REFRACCION ATMOSFERICA

por José Würschmidt

Instituto de Física, Universidad Nacional de Tucumán

(Recibido el 17-11-1949)

Summary: 1º A comparison is given between the tables of atmospheric refraction, obtained in work on astronomy and geodesy in different countries, and differences existing between them are noted.

2º The introduction of a "standard atmosphere" is proposed for a new numerical computation, which permits an exact calculation of the density of the air at any level above sea.

3º A method of computation is applied to the refraction in the case of a plane surface and, in the case of the earth'surface, a method of successive approximations for each zenith distance.

I. — GENERALIDADES, BIBLIOGRAFIA, TABLAS DE REFRACCION

a) *Superficie plana, condiciones normales de presión y temperatura.*

Prescindiendo de la curvatura de la superficie terrestre, y por lo tanto considerando constante el índice de refracción del aire en un plano horizontal de la altura y sobre el nivel del mar, un rayo solar que tiene en una altura muy grande (índice de refracción prácticamente igual a cero) una distancia zenital α, llegará al nivel del mar con una distancia zenital menor α_0, por el efecto de la refracción atmosférica. Mediante el método de las capas paralelas (1), cuya más baja tiene el índice de refracción n, se obtiene fácilmente:

$$(1) \qquad \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{sen} \alpha_0} = n,$$

o con la densidad del aire en el nivel del mar ρ_0, y la ley empírica de *Maskart* para gases que relaciona n con la densidad ρ ([2]):

(1 a) $$\operatorname{sen} \alpha = [1 + C\,\rho_0] \operatorname{sen} \alpha_0.$$

El ángulo de refracción o la «refracción» será entonces:

(2) $$\gamma = \alpha - \alpha_0.$$

Se deduce fácilmente la siguiente fórmula de aproximación:

(3) $$\gamma = C\,\rho_0 \operatorname{tg} \alpha_0 = (n-1) \operatorname{tg} \alpha_0,$$

o expresando γ en segundos de arco:

(3 a) $$\gamma = 206265\, C\,\rho_0 \operatorname{tg} \alpha_0.$$

Ahora bien, mientras que para la densidad del aire a 0° y 760 mm de Hg se toma comúnmente el valor $\rho_0 = 1{,}2930$ kg/m³ (usaremos el sistema MKS, ya usado desde hace tiempo en Meteorología ([3])), encontramos en la bibliografía valores ligeramente variables para el índice de refracción del aire bajo condiciones normales de temperatura y presión, a saber:

en las tablas de Landolt-Börnstein ([4]):	entre	1,0002933	y	1,0002925
en Handbuch der Physik ([5])	»	1.00029315	»	1,00029130.

En consecuencia se hallan semejantes variaciones en los valores numéricos de la magnitud $206265\, C\,\rho_0$, llamada «constante de refracción» que es el valor de la refracción para el ángulo $\alpha_0 = 45°$; oscilan entre 60,058″ y 60,50″. Dos autores, *Faye* ([6]) y *Connaissance des temps* ([7]) citan como valor más seguro: 60,154″ que prácticamente coincide con el valor 60,153″, citado en *Handbuch* como término medio de todos los valores astronómicos más nuevos.

Con este valor para la constante de refracción, el índice de refracción del aire a 0° y 760 mm de Hg será: $n_0 = 1{,}0002916$ y la refracción $\gamma = \alpha - \alpha_0$ para la distancia zenital α_0 se calcula mediante:

(1 aa) $$\operatorname{sen} \alpha = 1{,}0002916 \operatorname{sen} \alpha_0;$$

o:

(1 b) $$\lg \operatorname{sen} \alpha = \lg \operatorname{sen} \alpha_0 + 0{,}0001266.$$

La fórmula de aproximación es:

$$\lg \gamma = \lg \operatorname{tg} \alpha_0 + 1{,}77922. \tag{3 a}$$

En la tabla I damos los valores de γ, calculados mediante (1 b) y (3 a) hasta $\alpha_0 = 75^o$; para la comparación agregamos los valores de *Faye*.

TABLA I

ANGULOS DE REFRACCIÓN

(0° C, 760 mm de Hg; superf. plana)

Dist. zen.	*valor exacto*	*valor aprox.*	*valor de Faye*
5°	5,3''	5,3''	5,2''
10°	10,6''	10,6''	10,6''
15°	16,1''	16,1''	16,1''
20°	21,9''	21,9''	21,9''
25°	28,1''	28,1''	28,0''
30°	34,7''	34,7''	34,7''
35°	42,1''	42,1''	42,1''
40°	50,5''	50,5''	50,4''
45°	60,15''	60,15''	60,0''
50°	71,7''	71,7''	71,7''
55°	85,8''	85,8''	85,6''
60°	104,2''	104,2''	103,8''
65°	129,1''	129,0''	128,2''
70°	165,4''	165,3''	163,8''
71°	174,9''	174,7''	
72°	185,3''	185,1''	
73°	197,0''	196,7''	
74°	210,1''	209,8''	
75°	224,9''	224,5''	221,0''

La comparación de las tres columnas evidencia: 1) que hasta 60° la fórmula de aproximación es suficiente hasta los décimos segundos; 2) que la independencia de la refracción de la constitución de la atmósfera de ninguna manera se extiende hasta 79° (*Faye*), sino hasta sólo 50°.

b) *Presión p'_0, temperatura T'_0; fórmula de Comstock.*

Con la presión p'_0 y la temperatura T'_0 en el nivel del mar, la densidad del aire, con la «ecuación de estado del gas perfecto»

$$p = R \rho T \tag{4}$$

se escribe:

$$\rho'_0 = \rho_0 \frac{p'_0}{p_0} \cdot \frac{T_0}{T'_0} \quad \text{con: } p_0 = 760;\ T_0 = 273; \tag{5}$$

por lo tanto se reemplaza sencillamente en las fórmulas (1 a) y (3 a) ρ_0 por ρ'_0. *Faye* escribe, siendo b la presión y t temperatura en ° C: La acción refringente está dada por:

$$(n-1)\,\frac{b}{760}\,\frac{1}{1+0{,}00366\,t}\,.$$

Con la ecuación (5) tendremos p. ej. para $p'_0 = 29{,}6$ inches (pulgadas) y $t = 50°$ F (valores muy usados en tiempos pasados y hasta hoy día) las fórmulas:

(1 bb) $$\operatorname{sen}\alpha = 1{,}0002780 \operatorname{sen}\alpha_0$$

o:

(1 c) $$\lg\operatorname{sen}\alpha = \lg\operatorname{sen}\alpha_0 + 0{,}0001207$$

y,

(3 b) $$\lg\gamma = \lg\operatorname{tg}\alpha_0 + 1{,}75848.$$

La tabla II contiene los valores exactos y aprxoimados, calculados mediante las expresiones precedentes; para comparación agregamos los valores de *Pryde* (8) y de *Nassau* (9) que se refieren a las mismas condiciones de presión y temperatura.

TABLA II

ÁNGULOS DE REFRACCIÓN

(50°F y 29,6 inches de Hg, superf. plana)

Dist. zenit.	*Valor exacto*	*Valor aprox.*	*Valor de Pryde*	*Val. de Nassau*
5°	5,0''	5,0''	5''	5''
10°	10,1''	10,1''	10''	10''
15°	15,3''	15,4''	15''	15''
20°	20,8''	20,9''	21''	21''
25°	26,7''	26,7''	26''	27''
30°	33,1''	33,1''	33''	33''
35°	40,1''	40,2''	40''	40''
40°	48,1''	48,1''	48''	48''
45°	57,3''	57,3''	57''	57''
50°	68,4''	68,3''	68''	68''
55°	81,9''	81,9''	81''	82''
60°	99,3''	99,3''	98''	99''
65°	123,1''	123,0''	122''	
70°	157,6''	157,5''	155''	157''
71°	166,7''	166,5''		
72°	176,7''	176,5''		
73°	187,8''	187,6''		
74°	200,3''	200,0''		
75°	214,4''	214,0''	210''	213''

La comparación de los valores confirma las conclusiones de arriba; a partir de $\alpha_0 = 50^\circ$ la ley especial según la cual la densidad del aire varía con la altura, la curvatura de la Tierra, modifica los valores de la refracción. En vez de usar la fórmula (5) para reducir los valores encontrados con la fórmula de aproximación (3 a), la mayoría de los autores da tablas auxiliares, para reducir las refracciones calculadas para condiciones normales, a otra presión y otra temperatura; en *Nassau* [9] se menciona la la fórmula «empírica» de *Comstock*:

$$\gamma = \frac{983\, b}{460 + t} \operatorname{tg} \alpha_0. \tag{6}$$

Escribiendo nuestra fórmula de aproximación:

$$\gamma = 206265\, C\, \rho_0 \frac{p'_0}{p_0} \frac{T_0}{T'_0} \operatorname{tg} \alpha_0$$

y poniendo:

$$p_0 = 760 \text{ mm} = 29{,}92 \text{ inches (pulgadas)}$$

$$p \text{ mm} = \frac{p}{2{,}54} \text{ inches} = b \text{ inches}$$

$$T_0 = 273^\circ \text{ K} = (273 + 0)^\circ \text{ C} = \left(273 \,.\, \frac{9}{5}\right)^\circ \text{ F} = 491{,}4^\circ \text{ F}$$

$$T'_0{}^\circ \text{ K} = (273 + t)^\circ \text{ C} = \left(273 \,.\, \frac{9}{5} - 32 + t\right)^\circ \text{ F} =$$

$$= (459{,}4 + t)^\circ \text{ F}$$

obtenemos, con el valor de ρ_0, como arriba:

$$\gamma = \frac{987{,}9\, b}{459{,}4 + t}, \tag{6 a}$$

fórmula prácticamente casi idéntica con la de *Comstock*.

c) *Las refracciones para distancias zenitales grandes.*

Revisando la bibliografía referente a tablas de refracción atmosférica y métodos para conseguir los valores, sea teóricamente, sea por observaciones astronómicas, mencionamos además el *Handbuch der Experimentalphysik* (10), en el cual se cita un artículo de *A. Bemporad,* publicado en 1906 en la *Enzyklopaedie der mathematischen Wissenschaften,* y se reproducen algunas tablas del mismo.

Un grupo de tablas se refiere a condiciones normales, mientras que en el otro se refiere las otras condiciones en el nivel del mar, arriba mencionadas.

Damos breves resúmenes.

TABLA III

REFRACCIONES PARA DISTANCIAS ZENITALES GRANDES

(0° C, 760 mm de Hg)

Dist. zen.	*Handbuch Phys.*	*Bessel*	*Handb. Exp.* *Ivory*	*Schmidt*	*Faye*
70°	entre 164,5'' y 165,2''	164,5''	165,2''	165,0''	163,8''
75°		221,9''	222,0''	227,7''	221,0''
80°	» 330,8'' y 332,3''	331,1''	332,0''	332,3''	329,8''
85°	» 607,9'' y 619,3''	613,9''	619,3''	617,9''	613,5''
86°		734,9''	738,7''	736,0''	731,8''
87°		900,4''	906,8''	904,1''	898,8''
88°		1150,7''	1155,1''	1152,0''	1146,2''
89°		1556,4''	1546,3''	1542,6''	1537,0''
90°	» 1816,4'' y 2241,3''	2241,3''	2200,0''	2207,8''	2196,0''

Merece especial interés el valor para $\alpha_0 = 90°$, la refracción horizontal; con el valor 2196 de la tabla de *Faye* resulta para las condiciones $b = 29{,}6$ inches y $t = 50°$ F el valor: 2096''.

Encontramos los siguientes valores:

1980'' : *Pryde* (8) ''Mean Refraction'' b = 29,6 inches, t = 50° F.

2094,1'': » ''Bessels Refractions''; mediante las tablas de corrección para presión y temperatura se ve que las condiciones son:

b = 29,6 inches, t = 49° F

2094'' : *Pernter–Exner* (11) Los autores dicen que la tabla reproducida de *Bessel* se refiere a 760 mm y 8,5° C; mediante las tablas de corrección se halla: 751,1 mm. y 8,5° C, valores no muy distintos de 29,6 inches y 49° F.

2094'' : *Newcomb–Engelmann* (12)

2090'' : *Nassau* (0)

2090'' : *Russell* y otros (13)

2090'' : *Skilling–Richardson* (14)

Finalmente destacamos las divergencias, en especial también en el signo de las diferencias, entre las dos tablas publicadas en *Pryde*: «Mean Refraction» y «Bessels Refractions».

TABLA IV

LAS TABLAS PUBLICADAS EN EL LIBRO DE PRYDE

Dist. cenit.	*Mean Refraction*	*Bessels Refraction*	*Diferencia*
75°	210''	212,1''	— 2,1''
76°	225''	227,4''	— 2,7''
77°	243''	244,9''	— 1,9''
78°	263''	265,0''	— 2,0''
79°	287''	288,5''	— 1,5''
80°	315''	316,2''	— 1,2''
81°	348''	349,3''	— 1,3''
82°	389''	389,6''	— 0,6''
83°	440''	439,7''	+ 0,3''
84°	508''	503,3''	+ 4,7''
85°	594''	586,5''	+ 7,5''
86°	711''	698,9''	+ 12,1''
87°	876''	854,6''	+ 21,4''
88°	1115''	1088,6''	+ 26,4''
88°10'	1165''	1138,0''	+ 27,0''
88°20'	1218''	1191,9''	+ 26,1''
88°30'	1275''	1250,9''	+ 25,1''
88°40'	1335''	1315,6''	+ 19,4''
88°50'	1400''	1386,7''	+ 13,3''
89°	1469''	1464,6''	+ 4,4''
89°10'	1542''	1549,8''	— 7,8''
89°20'	1620''	1642,7''	— 22,7''
89°30'	1703''	1743,5''	— 40,5''
89°40'	1790''	1852,3''	— 62,3''
89°50'	1882''	1969,2''	— 87,2''
90°	1980''	2094,1''	— 114,1''

II. - TEORIA ELEMENTAL DE LA REFRACCION ATMOSFERICA.

a) *Cambio de la densidad del aire con la altura, «Atmósfera Standard».*

Habiendo desarrollado la teoría en mi trabajo arriba citado, repito lo dicho en p. 151: «Dependiendo el cambio de la densidad del aire con la altura no sólo de la presión, sino también de la temperatura, suponiendo para el último cambio la ley más sencilla posible y también concordante con las observaciones, es decir, el cambio lineal: escribimos la relación:

$$T = T'_0 - c\,y, \tag{7}$$

significando T'_0 la temperatura en la superficie terrestre (nivel del mar), T en la altura y. Con la constante c positiva la temperatura disminuye con la altura (disminución normal en la tropósfera c entre 0,005 y 0,01°/m)... La «ecuación diferencial de la estática de la atmósfera» es:

$$(8) \qquad \frac{\partial p}{\partial y} = -\rho g,$$

significando ρ la densidad, g la aceleración de la gravedad, p la presión; y la ecuación de estado del gas perfecto:

$$(4) \qquad p = R \rho T,$$

siendo R la constante de los gases; usando con *Exner* el MKS, R tiene el valor numérico $29{,}27 \, . \, g$, siendo $g = 9{,}806''$.

Mediante las tres ecuaciones (7), (8) y (4) se llega a las siguientes expresiones que relacionan densidad y presión con la altura sobree el nivel del mar:

$$(9) \qquad \rho = \rho'_0 \left[1 - \frac{c}{T'_0} y \right]^{\varkappa - 1} \text{(*)}$$

$$(10) \qquad p = p'_0 \left[1 - \frac{c}{T'_0} y \right]^{k},$$

siendo:

$$(11) \qquad \varkappa = \frac{g}{Rc};$$

p'_0, ρ'_0, T'_0 son los valores correspondientes para $y = 0$.

(*) Esta relación vale también, considerando la curvatura de la tierra, suponiendo que la temperatura sea constante sobre una superficie esférica concentrica.

En el trabajo citado se escribió:

$$\lg \frac{\rho}{\rho'_0} = (\varkappa - 1) \lg \left(1 - \frac{c}{T'_0} y\right)$$

con la temperatura T'_0 en $y = 0$, y, tratándose en la aplicación del trabajo citado siempre de alturas pequeñas, se aproximó $\lg \frac{\rho}{\rho'_0}$ mediante $\frac{\rho - \rho'_0}{\rho + \rho'_0}$.

Casos especiales.

1. *Caso isopícnico* (densidad constante; generalmente no se presenta en la naturaleza). De la ecuación:

$$(9\,\mathrm{a}) \qquad \rho = \rho'_0$$

sigue inmediatamente:

$$\varkappa - 1 = 0$$

y por lo tanto:

$$(11\,\mathrm{a}) \qquad c = \frac{g}{R}\,.$$

y también:

$$(10\,\mathrm{a}) \qquad p = p'_0 \left[1 - \frac{g}{RT'_0}\,y\right].$$

Para el caso especial de $T'_0 = T_0 = 273^\circ$ K tenemos:

$$p = p'_0 \left[1 - \frac{y}{7991}\right];$$

7991 [m] es la conocida «altura de la atmósfera homogénea» ([15]).

2. *Caso isotérmico.*

Poniendo:

$$(7\,\mathrm{b}) \qquad T = T'_0$$

se obtiene mediante (8) y (4):

$$(9\,\mathrm{b}) \qquad \rho = \rho_0\, e^{-\frac{g}{RT'_0}y}$$

$$(10\,\mathrm{b}) \qquad p = p'_0\, e^{-\frac{g}{RT'_0}y}\,.$$

Para el caso especial $T'_0 = T_0 = 273^\circ$ K (10 b) es la fórmula conocida de *Halley*.

3. *Caso adiabático.*

Con:

$$\frac{p}{\rho^{\gamma}} = \text{const} = \frac{p'_0}{\rho'^{\gamma}_0} \quad \left(\gamma = \frac{c_p}{c_v}\right)$$

se obtienen las ecuaciones:

$$\rho = \rho'_0 \left[1 - \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{g\rho'_0}{p'_0} y\right]^{\frac{1}{\gamma-1}} \tag{9 c}$$

$$p = p'_0 \left[1 - \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{g\rho'_0}{p'_0} y\right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \tag{10 c}$$

$$T = T'_0 \left[1 - \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{g\rho'_0}{p'_0} y\right], \tag{7 c}$$

que se identifican con las ecuaciones (9), (10) y (7), si con el valor de γ para el aire 1.405 ponemos:

$$\frac{1}{\gamma-1} = \varkappa - 1; \quad \frac{\gamma}{\gamma-1} = \varkappa; \quad \text{es decir:} \quad c = \frac{g}{R} \frac{\gamma-1}{\gamma} \cong 0{,}01^{\circ}/\text{m}.$$

Ahora bien, dependiendo la «refracción» en cada altura del índice de refracción del aire y éste a su vez de la densidad ρ y siendo aplicables las fórmulas sencillas de arriba sólo para ángulos zenitales no muy grandes y para el caso de una superficie plana, tenemos que elegir un estado medio normal de la atmósfera, fijando una distribución determinada de la temperatura, con condiciones determminadas de densidad, presión y temperatura en el nivel del mar, luego calcular los valores numéricos de la densidad para cada altura.

Habiéndose adoptado en la Argentina oficialmente, con decreto del Poder Ejecutivo de fecha 1º de agosto de 1933 ,la «Atmósfera Standard» de la C. I. N. A., es decir «Convención Internacional de Navegación Aérea», habiéndose encargado con el mismo decreto a la Dirección de Meteorología, Geofísica e Hidráulica definir dicha atmósfera, estableciendo y publicando las constantes, fórmulas y tablas de reducción correspondientes, tenemos que elegir como base para cualquier cálculo numérico las definiciones siguientes publicadas por *Alfredo G. Galmarini* (16) en 1934; (damos los datos en forma resumida):

Entre el nivel del mar y la altura de 11 km (tropósfera):

«gradiente térmico standard» (*Toussaint*) $c = 0{,}0065^\circ$ C; temperatura en el nivel del mar: 15° C $= 288^\circ$ K; por lo tanto: temperatura en 11 km de altura: $-56{,}5^\circ$ C $= 216{,}5^\circ$ K.

Presión en el nivel del mar: 760 mm de Hg.

Desde la altura de 11 km la atmósfera es «isotérmica».

Con respecto a los valores de las constantes físicas dice *Galmarini* en p. 10: «No difieren mayormente de las de la C. I. N. A., sino en el valor de las decimales, por lo que no afecta el resultado final de las constantes que intervienen en las fórmulas». Las fórmulas encontradas por *Galmarini* para tropósfera y estratosfera son naturalmente idénticas con las nuestras:
Galmarini, p. 15, fórm. (8) = nuestra fórm. (9):

$$\rho = \rho'_0 \left[1 - \frac{c}{T'_0} y \right]^{\varkappa - 1}$$

Galmarini, p. 16, fórm. 1ª = nuestra fórm. (9 b)

$$\rho = \rho'_0 \, e^{\frac{g}{RT_{11}}(y - 11000)}$$

Daremos en la tabla V los valores numéricos del aire, calculados por nosotros para la aplicación del cálculo de las refracciones ,comparados con los de la tabla de *Galmarini*.

TABLA V

DENSIDAD DEL AIRE EN FUNCIÓN DE LA ALTURA

Altura	*Densidad* Wü.	Ga.	*Altura*	*Densidad* Wü.	Ga.
0,0 km	1,2257	1,2255	11 km	0,3638	0,3638
0,1	1,2139	1,2138	12	0,3107	0,3107
0,2	1,2023	1,2021	13	0,2654	0,2653
0,3	1,1907	1,1906	14	0,2266	0,2266
0,4	1,1793	1,1791	15	0,1935	0,1935
0,5	1,1679	1,1677	17	0,1412	0,1412
1	1,1122	1,1120	19	0,1030	0,1030
1,5	1,0585	1,0584	20	0,08793	0,0879
2,	1,0069	1,0068	25	0,03985	0,0400
2,5	0,9572	0,9571	30	0,01815	—
3,	0,9095	0,9093	35	0,008247	—
4,	0,8194	0,8193	40	0,003747	—
5,	0,7363	0,7362	45	0,001703	—
6,	0,6598	0,6597	50	0,0007736	—
7,	0,5896	0,5895			
8,	0,5252	0,5251			
9,	0,4663	0,4663			
10,	0,4127	0,4126			

La coincidencia de los valores es suficiente; la ligera diferencia en la cuarta decimal se explica por:

$$\rho'_0 = \rho \frac{273}{288} = 1{,}2930 \cdot \frac{273}{288} = 1{,}22567 \cong 1{,}2257;$$

mientras que *Galmarini* tiene:

$$\rho'_0 = 1{,}2930 \cdot \frac{273}{288} = 1{,}2255 \text{ (p. 10)};$$

los valores para $\varkappa$ son prácticamente los mismos (*Wü.*: 5,2556; *Ga.*: 5,256).

b) *Teoría de la refracción.*

Superficie plana

Aunque en el caso de una superficie plana la distribución especial de las densidades del aire no tiene influencia sobre los valores de la refracción, si consideramos alturas muy grandes, pues la ecuación (1 a) determina unívocamente el valor que corresponde a tal altura, conviene considerar la determinación de este ángulo para una altura cualquiera y.

En este caso tendremos en vez de (1 a):

$$\text{(13)} \qquad \operatorname{sen} \alpha = [1 + C(\rho'_0 - \rho)] \operatorname{sen} \alpha_0$$

$$\text{(14)} \qquad \gamma = \alpha - \alpha_0.$$

Ahora, en vez de la ecuación (9) que representa ρ en función de la altura y, ponemos la ecuación:

$$\text{(15)} \qquad \rho = \rho'_0 \left[1 - \frac{y}{h} \right],$$

calculando h mediante los valores de ρ'_0 y de ρ de la tabla V, para una determinada altura y (p. ej. para $y = 11$ km); y encontramos, reemplazando (15) en (13) y poniendo:

$$\text{(16)} \qquad R_0 = \frac{h}{C\rho'_0}$$

la relación:

$$\text{(13 a)} \qquad \operatorname{sen} \alpha = \left[1 + \frac{y}{R_0} \right] \operatorname{sen} \alpha_0$$

En otras palabras, se reemplaza la curva que corresponde a la ecuación (9) (Fig. 1) por la recta que pasa por los puntos $(0, \rho'_0)$ y $(11, \rho_{11})$.

Demostré en mi trabajo citado que entonces la trayectoria del rayo de luz es representada por una circunferencia, cuyo centro tiene las coordenadas:

$$x_0 = R_0 \operatorname{ctg} \alpha_0$$

$$y_0 = -R_0$$

y cuyo radio es:

$$r_0 = \frac{R_0}{\operatorname{sen} \alpha_0},$$

es decir, para cada distancia zenital la magnitud R_0 es una medida para la *curvatura media* dentro de la tropósfera (0 a 11 km). Dividiendo este intervalo en los dos intervalos parciales 6 y 5 km, o trazando en la fig. 1 las rectas correspondientes, calculando con (15) y (16) los valores, y siguiendo este proceso hasta intervalos de 1 km. se obtienen los resultados siguientes:

TABLA VI

Intervalos de altura	*Radio de curvatura*
0 — 11	56590
0 — 6	47010
6 — 11	74890
0 — 3	42070
3 — 6	53290
6 — 9	68730
9 — 11	86490
0 — 1	39070
1 — 2	42120
2 — 3	45490
3 — 4	49230
4 — 5	53360
5 — 6	57970
6 — 7	63100
7 — 8	68870
8 — 9	75340
9 — 10	82660
10 — 11	90040

Se puede extender la subdivisión hasta las capas más cercanas a la superficie, encontrándose, p. ej., en el primer intervalo de 100 m un radio de curvatura de 37840 km, es decir la curvatura del rayo de luz aquí es la sexta parte de la de la tierra (resultado ya conocido). De la misma manera se puede proceder para la estratósfera.

Ahora bien, para el caso irreal de la superficie plana, estas consideraciones no intervienen en el cálculo de las refracciones; para un determinado intervalo, p. ej. para 11 km, la fórmula (13) es idéntica con (13 a), y el valor de γ obtenido con ellas y con (14) es el mismo. También, si elegimos intervalos parciales, p. ej. dos o cuatro, la suma de las refracciones parciales será igual a la refracción total.

Elegimos el caso de la distancia zenital de 45° y calculamos las refracciones para 1, 2 y 4 intervalos de la tropósfera (para los sen se usa la tabla del libro de *Pryde* (9); para los demás cálculos la de *Schlömilch* (17).

Se halla:

para un intervalo de 11 km: 40,1 = 40,1″

para dos intervalos de 6 + 5 km: 26,3 + 13,8 = 40,1″

para cuatro intervalos de 3 + 3 + 3 + 2 km:

14,7+11,6+9,0+4,8 = 40,1″

Por otra parte, con la fórmula de aproximación:

$$\gamma = 206265\, C\,(\rho'_0 - \rho)\ \mathrm{tg}\ \alpha_0 \qquad (3\,b)$$

obtenemos para $\alpha_0 = 45°$ el mismo ángulo de refracción de 40,1″.

Superficie con el radio de curvatura $R = 6370$ km.

En el caso de la superficie curvada — radio de curvatura igual al radio de la Tierra $R = 6370$ km — el método de las capas de aire concéntricas, de igual densidad, da, en vez de (13 a) la ecuación:

$$\mathrm{sen}\ \alpha = \frac{R}{R+\eta}\,[1 + C\,(\rho'_0 - \rho)],\ \mathrm{sen}\ \alpha_0 \qquad (13\,b)$$

significando ahora η la altura sobre el nivel del mar. (Fig. 2). Procediendo ahora, como en el caso de la superficie plana, obtendremos la ecuación:

$$\mathrm{sen}\ \alpha = \frac{1 + \frac{\eta}{R_0}}{1 + \frac{\eta}{R}}\ \mathrm{sen}\ \alpha_0 \qquad (13\,c)$$

o también, en buena aproximación, siendo R_0 bastante más grande que R y poniendo:

$$\frac{1 + \frac{1}{R_0}}{1 + \frac{1}{R}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{K}}\,, \quad \text{con: } \frac{1}{K} = \frac{1}{R} - \frac{1}{R_0}$$

tendremos:

$$\mathrm{sen}\ \alpha = \frac{\mathrm{sen}\ \alpha_0}{1 + \frac{\eta}{K}}, \qquad (13\,d)$$

fórmula que expresa la influencia de la curvatura terrestre, modificada por la curvatura del rayo de luz.

Escribimos (13 d) en la forma:

$$\eta = \frac{K}{\operatorname{sen} \alpha_0} [\operatorname{sen} \alpha_0 - \operatorname{sen} \alpha]$$

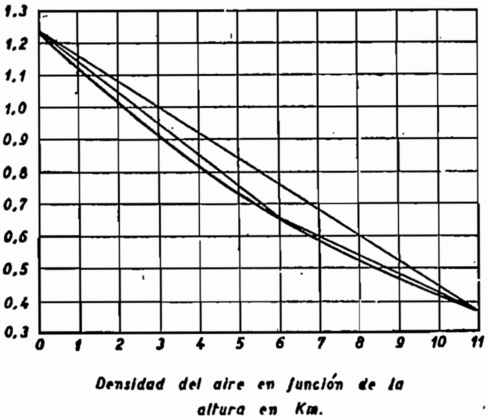

Fig. 1

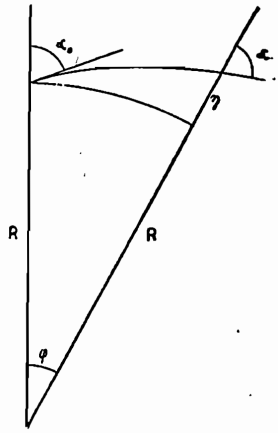

Fig. 2

y obtenemos, con $\frac{d\xi}{d\eta} = \operatorname{tg} \alpha$, integrando:

$$\xi = K \operatorname{sen} \alpha_0 \lg \frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha_0}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} \tag{14}$$

o también, siendo $\xi = R \,.\, \varphi$:

$$\varphi = \frac{K}{R} \operatorname{sen} \alpha_0 \lg \frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha_0}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} \tag{14 a}$$

o en buena aproximación, para diferencias pequeñas $(\alpha_0 - \alpha)$:

$$\varphi = \frac{K}{R} (\alpha_0 - \alpha). \tag{14 b}$$

Finalmeente tenemos (Fig. 2):

$$\gamma = \varphi - (\alpha_0 - \alpha). \tag{15}$$

Ahora bien, hemos ganado así el siguiente procedimiento para calcular las refracciones para cualquier distancia zenital α_0:

1) Calculamos para la tropósfera ($\eta = 11$ km) h, R_0 y K, luego mediante:

$$\text{(I)} \qquad \operatorname{sen} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha_0}{1 + \frac{\eta}{K}}$$

$$\text{(II)} \qquad \varphi = \frac{K}{R} (\alpha_0 - \alpha)$$

$$\text{(III)} \qquad \gamma = \varphi - (\alpha_0 - \alpha)$$

la primera aproximación para la refracción en la tropósfera; luego subdividimos en 6 y 5 km; si resulta la suma de las refracciones parciales igual al valor anterior, para una determinada distancia zenital, ya tenemos el valor verdadero; si no, subdividimos en 4 intervalos, etc., hasta que, subdividiendo más los intervalos inferiores, llegamos a una suma constante que es entonces la refracción verdadera en la tropósfera.

2) Repetimos el mismo procedimiento para la estratósfera.

Daremos un solo ejemplo para un ángulo zenital bastante grande, es decir, para $\alpha_0 = 80^\circ$.

1. *Tropósfera*

	φ	$-(\alpha_0 - \alpha) =$	γ
1 intervalo de 11 km:	1969,5	— 1748,0 =	221,5
2 intervalos de 6 y 5 km:	1086,9	— 939,8 =	147,1
	883,4	— 808,2 =	75,2
			222,3
4 intervalos de 3 + 3 + 3 + 2 km:	547,0	— 464,3 =	82,7
	540,1	— 475,5 =	64,6
	532,5	— 483,1 =	49,4
	351,0	— 325,1 =	25,9
			222,6
11 intervalos de 1 km:	183,5	— 153,6 =	29,9
	182,2	— 154,7 =	27,5
	181,4	— 156,0 =	25,4
	181,0	— 157,6 =	23,4
	180,1	— 158,6 =	21,5
	179,0	— 159,3 =	19,7
	178,3	— 160,3 =	18,0
	177,3	— 160,9 =	16,4
	176,9	— 161,9 =	15,0
	176,2	— 162,6 =	13,6
	174,8	— 162,5 =	12,3
			222,7

2. *Estratósfera*

1 intervalo de 39 km:	6264,4 — 6180,6 = 83,8
2 intervalos de 19 y 20 km:	3179,9 — 3096,6 = 83,3
	3087,8 — 3084,0 = 3,8
	87,1
4 intervalos de 9 + 10 + 10 + 10 km:	1539,9 — 1471,8 = 68,1
	1641,3 — 1624,8 = 16,5
	1530,9 — 1527,7 = 3,2
	1556,9 — 1556,3 = 0,6
	88,4
8 intervalos, el primero de 4 km, los demás de 5 km:	692,2 — 649,7 = 42,5
	847,9 — 822,1 = 25,8
	829,6 — 818,1 = 11,5
	811,8 — 806,7 = 5,1
	795,1 — 792,8 = 2,3
	779,1 — 778,0 — 1,1
	783,3 — 782,9 = 0,4
	730,4 — 730,3 = 0,1
	88,8

Resultará así para la refracción total que corresponde a la distancia zenital de 80° bajo la suposición de la Atmósfera Standard el valor de

$$\gamma = 222{,}7'' + 88{,}8'' = 311{,}5''.$$

Para una superficie plana resultaría el valor considerablemente mayor de 324″.

Por otra parte, reduciendo el valor ganado a las condiciones normales de temperatura y presión, se obtiene:

$$\gamma = 328{,}6''$$

mientras que los valores de *Faye* y de *Nassau* son 329,8″ y 332,0″ respectivamente.

Demostraremos en otro lugar que la aplicación de la fórmula exacta (14 a) en vez de la de aproximación (14 b) no modificará el resultado para la refracción *total* y que la elección de las densidades que figuran en la tabla V es suficiente hasta para el cálculo de la refracción que corresponde a la distancia zenital de 90°. Publicaremos también la tabla completa de refracciones.

Instituto de Física. - Tucumán, noviembre 13 de 1949.

BIBLIOGRAFIA

1) J. WÜRSCHMIDT: Elementare Theorie der terrestrischen Refeaktion u. s. w. Ann. d. Phys., IV, *60*, 151 - 180, 1919.

2) J. WÜRSCHMIDT: l. c., p. 153.
A. WEGENER: Elementare Theoríe der atmosphärischen Spiegelungen. – Ann. d. Phys., IV, *57*, 203, 1918.
Handbuch der Physik. Hrsg. v. A. WINKELMANN, VI. – Barth, Leipzig, 1902. – p. 503: A. BEMPORAD: Die astronomische und terrestrische Strahlenbrechung.

3) F. M. EXNER: Dynamische Meteorologie. – Deuticke, Wien, 1922.

4) LANDOLT-BÖRNSTEIN: Physikalische-chemische Tabellen, II, – Springer, Berlin, 1923. Photo-Lithoprint Reprod. Edwards, Michigan, 1943, p. 960.
Ergänzungsband, I, p. 525, Berlin, 1927. – 3. Ergänzungsband, Berlin, 1938.

5) *Handbuch der Physik*: l. c., p. 534.

6) H. FAYE: Cours d'Astronomie et de Géodésie, I. – Gauthier-Villars, Paris, 1926, p. 123.

7) *Connaissance des Temps* pour l'an 1949. – Gauthier-Villars, Paris, 1948.

8) JAMES PRYDE: Mathematical Tables. – Chambers, London–Edinburgh, p. 428 - 430.

9) JASON JOHN NASSAU: A Textbook of Practical Astronomy. – Mc Grant Hill, New York–London, 1932, p. 196.

10 *Handbuch der Experimentalphysik*; Band XXV: Geophysik, 1. Teil. Red. O. ANGENHEISTER. Akad. Verlagsges., Leipzig, 1925, p. 114: Refraktion.

11) J. M. PERNTER u. F. M. EXNER: Meteorologische Optik. – Braumüller, Wien-Leipzig, 1933, p. 72.

12) S. NEWCOMB y R. ENGELMANN: Astronomía Popular. – Gili, Barcelona, 1926, p. 143.

13) C. N. RUSSELL, R. SMITH DUGAN and J. QUINCY STEWARD: Astronomy, 1. Ginn, Boston, etc., p. VI.

14) W. T. SKILLING and R. S. RICHARDSON: Astronomy. – Holt, New York, 1939.

15) J. WÜRSCHMIDT: Altimetría Barométrica. – Cuadernos de Mineralogía y Geología, Tomo I, Nº 3 y 4. Publ. Un. Nac. de Tucumán, Nº 234 y 237. Tucumán, 1938.

16) ALFREDO G. GALMARINI: La Atmósfera "Standard". – Dir. de Met., Geof. e Hidrol. – Serie A, Publ. Nº 2. – Tall. Gráf. Min. de Agricultura, Buenos Aires, 1934.

17) Pío PITA SUÁREZ COBIAN y JOSÉ Mª LORENTE PÉREZ: Metereología Aeronáutica. S. A. E. T. A., Madrid, 1942, p. 45. Los autores usan $\varkappa = 5{,}22$; además $\frac{R\ T}{\lg\ e}$ el valor 14,6 (*Wü.* 14,593; *Ga.* 14,595). Han calculado: 1 : 0,0065 = 152,8, en vez de 153,85.

18) *Fünfstellige logarithmische und trigonometrische Tafeln. Hrsg.* v. O. SCHLÖMILCH. Vieweg, Braunschweig, 1914.