que el número y las frecuencias de los fotones asociados al campo se conservan.

El vector potencial del campo de radiación cuantificado referido a uno y a otro sistema de soluciones se expresa:

$$\vec{A} = \Sigma\, a_r \vec{A}_r + \text{conj. comp.} = \sum_s b_s \vec{B}_s + \text{conj. comp.} \tag{1.1}$$

en donde a_r y b_s son los operadores de amplitud. Los sistemas de funciones ortogonales $\vec{A}_r$ y $\vec{B}_s$ definen una transformación unitaria

$$\vec{A}_r = \sum_s c_{rs} \vec{B}_s + \text{conj. comp.} \tag{1.2}$$

(¹) J. A. Balseiro. *Phys.* Rev. *73,* 1346 (1948).

que transforma las amplitudes según:

$$b_s = \sum_r c_{rs} a_r \qquad a_r = \sum_s c^*_{rs} b_s. \tag{1.3}$$

Como es sabido, los operadores a_r, b_s son representables, respectivamente, mediante las variables canónicamente conjugadas p, q y P, Q en la forma:

$$a_r = \frac{1}{\sqrt{2h\nu}}(p_r - i2\pi\nu\, q_r) \quad a^*_r = \frac{1}{\sqrt{2h\nu}}(p_r + i2\pi\nu\, q_r) \tag{1.4}$$

$$b_s = \frac{1}{\sqrt{2h\nu}}(P_s - i2\pi\nu\, Q_s) \quad b^*_s = \frac{1}{\sqrt{2h\nu}}(P_s + i2\pi\nu\, Q_s). \tag{1.5}$$

Las expresiones (1.3), (14) y (1.5) establecen entre las variables p, q y P, Q una transformación canónica, la que a su vez, define una transformación entre las autofunciones del campo referidas a las representaciones (q) y (Q). Dada la autofunción $g_{n_1 n_2 \cdots}(q_1 q_2 \ldots)$ referida al primer sistema que define la configuración de n_1 fotones en el estado al cual se refiere q_1, etc. se ha demostrado en el trabajo citado que se transforma en la autofunción

$$\Delta_{n_1 n_2 \cdots}(Q_1 Q_2 \ldots) = \sum d^{n_1 n_2 \ldots}_{m_1 m_2 \ldots} \; g_{m_1 m_2 \cdots}(Q_1 Q_2 \ldots) \tag{1.6}$$

$$\text{con } \sum_i m_i = \sum_j n_j.$$

El cuadrado del módulo de los coeficientes $d^{n_1 n_2 \ldots}_{m_1 m_2 \ldots}$ dan la probabilidad de la configuración correspondiente a $m_1, m_2, \ldots$ fotones distribuídos sobre los estados definidos por $Q_1, Q_2, \ldots$. El problema se reduce, pues, a determinar estos coeficientes. En el trabajo citado se han dado expresiones formales para estos coeficientes y que, en general, no son simples de calcular. En el presente trabajo se obtienen expresiones algebraicas que permiten calcular en forma inmediata estos coeficientes en función de las amplitudes c_{rs}. En el caso de un solo fotón presente en el campo el cuadrado del módulo de estas amplitudes determinan directamente la probabilidad de la correspondiente distribución.

El problema se resuelve planteando la transformación $p, q \rightarrow P, Q$ de la siguiente manera:

Definimos las variables:

$$y_r = \frac{h}{2\pi} a^*_r \qquad z_r = -i\, a_r \tag{1.7}$$

$$Y_s = \frac{h}{2\pi} b^*_s \qquad Z_s = -i\, b_s \tag{1.8}$$

y, teniendo presente la regla de conmutación de los operadores de amplitud se obtiene:

$$y_r z_{r'} - z_{r'} y_r = -i \frac{h}{2\pi} \delta_{rr'}; \quad Y_s Z_{s'} - Z_{s'} Y_s = -i \frac{h}{2\pi} \delta_{ss'}. \tag{1.9}$$

En esta forma, las variables y, z e Y, Z son canónicamente conjugadas. Además, teniendo presente la (1.3) se tiene las transformaciones

$$Z_s = \sum_r c_{rs} z_r \qquad z_r = \sum_s c^*_{rs} Z_s. \tag{1.10}$$

La transformación canónica $p, q \longrightarrow P, Q$ puede, en esta forma, enunciarse como el producto de:

a) la transformación canónica $p, q \longrightarrow y, z$
b) la transformación de coordenadas $y \longrightarrow Y$; $z \longrightarrow Z$
c) la transformación canónica $Y, Z \longrightarrow P, Q$.

En la parte II se emplea el formalismo para determinar la distribución de fotones en ondas multipolares eléctricas y magnéticas, lo que permite calcular la probabilidad que un fotón sea emitido por un multipolo según una dirección determinada.

§ 2. — *Transformación* $p, q \longrightarrow y, z$. Las expresiones (1.4) y (1.7) definen la transformación canónica:

$$\begin{aligned} p_r &= i\sqrt{2h\nu_r}\, z_r - i\, 2\pi\nu_r\, q_r = \frac{\partial W_1}{\partial q_r} \\ y_r &= i \frac{h}{2\pi} z_r - i\sqrt{2h\nu_r}\, q_r = -\frac{\partial W_1}{\partial z_r} \end{aligned} \tag{2.1}$$

en donde $W_1(q,z)$ es la función generatriz de la transformación que consideramos.

El núcleo de la transformación resulta:

$$S_1(\xi,z) = e^{-\frac{2\pi i}{h} W_1(\xi,z)} = e^{\Sigma_i \left[-\frac{1}{2}\xi_i^2 - \frac{1}{2} z_i^2 + \sqrt{2}\,\xi_i z_i\right]} \qquad (2.2)$$

$$\text{con } \xi_i = 2\pi \sqrt{\frac{v_i}{h}}\, q_i.$$

En la representación p, q las autofunciones del campo son las funciones de Hermite:

$$g_{n_1 n_2 \dots}(\xi_1 \xi_2 \dots) = e^{-\frac{1}{2}\xi_1^2} H_{n_1}(\xi_1)\, e^{-\frac{1}{2}\xi_2^2} H\, \mathrm{H}_{n_2}(\xi_2) \dots$$

La transformación de estas funciones mediante el núcleo (2.2) se obtiene teniendo presente el desarrollo en funciones de Hermite normalizadas

$$e^{-\frac{1}{2}\xi^2 - \frac{1}{2}X^2 + 2\xi X} = \sum_{v=0}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\xi^2} H_v(\xi) \sqrt{\frac{2^v}{v!}}\, x^v$$

que permite obtener, siendo $x = \sqrt{\frac{1}{2}}\, z$:

$$f_{n_1 n_2 \dots}(z_1 z_2 \dots) = \int_{-\infty}^{\infty} S_1(\xi_1 \xi_2 \dots z_1 z_2 \dots)\, g_{n_1 n_2 \dots}(\xi_1 \xi_2 \dots)\, d\xi_1 d\xi_2 \dots = \frac{z_1^{n_1}}{\sqrt{n_1!}} \frac{z_2^{n_2}}{\sqrt{n_2!}} \dots \qquad (2.3)$$

La transformación $p, q \rightarrow y, z$, debido al carácter no hermitiano de las variables, y, z no es unitaria siendo $S_1^{-1} \neq S_1^*$. Por esta razón la transformación de las funciones ortogonales $g_{n_1 n_2 \dots}$ no produce funciones ortogonales. No es posible, por este motivo, atribuirles a las funciones $f_{n_1 n_2 \dots}$ el carácter de autofunciones del campo [2]. Esto hace que la inversión de la integral

(2) Estas funciones son designadas "Funciones Generatrices" por H. W. PENG, Proc. Roy. Irish Acad. *51*, A Nº 8, 113 (1947). Según una cita de Peng han sido introducidas en la descripción del campo de radiación por P. A. M. DIRAC, *Quantum electrodynamics*. Comunications of the Dublin Institute for Advanced Studies A, Nº 1.

(2. 3) correspondiente a la transformación p, q no sea trivial. Hallado el núcleo S_1^{-1} de esta última transformación y puesto que z es compleja, será necesario determinar el camino de integración en el plano z de modo que se obtengan las funciones g como transformadas de las f. Resulta ser:

$$S_1^{-1}(z,\xi)=e^{\Sigma_i\left[\frac{1}{2}\xi_i^2+\frac{1}{2}z_i^2-\sqrt{2}\,z_i\xi_i\right]} \,. \qquad (2.4)$$

Utilizando la integral:

$$e^{-\frac{\xi^2}{2}}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-s^2+2is\xi}\,ds$$

y la definición de $H_n(\xi)$ mediante la derivada de orden n de $e^{-\frac{1}{2}\xi^2}$ se obtiene:

$$g_{n_1n_2\ldots}(\xi_1\,\xi_2\ldots)=\int_{-i\infty}^{i\infty}S'^{-1}_1(z,\xi)\,f_{n_1n_2\ldots}(z_1\,z_2\ldots)\,dz_1\,dz_2\ldots. \qquad (2.5)$$

§ 3. — *Transformaciones* $z\rightarrow Z$; $Y,Z\rightarrow P,Q$. La transformación de coordenadas $z\rightarrow Z$, definida por la (1. 10) permite transformar en forma inmediata las funciones $f_{n_1n_2\ldots}(z_1\,z_2\ldots)$ en las correspondientes a la representación Z. En efecto, se tiene:

$$f_{n_1n_2\ldots}(z_1\,z_2\ldots)=\frac{z_1^{n_1}}{\sqrt{n_1!}}\,\frac{z_2^{n_2}}{\sqrt{n_2!}}\ldots=\Sigma\,\frac{(c^*_{1s_1}Z_{s_1})^{n_1}}{\sqrt{n_1!}}\,\frac{(c^*_{2s_2}Z_{s_2})^{n_2}}{\sqrt{n_2!}}\ldots$$

$$=\sum_{m_1m_2\ldots}\delta^{n_1n_2\ldots}_{m_1m_2\ldots}\,\frac{Z_1^{m_1}}{\sqrt{m_1!}}\,\frac{Z_2^{m_2}}{\sqrt{m_2!}}\ldots=\sum_{m_1m_2\ldots}\delta^{n_1n_2\ldots}_{m_1m_2\ldots}\,f_{n_1n_2\ldots}(Z_1\,Z_2\ldots) \qquad (3.1)$$

$$\text{con}\quad \Sigma\, m_i=\Sigma n_j=N.$$

Nos interesa dar una representación adecuada de los coeficientes $\delta^{n_1n_2\ldots}_{m_1m_2\ldots}$ de este desarrollo. Se tiene que:

$$\delta^{n_1n_2\ldots}_{m_1m_2\ldots}=\frac{1}{(2\pi i)^N}\sqrt{\frac{m_1!\,m_2!\ldots}{n_1!\,n_2!\ldots}}\oint\ldots$$

$$\oint\frac{z_1^{n_1}\,z_2^{n_2}\ldots}{Z_1^{m_1+1}\,Z_2^{m_2+1}\ldots}\,dZ_1\,dZ_2\ldots \qquad (3.2)$$

Observamos ahora, que si formamos el desarrollo:

$$\frac{Z_1^{m_1}}{\sqrt{m_1!}}\,\frac{Z_2^{m_2}}{\sqrt{m_2!}}\cdots=\sum_{n_1 n_2\ldots}\delta^{m_1 m_2\ldots}_{n_1 n_2\ldots}\,\frac{z_1^{n_1}}{\sqrt{n_1!}}\cdot\frac{z_2^{n_2}}{\sqrt{n_2!}}\cdots$$

$$\text{con } \Sigma n_j=\Sigma m_i=N$$

resulta:

$$\delta^{m_1 m_2\ldots}_{n_1 n_2\ldots}=\delta^{*\,n_1 n_2\ldots}_{m_1 m_2\ldots}=\frac{1}{(2\pi i)^N}\sqrt{\frac{n_1!\,n_2!\ldots}{m_1!\,m_2!\ldots}}\oint\cdots$$

$$\oint\frac{Z_1^{m_1}Z_2^{m_2}\ldots}{z_1^{n_1+1}\,z_2^{n_2+1}\ldots}\,dz_1\,dz_2\ldots \qquad (3.3)$$

La transformación canónica $Y,Z \longrightarrow P,Q$ es la inversa de $P,Q \longrightarrow Y,Z$ análoga a la tratada en el § 2, puesto que en la representación $P.Q$ las autofunciones del campo son:

$$g_{n_1 n_2\ldots}(X_1 X_2\ldots)=e^{-\frac{1}{2}X_1^2}\,H_{n_1}(X_1)\,e^{-\frac{1}{2}X_2^2}\,H_{n_2}(X_2)\ldots \qquad (3.4)$$

$$\text{con } X_j=2\pi\sqrt{\frac{v_i}{h}}\,Q.$$

§ 4.—*Transformación de configuraciones.* Puesto que las funciones $f_{n_1 n_2\ldots}$ no pueden considerarse como autofunciones del campo, no podemos a priori interpretar al cuadrado del módulo de los coeficientes $\delta^{n_1 n_2\ldots}_{m_1 m_2\ldots}$ de (3.1) como la probabilidad de la correspondiente configuración. Demostraremos, sin embargo, que estos coeficientes son los mismos que los del desarrollo (1.6), para los cuales vale la mencionada interpretación.

Sea $S(q,Q)$ el núcleo de la transformación $p,q \longrightarrow P,Q$. Se tiene:

$$\int_{-\infty}^{\infty} S(q,Q)\,g_{n_1 n_2\ldots}(q)\,dq=\Delta_{n_1 n_2\ldots}(Q). \qquad (4.1)$$

Si $S_2(Z,Q)$ es el núcleo de la transformación $Y,Z \longrightarrow P,Q$

análogo al dado por (2. 4), teniendo presente las expresiones (2, 3) y (3. 1) se obtiene:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-i\infty}^{i\infty} S_1(q,z)\, S_2(Z,Q)\, g_{n_1 n_2 \cdots}(q)\, dq\, dZ =$$

$$\int_{-i\infty}^{i\infty} S_2(Z,Q)\, f_{n_1 n_2 \cdots}(z)\, dZ = \Delta_{n_1 n_2 \cdots}(Q). \qquad (4.2)$$

Comparando esta última con la (4. 1) se obtiene la relación:

$$\int_{-i\infty}^{i\infty} S_1(q,z)\, S_2(Z,Q)\, dZ = S(q,Q). \qquad (4.3)$$

Por otra parte, la (3. 1) puede darse en la forma:

$$\int_{-\infty}^{\infty} S_1(q,z)\, g_{n_1 n_2 \cdots}(q)\, dq = \sum_m \delta^{n_1 n_2 \ldots}_{m_1 m_2 \ldots} \int_{-\infty}^{\infty} S_2^{-1}(Z,Q)\, g_{n_1 n_2 \cdots}(Q)\, dQ.$$

Multiplicando por $S_2(Z, Q')$, integrando respecto a Z y observando que:

$$\int_{-i\infty}^{i\infty} S_2(Z,Q')\, S_2^{-1}(Z,Q)\, dZ = \delta\,(Q - Q')$$

llegamos, teniendo presente la (4. 3) y llamando nuevamente Q a Q':

$$\Delta_{n_1 n_2 \cdots}(Q_1 Q_2 \ldots) = \sum_m \delta^{n_1 n_2 \ldots}_{m_1 m_2 \ldots}\, g_{m_1 m_2 \cdots}(Q_1 Q_2 \ldots)$$

Los coeficientes $\delta^{n_1 n_2 \ldots}_{m_1 m_2 \ldots}$ son pues los coeficientes $d^{n_1 n_2 \ldots}_{m_1 m_2 \ldots}$ de (1. 6).

Si tenemos presente las (3. 2) y (3. 3) obtenemos para la probabilidad de la configuración m_1, m_2, ... asociados a las ondas $\vec{B}_1$, $\vec{B}_2$, ... la expresión:

$$W^{n_1 n_2 \ldots}_{m_1 m_2 \ldots} = \delta^{n_1 n_2 \ldots}_{m_1 m_2 \ldots} \, \delta^{*\, n_1 n_2 \ldots}_{m_1 m_2 \ldots} =$$

$$\frac{1}{(2\pi i)^{2N}} \oint \frac{z_1^{n_1} z_2^{n_2} \ldots}{Z_1^{m_1+1} Z_2^{m_2+1} \ldots} dZ_1 \, dZ_2 \ldots$$

$$\oint \frac{Z_1^{m_1} Z_2^{m_2} \ldots}{z_1^{n_1+1} z_2^{n_2+1} \ldots} dz_1 \, dz_2 \ldots \qquad (4.4)$$

De (3.1) se sigue que $C^*_{st} C_{st}$ da directamente la probabilidad, en el caso de un solo fotón presente en el campo, de observar este fotón en el estado t si inicialmente está referido al estado s.

Debe cumplirse, naturalmente, que $\sum_m W^{n_1 n_2 \ldots}_{m_1 m_2 \ldots} = 1$, lo que resulta en forma inmediata de (3.1) y (3.3):

$$1 = \sum_m \delta^{n_1 n_2 \ldots}_{m_1 m_2 \ldots} \frac{1}{(2\pi i)^N} \sqrt{\frac{n_1! \, n_2! \ldots}{m_1! \, m_2! \ldots}} \oint$$

$$\frac{Z_1^{m_1} Z_2^{m_2} \ldots}{z_1^{n_1+1} z_2^{n_2+1} \ldots} dz_1 \, dz_2 \ldots = \sum_m \delta^{n_1 n_2 \ldots}_{m_1 m_2 \ldots} \, \delta^{*\, n_1 n_2 \ldots}_{m_1 m_2 \ldots} \qquad (4.5)$$

La representación (3.2) de los coeficientes $\delta^{n \ldots}_{m \ldots}$ permite determinar el valor medio del número de fotones asociados al estado t, resultando:

$$\overline{m}_t = \sum_r n_r \, (C^*_{rt} \, C_{rt}) \qquad (4.6)$$

Igualmente, es calculable la dispersión media cuadrática del valor medio (3), obteniéndose:

$$\sigma_t^2 = \overline{m}_t + (\overline{m}_t)^2 - \sum_r n_r \, (n_r+1) \, (C^*_{rt} C_{rt})^2. \qquad (4.7)$$

(3) La discusión de esta expresión y los desarrollos correspondientes serán publicados próximamente.

PARTE II

Distribución de configuraciones en la radiación de multipolos.

5. — *Generalidades*. Hemos visto que en el caso de un solo fotón presente en el campo de radiación los coeficientes δn_m coinciden con los C_{rs} de (1. 2). Si en un caso determinado se conocen estos coeficientes se podrá atribuir en el proceso de emisión de un fotón cierta expresión a la onda emitida si la excitación está dada en un sistema ortonormal $\vec{A}_r$. Recíprocamente, si se conoce la expresión de la onda emitida $\vec{B}_s$ se podrá determinar la probabilidad de la excitación de una de las $\vec{A}_r$ mediante las cuales es expresable $\vec{B}_s$. Nos referimos a este último caso, siendo $\vec{B}_s$ una onda multipolar (eléctrica o magnética) y $\vec{A}_r$ ondas planas.

El campo de radiación puede ser expresado desarrollando las funciones de campo en ondas esféricas, cada una de las cuales satisface las ecuaciones de Maxwell. Estas soluciones (eléctricas y magnéticas) están caracterizadas por los números enteros l y m. El primero caracteriza a la onda emitida por un multipolo (eléctrico o magnético) de orden 2^l. Los diferentes valores de m corresponden a las distintas posibles orientaciones del polo 2^l en el espacio. Si, en particular, se tiene solamente la radiación de un multipolo de orden 2^l las restantes ondas esféricas deben considerarse vacías.

El campo de radiación que consideramos, puede también obtenerse expresado en ondas planas, cada una de las cuales está caracterizada por el vector de propagación $\vec{k}$, la frecuencia $\nu = \frac{c}{2\pi}|k|$ y el vector de polarización $\vec{e}$. Si se establece que una de estas ondas planas está excitada y las restantes vacías, se puede resolver el problema de determinar la probabilidad de la excitación de una onda multipolar dada. Recíprocamente, puede plantearse el problema de determinar la distribución de un fotón, que inicialmente está asociado a una onda multipolar, sobre las ondas planas mediante las cuales aquélla es expresable. Esto último equivale a determinar la probabilidad que un fotón es emitido por un multipolo en cierta dirección dada por $\vec{k}$. Ambos problemas son equivalentes y se resuelven (§ 4) hallando los coeficientes de la transformación unitaria onda plana-ondas esféricas y recíprocamente, onda esférica-ondas planas.

Se tendrá en general:

$$\vec{A} = \sum_l \sum_{m=-l}^{+l} a_l^m \vec{A}_l^m = \int \overline{b}(k, u, v) \vec{e}\,(u, v)\, e^{i(\vec{k}\vec{r})}\, k^2\, dk \operatorname{sen} u\, du\, dv. \quad (5.1)$$

Una onda plana será expresable

$$b(k\, u\, v)\, \vec{e}\, e^{i(\vec{k}\vec{r})} = \sum_l \sum_{m=-l}^{+l} C_l^m\, (k\, u\, v)\; A_l^m\, (r, \vartheta, \varphi) \quad (5.2)$$

O bien, cada solución esférica:

$$A_l^m\, (r\, \vartheta\, \varphi) = \int C^*{}_l^m\, (k\, u\, v)\, \vec{e}\, (u\, v)\, e^{i\vec{k}r}\, k^2\, dk \operatorname{sen} u\, du\, dv \quad (5.3)$$

siendo k, u y v las coordenadas polares del vector $\vec{k}$.

En (5.2), $|C_l^m\,(k\, u\, v)|$ da la probabilidad que el fotón asociado a la onda plana definida por k, u y v esté asociado a la onda esférica A_l^m. En (5.3) el mismo valor define la probabilidad que un fotón emitido por un multipolo l, m sea emitido en un ángulo sólido $dw = \operatorname{sen} u\, du\, dv$. Si, por otra parte, supomenos que la radiación emitida es monocromática, la (5.3) se convierte en:

$$A_l^m\, (r\, \vartheta\, \varphi) = \int C^*{}_l^m(u, v)\, \vec{e}\, (u\, v)\, e^{i\vec{k}r}\, dw \quad (5.4)$$

y tendremos, así, definida la probabilidad que el fotón sea emitido según la dirección dada por u y v.

§ 6. — *Soluciones esféricas expresadas en ondas planas.* Sean r, ϑ, φ las coordenadas polares de un lugar del espacio y k, u, v las coordenadas polares del vector de propagación $\vec{k}$. ϑ y u forman dos lados de un triángulo esférico cuyo tercer lado α cumple:

$$\cos\alpha = \cos\vartheta \cos u + \operatorname{sen}\vartheta \operatorname{sen} u \cos(\varphi - v). \qquad (6.1)$$

Teniendo en cuenta la fórmula de Rayleigh:

$$e^{ik.r\cos\alpha} = \Sigma\, i^l (2l+1) \sqrt{\frac{\pi}{2kr}}\, J_{l+1/2}(kr)\, P_l(\cos\alpha)$$

la (6.1) y el teorema de adición de las funciones esféricas se llega:

$$e^{i(\vec{kr})} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{+l} 4\pi\, i^l \sqrt{\frac{\pi}{2kr}}$$

$$J_{l+1/2}(kr)\, P_l^m(\cos\vartheta) \frac{e^{im\varphi}}{\sqrt{2\pi}} P_l^m(\cos u) \frac{e^{-imv}}{\sqrt{2\pi}} \qquad (6.2)$$

en donde P_l^m son las funciones esféricas P_l^m normalizadas.

La anterior permite escribir, teniendo en cuenta la ortogonalidad de las funciones $Y^*{}_l^m(u\,v) = P_l^m(\cos u)\, \dfrac{e^{-imv}}{\sqrt{2\pi}}$:

$$\frac{i^{l+2}}{4\pi} \int Y_l^m(u\,v)\, e^{i(kr)} \operatorname{sen} u\, du\, dv = \chi_l(kr)\, Y_l^m(u\,v) \qquad (6.3)$$

siendo:

$$\chi_l(kr) = \sqrt{\frac{\pi}{2kr}} J_{l+1/2}(kr)$$

Recordando que en el campo de radiación $\vec{A} = \dfrac{i}{k}\vec{E}$, siendo $\vec{E}$ el vector eléctrico del campo se tiene:

$$(A_z)_l^m = \frac{i}{k}[(E_r)_l^m \cos\vartheta - (E_\vartheta)_l^m \operatorname{sen}\vartheta].$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(A_x \pm iA_y)_l^m =$$

$$\frac{i}{\sqrt{2k}}[(E_r)_l^m \operatorname{sen}\vartheta + (E_\vartheta)_l^m \cos\vartheta \pm i\,(E_\varphi)_l^m]\, e^{\pm i\varphi}$$

en donde $(E_r)_l^m$, $(E\ \ )_l^m$, $(E_\varphi)_l^m$ son las componentes del campo eléctrico de una onda multipolar eléctrica en coordenadas esféricas dadas por Debye (4). De aquí se obtienen las expresiones (5):

$$(A_z)_l^m = \beta \left\{ \left(\frac{l(l+m+1)(l-m+1)}{(l+1)(2l+1)(2l+3)} \right)^{1/2} X_{l+1}(kr)\, Y_{l+1}^m(\vartheta, \varphi) + \left[\frac{(l+1)(l+m)(l-m)}{l(2l-1)(2l+1)} \right]^{1/2} X_{l-1}(kr)\, Y_{l-1}^m(\vartheta, \varphi) \right\}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(A_x + iA_y)_l^m = \beta \left\{ \left[\frac{l(l+m+2)(l+m+1)}{2(l+1)(2l+1)(2l+3)} \right]^{1/2} X_{l+1}(kr)\, Y_{l+1}^{m+1}(\vartheta, \varphi) - \left[\frac{(l+1)(l-m)(l-m-1)}{2l(2l-1)(2l+1)} \right]^{1/2} X_{l-1}(kr)\, Y_{l-1}^{m+1}(\vartheta, \varphi) \right\}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(A_x - iA_y)_l^m = -\beta \left\{ \left[\frac{l(l-m+2)(l-m+1)}{2(l+1)(2l+1)(2l+3)} \right]^{1/2} X_{l+1}(kr)\, Y_{l+1}^{m+1}(\vartheta, \varphi) + \left[\frac{(l+1)(l+m)(l+m-1)}{2l(2l-1)(2l+1)} \right]^{1/2} X_{l-1}(kr)\, Y_{l-1}^{m-1}(\vartheta, \varphi) \right\} \tag{6.4}$$

donde β es un factor numérico independiente de l y m.

Estas expresiones del vector potencial resultan combinaciones lineales de las (6.2). Se puede, así, expresar:

$$\vec{A}_l^m = \int \vec{R}_l^m(u, v)\, e^{i\vec{k}r}\, dw = \int |R_l^m(u\,v)|\, \vec{e}\,(u, v)\, e^{i(\vec{k}r)}\, dw \tag{6.5}$$

la que en relación con la (5.3) nos da:

$$C_l^m(u, v) = |R_l^m(u, v)|$$

---

(4) Ver p. e. M. Born, Optik (Julius Springer, Berlin, 1933) p. 278.

(5) Se emplean algunas relaciones de recurrencia entre funciones esféricas que figuran en el artículo de H. Bethe, *Handb, der Phys.* T. 24.1 Berlín, 1933, § 65.

y siendo:

$$(R_z)_l{}^m = i^l \left\{ \left[\frac{l(l+m+1)(l-m+1)}{(l+1)(2l+1)(2l+3)} \right]^{1/2} Y_{l+1}^{m}(u,v) - \right.$$

$$\left. \left[\frac{(l+1)(l+m)(l-m)}{l(2l-1)(2l+1)} \right]^{1/2} Y_{l-1}^{m}(u,v) \right\}$$

$$(R_{x+iy})_l{}^m = i^l \left\{ \left[\frac{l(l+m+2)(l+m+1)}{2(l+1)(2l+1)(2l+3)} \right]^{1/2} Y_{l+1}^{m+1}(u,v) + \right.$$

$$\left. \left[\frac{(l+1)(l-m)(l-m-1)}{2l(2l-1)(2l+1)} \right]^{1/2} Y_{l-1}^{m+1}(u,v) \right. \qquad (6.6)$$

$$(R_{x-iy})_l{}^m = i^l \left\{ - \left[\frac{l(l-m+2)(l-m+1)}{2(l+1)(2l+1)(2l+3)} \right]^{1/2} Y_{l+1}^{m-1}(u,v) - \right.$$

$$\left. \left[\frac{(l+1)(l+m)(l+m-1)}{2(2l-1)(2l+1)} \right]^{1/2} Y_{l-1}^{m-1}(u,v) \right\}$$

En forma análoga, empleando las soluciones esféricas magnéticas se llega:

$$(A_z)_l{}^m = \beta \frac{m}{\sqrt{l(l+1)}} X_l \,.\, Y_l{}^m(u,v) \qquad (6.7)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (A_x + iA_y)_l{}^m = \beta \left(\frac{(l+m+1)(l-m)}{2l(l+1)} \right)^{1/2} X_l(kr)\, Y_l{}^{m+1}(\vartheta, \varphi)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (A_x - iA_y)_l{}^m = \beta \left(\frac{(l-m+1)(l+m)}{2l(l+1)} \right)^{1/2} X_l(kr)\, Y_l{}^{m-1}(\vartheta, \varphi)$$

con los correspondientes coeficientes:

$$(R_z)_l{}^m = i^{l-1} \frac{i^{l-1} m}{\sqrt{l(l+1)}} Y_l{}^m(u,v)$$

$$(R_{x+iy})_l{}^m = i^{l-1} \left(\frac{(l+m+1)(l-m)}{2l(l+1)} \right)^{1/2} Y_l{}^{m+1}(u,v) \qquad (6.8)$$

$$(R_{x-iy})_l{}^m = i^{l-1} \left(\frac{(l-m+1)(l+m)}{2l(l+1)} \right)^{1/2} Y_l{}^{m-1}(u,v).$$

§ 7. — *Probabilidad de las distribuciones de un fotón multipolar.* Mediante la (6.5) podemos construir la (5.1) y de ello obtenemos:

$$\sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^{+l} a_l^m \,|\vec{R}_l^m (u, v)| = b\,(u, v). \tag{7.1}$$

Puede demostrarse que la (6.6), así como la (6.7) forman un sistema completo de funciones ortogonales normalizadas. Se obtiene así la expresión correspondiente a la (1.3)

$$a_l^m = \int |\vec{R}_l^m (u, v)\, b(u, v)\, dw \tag{7.2}$$

Según se ha demostrado en el § 4, la (7,2) nos permite calcular la probabilidad que un multipolo de orden 2^l, con una orientación dada por m, emita un fotón en la dirección dada por u, v mediante:

$$|C_l^m (u, v)|^2 = (\vec{R}^*{}_l^m (u, v) \,.\, \vec{R}_l^m (u, v)).$$

Para dipolos $l = 1$ se obtiene:

$$m = 0 \qquad |C_1^0|^2 = \frac{3}{4} \operatorname{sen}^2 u. \tag{7.3}$$

$$m = \pm 1 \quad |C_1^{\pm 1}|^2 = \frac{3}{8} (1 + \cos^2 u).$$

Para cuadrupolos $l = 2$:

$$m = 0 \quad |C_2^0|^2 = \frac{15}{16} \operatorname{sen}^2 2\,u$$

$$m = \pm 1 \quad |C_2^{\pm 1}|^2 = \frac{5}{8} (\cos^2 u + \cos^2 2u) \tag{7.4}$$

$$m = \pm 2 \quad |C_2^{\pm 2}|^2 = \frac{5}{8} \left(\operatorname{sen}^2 u + \frac{1}{4} \operatorname{sen}^2 2u\right).$$

Para un número n de fotones emitidos por el multipolo l, m el valor medio observable en la dirección u, v está dado, según (4.6) por $n|\vec{R}_l^m(u,v)|^2$. Las fluctuaciones quedan determinadas según la (4.7) por $n|\vec{R}_l^m|^2(1-|\vec{R}_l^m|^2)$. Puesto que la intensidad de la radiación es proporcional al número de fotones asociados, la expresión obtenida para el valor medio debe ser proporcional a la intensidad de la radiación. En efecto: las (7.3) dan una distribución angular de la intensidad de la radiación que coincide con la conocida para dipolos. Las (7.4) coinciden, también con las expresiones dadas por Rubinowcz (6).

Con placer agradezco al Prof. G. Beck algunas discusiones referentes a este trabajo.

(Recibido el 15 de marzo de 1949).

(6) A. Rubinowicz, Zeits. für Phys. *61*, 338 (1930).