SOBRE TRANSFORMACIONES DE CONJUNTOS Y OPERADORES DE KOOPMAN

por MISCHA COTLAR y R. A. RICABARRA

En este artículo queremos profundizar algunos resultados obtenidos en una nota anterior (1) y deducir con ellos una caracterización de los operadores clásicos de Koopman, que pasamos a detallar.

Si $m(A)$ es una medida de Lebesgue sobre un espacio de puntos $E=\{P\}$, $A \subset E$, $L^2(m)=\{f\}$ el espacio de las funciones $f(P)$ a cuadrado integrable y $P \to hP$ una aplicación biunívoca de E sobre E tal que $m(hA)=m(A)=m(h^{-1}A)$, entonces la aplicación h origina en $L^2(m)$ una transformación unitaria $T=T_h$ definida por $Tf(P)=f(hP)$. Tales $Tf=T_hf$ se llaman operadores de Koopman. Ellos son pues operadores unitarios sobre $L^2(m)$ de un tipo especial, y según un conocido teorema de v. Neumann (2), una transformación sobre $L^2(m)$ es de Koopman sí y solo si es unitaria y $T(fg)=Tf\,.\,Tg$. Este teorema de v. Neumann da una condición para que T *sea* de de Koopman. En cambio algunos trabajos de J. L. Doob (3) sugieren el problema: ¿cuándo una transformación lineal acotada Tf sobre $L^2(m)$ es *equivalente* a un operador de Koopman? Decimos que una transformación Tf cualquiera sobre $L^2(m)$ es equivalente a un operador de Koopman, si existe un T' de Koopman definido sobre cierto $L^2(m')$ y un isomorfismo algebráico-topológico V de $L^2(m')$ sobre $L^2(m)$, tal que $VT=T'V$.

La diferencia esencial entre este problema y el tratado por

(1) Sobre un teorema de E. Hopf, esta Revista, 1949, XIV; la presente nota es sin embargo independiente de la anterior.

(2) v. NEUMANN, Annals of Mathematics, vol. 33, 1932, págs. 587–642.

(3) Ver J. L. DOOB, One parameter familys of transformations, Duke Math. Journal, vol. 4, 1938, págs. 752–74, especialmente teorema 10, así como la forma general del teorema ergódico individual dada por este autor en el Duke Math. Journal, 1940, pág. 245.

v. Neumann radica en el hecho que V puede no conservar las normas, luego Tf puede ser equivalente a un operador de Koopman sin ser una transformación unitaria sobre $L^2(m)$. Aquí sólo consideramos el caso más simple $m(E)=1$ y $\{T^n\}$ discreto, y nuestro teorema final es: *una transformación lineal continua Tf sobre $L^2(m)$ (que admite por rango $L^2(m)$) es equivalente a un operador de Koopman sí y solo si verifica uno de los teoremas ergódicos y $T(fg)=Tf.Tg$*; damos además otras dos condiciones de tipo algebráico y conjuntista respectivamente. La demostración de este teorema depende esencialmente de los dos teoremas citados de Doob, que combinados con algunas propiedades generales sobre transformaciones de conjuntos (ver §§ 1-4) proporcionan inmediatamente el resultado deseado.

En los §§ 1, 2, 3, damos tres teoremas de descomposición de E (respecto de una T de conjunto general), el primero de los cuales se reduce al teorema clásico de la teoría ergódica (4) en el caso de una $T=T_h$ proveniente de una aplicación puntual. Combinando estos teoremas de descomposición con el método usado en nuestra nota anterior citada, obtenemos en los §§ 4 y 5 condiciones para que una tal T sea equivalente a una T' invariante respecto de una m'. En el caso particular de una $T=T_h$ estos resultados unifican y completan teoremas de Dunford-Miller, Y. Dowker y E. Hopf (5).

§ 1. - Sea $E=\{P\}$ un espacio abstracto, $K=\{A,B,C,\ldots, H,\ldots\}$ un σ-cuerpo de subconjuntos de E, es decir una clase que con cada conjunto contiene su complementario a E y con cada sucesión numerable su unión e intersección. Sea T una transformación entre conjuntos con dominio K y rango en K con las propiedades:

A) $TO=O$ (con O indicamos el conjunto vacío), $TE=E$;

B) $T(\bigcap_1^\infty A_i)=\bigcap_1^\infty TA_i$, $T(\bigcup_1^\infty A_i)=\bigcup_1^\infty TA_i$.

(4) Ver por ejemplo: E. Hopf, *Ergondentheorie*, Cap. IV.

(5) N. Dunford y D. S. Miller, On the ergodic theorem, Trans. of the An. Math. Soc., 1946, págs. 538–48; Y. N. Dowker, Duke Math. Journal, 11, 1947, págs. 1051–61; E. Hopf, Theory of measure and invariant integrals, Transact. A. M. Soc., 1932.

Como consecuencia es T (lím sup $\{A_i\}$) = lím sup $\{T A_i\}$, T (lím inf $\{A_i\}$) = lím inf $\{T A_i\}$, $A \subset B$ implica $TA \subset TB$, $A \cap C = 0$ implica $TA \cap TC = 0$.

Llamaremos T^n a la transformación entre conjuntos que a $A \in K$ asigna $T(T^{n-1} A)$, $T^0 A = A$, $T^1 A = TA$, $n = 1, 2, \ldots$ Trivialmente se comprueba que T^n posee las propiedades supuestas para T. Sea $f(P)$ una función real con dominio E tal que $E\{P; f(P) \geqq a\} \in K$ para todo número real a, es decir medible-K.

Indicaremos con Tf la función construída mediante el siguiente proceso. Sea antes $g(P)$ una función con a lo sumo infinito numerable de valores (función elemental): $g(P) = a^i$ si $P \in A^i$, $A^i \cap A^j = 0$ si $i \neq j$, $\bigcup_1^\infty A^i = E$. Puesto que $TA^i \cap TA^j = 0$ si $i \neq j$ y $\bigcup_1^\infty TA^i = E$, podemos definir: $Tg(P) = a^i$ si $P \in TA^i$. Se ve fácilmente que esta definición implica que si g_1, g_2, son dos funciones elementales tales que $|g_1(P) - g_2(P)| \leqq \varepsilon$ para todo $P \in E$, entonces también $|Tg_1(P) - Tg_2(P)| \leqq \varepsilon$. De esta propiedad sigue que si $f(P)$ es una función medible cualquiera y g_n una sucesión de funciones elementales uniformemente convergente a f, entonces Tg_n converge uniformemente hacia una función medible que indicaremos con Tf, y Tf no depende de la sucesión particular g_n. Tf está pues caracterizada por la propiedad siguiente: *si g es elemental y $|f(P) - g(P)| \leqq \varepsilon$ entonces también $|Tg(P) - Tf(P)| \leqq \varepsilon$.*

La transformación $f \longrightarrow Tf$ así definida posee las propiedades siguientes:

a) $T\,1 = 1$; b) $T(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) = \lambda_1 Tf_1 + \lambda_2 Tf_2$; c) $T(fg) = (Tf)\ (Tg)$, aquí fg indica el producto ordinario $f(P)\ g(P)$; d) Indicando con $\bigcap_1^\infty f_i$ ($\bigcup_1^\infty f_i$) la función que en cada P es igual al extremo inferior (superior) de los valores $f_i(P)$, se tiene $T(\bigcap_1^\infty f_i) = \bigcap_1^\infty Tf_i$, $T(\bigcup_1^\infty f_i) = \bigcup_1^\infty Tf_i$, siempre que existan estas $\bigcap_1^\infty$, $\bigcup_1^\infty$.

Todas estas propiedades pueden demostrarse primero para funciones elementales y luego para funciones medibles arbitrarias, haciendo uso de la propiedad característica de Tf. Veamos por ejemplo que $T(\bigcap_1^\infty f_n) = \bigcap_1^\infty Tf_n$.

Por la propiedad característica mencionada podemos suponer las f_n elementales. Sea f_n constante en A^i_n e igual a a^i_n. $\bigcap_1^\infty f_n$ es constante en los conjuntos $A^\alpha \neq 0$ de una clase de a lo sumo la potencia del conttinuo y donde cada A^α es intersección de infinito numerable de conjuntos $A^i_n \in K$. Luego

$A^\alpha \epsilon K$, y en un punto $P \epsilon A^\alpha$ es $\bigcap_1^\infty f_n$ igual al infimum de los valores a_n^{in} correspondiente a los índices i_n, n tales que $A^\alpha \subset A_n^{in}$. Designando este ínfimum con a^α, vamos a probar que $T(\bigcap_1^\infty f_n)(P) = a^\alpha$ si $P \epsilon TA^\alpha$. Definamos $B^i{}_k = E\{P; (i-1): k \leqq \bigcap_1^\infty f_n(P) < i:k\}$ y $g_k(P) = (i-1):k$ si $P \epsilon B^i{}_k$. Entonces o bien $A^\alpha \subset B^i{}_k$ o bien, $A^\alpha \cap B^i{}_k = 0$ y $|g_k(P) - \bigcap_1^\infty f_n(P)| \leqq 1:k$. Sea $P \epsilon TA^\alpha$, y calculemos $Tg_k(P)$. Sea i el índice tal que $A^\alpha \subset B^i{}_k$, entonces $TA^\alpha \subset TB^i{}_k$ y Tg_k en P vale por definición $(i-1):k$. De $A^\alpha \subset B^i{}_k$ sigue $(i-1):k \leqq a^\alpha < 1:k$, luego $|Tg_k(P) - a^\alpha| \leqq 1:k$. De la observación ya anotada que $(Tg_k - T(\bigcap_1^\infty f_n)| \leqq 1:k$ sigue pues que $T(\bigcap_1^\infty f_n)(P) = a^\alpha$. Calculemos ahora $\bigcap_1^\infty Tf_n(P)$ para $P \epsilon TA^\alpha$. Puesto que por construcción $A^\alpha = \bigcap_{n=1}^\infty A_n^{in}$ es $Tf_n(P) = a_n^{in}$ y por definición $a^\alpha =$ ínfimum de a_n^{in}.

De esta manera una transformación entre conjuntos con las propiedades A) y B) da origen a una transformación entre funciones con las propiedades a) - d). Recíprocamente, sea M un conjunto de funciones medibles-K, cerrado respecto de las operaciones de suma, multiplicación por constantes, producto y las operaciones $\bigcap_1^\infty f_n(\bigcup f_n)$ cuando la sucesión f_n tiene una minorante (mayorante) en M, que incluya a todas las funciones características de conjuntos $A \epsilon K$, y T una transformación con dominio M y rango en M que posea las propiedades a) - d) ([6]). Puesto que una $f = \varphi_A$, función característica de $A \epsilon K$, está caracterizada por la propiedad $f^2 = f$, c) implica que $T\varphi_A = \varphi_B$, y poniendo $TA = B$ tenemos una transformación entre conjuntos con dominio K y rango en K, que posee las propiedades A) y B). Además se ve que la condición b) es casi superflua y puede reemplazarse por la ampliación de a): $T(\lambda) = \lambda =$ función constante, que junto con c) y d) implica la linealidad de la T. Si ahora a partir de la T entre conjuntos así obtenida formamos la T entre funciones $f \rightarrow Tf$, según el procedimiento de arriba para *toda* f medible-K, tenemos una extensión de la T dada.

§ 2. - En un espacio E con una K y una transformación T entre conjuntos con las propiedades A) y B) vamos a introducir ahora una medida $m(A)$, no- negativa, completamente

([6]) Por ejemplo $L^2(m)$ es un tal conjunto M pero no lo es $L^p(m)$ si $p \neq 2$.

aditiva sobre K, $m(E)=1$, y vamos a obtener varias descomposiciones del espacio (teoremas 1, 2 y 3 del § 3).

Definición 1. $C \in K$ se dirá *no-creciente* si $TC \subset C$, luego también $T^n C \subset C$ para todo $n=1, 2, \dots$.

Definición 2. Llamaremos *cola del conjunto* $A \in K$ al conjunto $\bigcup_0^\infty T^i A$, y lo indicaremos con $c(A)$. Un conjunto es no-creciente sí y solo si es cola de sí mismo.

Definición 3. $H \in K$ se dirá *invariante* si $TH=H$.

Luego, H es invariante sí y solo si H y $E-H$ son no-crecientes, y los conjuntos invariantes forman un σ-cuerpo dentro de K.

Definición 4. Sea $A \in K$. Un conjunto invariante $H \supset A$ se dirá una *cápsula invariante* (relativa a m) de A, si $H' \supset A, H'$ invariante implica $m(H') \geqq m(H)$.

Dos cápsulas invariante de A, coinciden salvo medida nula. Luego salvo medida nula existe *la* cápsula invariante de A que indicaremos con $\{A\}$.

Definición 5. Diremos que $W \in K$ es un *viajero* (respecto de T) si para $i=1,2,\dots$ es $W \cap T^i W=0$ (ó equivalentemente $T^p W \cap T^{p+i} W=0, i=1,2,\dots$ y $p \geqq 0$). $W \in K$ *es viajero inicial* si es viajero y si $A \subset \{W\}$, $T^k A \subset c(W)$, para algún $k \geqq 0$, implican $m(A-c(W))=0$. Se comprueba enseguida que esta definición no depende del $\{W\}$ elegido.

Lema 1. Si $m(W \cap T^i W)=0, i=1,2,\dots$, *existe un viajero* $W' \subset W$ *con* $m(W-W')=0$.

Demostración. Basta poner $W'=W-\bigcap_1^\infty T^i W$.

Cabe considerar también viajeros respecto de T^n, n fijado, cuyas definiciones se obtienen de la definición 5 reemplazando T por T^n. Escribiremos respectivamente viajero, viajero-T^n.

Lema 2. Si W es viajero-T^n, W es unión numerable de viajero más, eventualmente, un conjunto de medida nula. Demostración. Sea k el máximo entero con la propiedad que existe un sistema de k enteros $0<i_1<\dots<i_k$ tal que $m(W \cap T^{i_1} W \cap \dots \cap T^{i_k} W)>0$. Si no existe ningún tal k es $m(W \cap T^i W)=0, i=1,2,\dots$ y basta aplicar el lema 1 para deducir la tesis. Si existe tal k es $k \leqq n$ pues entre $n+1$ enteros hay dos congruentes módulo n. Si ponemos $W_1=W \cap T^{i_1} W \cap \dots \cap T^{i_k} W$ resulta $m(W_1 \cap T^i W_1)=0$, $i=1,2,\dots$, pues $W_1 \cap T^i W_1$ es una intersección correspondiente a un sistema de por lo menos $k+1$ potencias de T. Luego por el lema 1 existe $W' \subset W_1$ viajero, $m(W') > 0$. Ahora $W - W'$ está en las condiciones de W y la inducción matemática termina la demostración.

Corolario. Si para algún n es $T^n A$ vacío, A es unión numerable de viajeros más un conjunto nulo.

Lema 3. Si W es viajero y $T^n A \subset c(W)$ entonces A es unión numerable de viajeros más un conjunto nulo. Demostración. Basta observar que $B = A \cap c(W)$ es unión de viajeros, y A-B es viajero-T^n pues $(A\text{-}B) \cap T^{ni}(A\text{-}B) \subset (A\text{-}B) \cap c(W) = 0$, luego el lema 2 termina la demostración.

Lema 4. Todo no-creciente C se descompone $C = H + C'$, $H \cap C' = 0, C' = c(W)$ cola de viajero, y H el máximo invariante contenido en C. Esta descomposición es única y $H = \bigcap_0^\infty T^i C, W = C - TC$. Demostración. Se comprueba fácilmente que el conjunto $H = \bigcap_0^\infty T^i C$ es invariante y $W = C - TC$ viajero, y que $C = H + c(W)$. Si se tiene otra tal descomposición $C = H' + \bigcup_0^\infty T^i W'$, debe ser $T^j C = H' + \bigcup_j^\infty T^i W'$, luego $W' = C - TC$ y $H = H'$.

Definición 6. Diremos que $C \epsilon K$ es *compresible* si para algún $n > 0$ es $T^n C \subset C$ y $m(C - T^n C) > 0$. Y que $C \epsilon K$ es *incomprensible* si no contiene ningún subconjunto compresible.

Lema 5. Si C no contiene ningún viajero de medida positiva, es incompresible. La recíproca vale siempre que C sea no-creciente. Demostración. La primera parte resulta de que si $T^n C \subset C, C - T^n C$ es viajero-T^n, y el lema 2. La recíproca, de que si W es viajero de medida positiva su cola es compresible pues $T(\bigcup_0^\infty T^i W) = \bigcup_1^\infty T^i W$.

Definición 7. Diremos que $D \epsilon K$ es *disipativo invariante* si es invariante y si es unión numerable de viajeros más (eventualmente) un conjunto de medida nula. Y que $D \epsilon K$ es un *disipativo inicial* si es la cola de un viajero inicial.

El disipativo inicial es un conjunto «invariante» en cierto sentido y unión numerable de viajeros. Para los disipativos invariantes vale un resultado análogo al que se tiene en la teoría de transformaciones puntuales:

Lema 6. Si D es disipativo invariante existe un viajero W tal que $D = \{W\}$. Demostración. Por definición $D = \bigcup_1^\infty W_n +$ conjunto nulo. Si ponemos $V_1 = W_1, V_2 = W_2 - \{W_1\}, V_3 = W_3 - (\{W_1\} + \{V_2\}), \ldots$, los $V_1, V_2, \ldots$, son viajeros, por ser partes de viajeros, y los conjuntos invariantes $\{V_i\}$, $i = 1, 2, \ldots$ son disjuntos y $D = \bigcup_1^\infty \{V_i\} = \{\bigcup_1^\infty V_i\}$. Además $W = \bigcup_1^\infty V_i$ es viajero.

Lema 7. Unión o intersección numerable de disipativos invariantes es disipativo invariante. La demostración es evidente.

Teorema 1. *E se descompone en tres conjuntos disjuntos, $E = E' + E'' + E'''$, donde E'' es el máximo disipativo invariante contenido en E, E''' es el disipativo inicial contenido en $E - E''$ de máxima medida, y E' es incompresible. Esta descomposición es la misma para cada $T^n, n = 1, 2, \ldots$.*

Demostración. En la tesis están involucradas las existencias de E'' y E''' como conjuntos máximos (naturalmente salvo medida nula). La existencia de E'' es consecuencia del lema 7. Sea C una unión numerable de viajeros $W \subset E - E''$.

Entre tales C hay uno C_0 de medida m máxima. Entonces $C_1 = c(C_0)$ realiza también la medida máxima, es unión de viajeros, es no-creciente y por el lema 4 se descompone en $C_1 = H + d(W)$. H es unión de viajeros luego disipativo invariante y puesto que $H \subset E - E''$ es $m(H) = 0$. Vamos a mostrar que W es un viajero inicial y que todo disipativo inicial contenido en $E - E''$ está contenido en $c(W)$, salvo medida nula. Sea $A \subset \{W\} \subset E - E''$ y $T^n A \subset c(W)$. Por el lema 3 A es unión de viajeros, y puesto que $A \subset E - E''$ es $m(A - C_1) = 0$, luego $m(A - c(W)) = 0$. Sea $D' = c(W') \subset E - E''$ otro disipativo inicial; por ser unión de viajeros es ya directamente $m(D' - c(W)) = 0$. Luego existe E''' y $E''' = c(W)$. En $E' = E - E'' - E'''$ no hay viajeros de medida positiva, luego por el lema 5 E' es incompresible. Sea ahora n positivo cualquiera. El conjunto $E'' + E'''$ construído respecto de T está caracterizado por ser una unión numerable de viajeros de medida máxima. Por el lema 2, $E_n'' + E_n'''$ (respecto de T^n) $= E'' + E'''$.

Vamos a probar que $E_n'' = E''$ salvo medida nula. El conjunto $E_n'' \cup T E_n'' \cup T^2 E_n'' \cup \ldots \cup T^{n-1} E_n''$ es invariante (respecto de T) y unión numerable de viajeros más conjunto nulo (lema 2). Luego resulta $m(E_n'' - E'') = 0$. Por otra parte $m(E'' - E_n'') = 0$ es consecuencia directa de las definiciones. Esto termina la demostración del teorema 1.

En general el rango de T es parte propia de K, es decir pueden existir conjuntos $B \in K$ tales que $TA = B$ no se verifica para ningún $A \in K$. Pero si el rango de T es todo K, todo $B \in K$ es de la forma $B = TA$ y por la condición B) entre los

A que verifican $TA = B$ hay uno de medida mínima. Este A mínimo, determinado salvo medida nula, se indicará con $T^{-1}B$. Luego si el rango de T es K se tiene $\{A\} = \bigcup_{-\infty}^{+\infty} T^i A$, y si W es viajero lo es también $T^{-1}W$.

Corolario 1. Si el rango de T es todo K, entonces E''' es vacío y $E = E' + E''$ siendo E' invariante incompresible, E'' disipativo invariante y $E'' = \bigcup_{-\infty}^{+\infty} T^i W$. La descomposición es ahora única. Demostración. Si el rango de T es K todo viajero $W \subset E - E''$ es de medida nula, puesto que $\{W\} = \bigcup_{-\infty}^{+\infty} T^i W \subset E - E''$ es un disipativo invariante luego debe tener medida nula; luego E''' es nulo. Si $E'_1 + E''_1 = E' + E''$ son dos descomposiciones, $E'_1 - E' = E'_1 \cap E''$ es invariante, unión de viajeros y si alguno de estos fuera de medida positiva, por el lema 5 $E'_1 \cap E''$ no sería incompresible, absurdo. Luego $m(E'_1 - E') = 0$. Finalmente la representación $E'' = \bigcup_{-\infty}^{+\infty} T^i W$ es consecuencia del lema 6.

Observación 1. Si $hP = Q$ es una transformación puntual con dominio E y rango en E tal que $h^{-1}A \in K$ si $A \in K$, entonces h origina una $T = T_h$ definida por $T_h A = h^{-1} A$. Si T_h tiene rango K y h rango E, entonces T_h es biunívoca; si además los puntos (es decir los conjuntos compuestos por un solo punto) están en K, también h es biunívoca.

Corolario 2 (teorema de retorno). *Sea de nuevo T arbitraria y $A \subset E'$. Para casi todo $P \in A$ vale $P \in \limsup T^n A$. Demostración.* Por el lema 4 es $c(A) = H + C'$, $C' = c(W)$, $H =$ invariante. Es inmediato que $H = \limsup T^n A$ y la cola C' es unión de viajeros, luego $A = A \cap (C' + H) = A \cap H$ salvo medida nula, pues E' no contiene viajeros de medida no nula.

Corolario 3. Si $f(P)$ es medible-K y mayor que cero en todo punto de E', entonces para casi todo $P \in E'$ es $\Sigma_1^\infty T^n f = \infty$ (véase § 1 para la definición de Tf). *Demostración.* Sea $k > 0$ entero y $E_k = E'\{P; f(P) \geqq 1:k\}$.

Entonces $f(P) \geqq 1/k\, \varphi_{E_k}(P)$, $T^n f(P) \geqq 1/k\, \varphi_{T^n E_k}(P)$. Por el corolario 2, casi todo P de E_k está en infinitos $T^n E_k$ luego, para esos P es $\Sigma_1^\infty T^n f(P) = \infty$.

Como $E' = \bigcup_1^\infty E_k$, resulta la tesis.

§ 3. - En este número introducimos los conceptos de singularidad y desigualdad por descomposición infinita que juegan un rol importante en la existencia de medidas invariantes.

Definición 8. Un conjunto $H \in K, m(H) > 0$, será llamado *invariante singular* si es invariante y es la cola de un conjunto de medida nula. Diremos que un $A \in K$ tiene *cola singular* si existen i, j, enteros no negativos tales que $m(T^i A) = 0$, $m(T^j A) > 0$.

Lema 8. *La unión numerable de invariantes singulares es invariante singular.*

Lema 9. *Si A tiene cola singular el H de la descomposición de c(A) (lema 4) es un invariante singular. Demostración.* Sea i tal que $m(T^i A) = 0$. Entonces $H \subset \bigcup_{k=0}^{\infty} T^{i+k} A$, $H = \bigcup_{k=0}^{\infty} T^{i+k} A \cap H = \bigcup_{k=0}^{\infty} T^k [T^i(A \cap H)]$ y $m(T^i(A \cap H)) = 0$.

Definición 9. $E_1 \in K$ se dirá *no-singular* si $m(T^i A \cap E_1) > 0$ para algún par, i entero $\geqq 0, A \in K$, implica $m(T^j A \cap E_1) > 0$ para todo $j \geqq 0$.

Teorema 2. *Con la notación del teorema 1, E admite una descomposiciöón $E = E'_1 + S + E'' + E_1'''$ en cuatro conjuntos disjuntos donde S es el máximo invariante singular contenido en E—E'', $E_1''' = E'''$—S es disipativo inicial y $E'_1 = E' - S$ es incompresible y no singular.*

Demostración. La existencia de S es consecuencia del lema 8. Que E_1''' es disipativo inicial resulta de ser no-creciente con un razonamiento igual al usado en el teorema 1. Además, si $A \subset E - E''$ tiene cola singular y (lema 4) $c(A) = H + C'$, por el lema 9 es $m(H - S) = 0, m(C' - E''') = 0$, luego $m(c(A) - (S + E_1''')) = 0$.

Este hecho lo usaremos para probar lo que falta de la tesis. Sea $A \in K$ tal que $m(A \cap E'_1) = 0$. Probaremos que $m(T^n A \cap E'_1) = 0, n = 1, 2, \ldots$ Si fuera $m(T^n A \cap E'_1) > 0$ para un $n > 0$, puesto que $S + E'' + E_1'''$ es no-creciente es $T^n(A \cap E'_1) \supset T^n A \cap E'_1$, luego $A \cap E'_1$ tiene cola singular y por el hecho citado la cola está contenida salvo medida nula en $S + E_1'''$, contradiciendo $m(T^n A \cap E'_1) > 0$. Sea ahora $A \in K$ tal que $m(A \cap E'_1) > 0$, y $m(T^n A \cap E'_1) = 0$. Si ponemos $B = A \cap E'_1$ es $m(B \cap T^n B) = 0$, y por lo recién demostrado $m(T^{pn} A \cap E'_1) = 0, p = 1, 2, \ldots$, luego $m(B \cap T^{pn} B) = 0, p = 1, 2, \ldots$, y por el lema 1 existe $B' \subset B, m(B - B') = 0, B'$ viajero $-T^n$. Por el lema 2 entonces es $m(B' - (S + E'' + E_1''')) = 0$, lo que contradice $B' \subset E'_1, m(B') > 0$. Con esto queda terminada la demostración de la no-singularidad de E'_1.

Corolario 4. Si el rango de T es todo K es $E=E'_1+S+E''$ y los tres conjuntos son invariantes.

Definición 10. Diremos que $A \in K$ *es recubrible* $-\infty$ si existe una sucesión de conjuntos disjuntos dos a dos $A^n \in K$ tal que para cada $n=1,2,\ldots$ hay una partición de A^n, $A^n=\Sigma_{i=1}^{\infty} A_i^n$, $A_i^n \cap A_j^n=0$ si $i \neq j$, y una sucesión de enteros no negativos $k_1, k_2, \ldots$ tal que $\bigcup_{i=1}^{\infty} T^{k_i} A_i^n \supset A$. Esta situación podemos expresarla también diciendo que A es menor por descomposición infinita que cada $A^n, n=1,2,\ldots$. Si solo se permiten un número finito de A_i^n para cada n, diremos que A es *recubrible* o que es menor por descomposición finita que cada A^n, $n=1,2,\ldots$. Puede verse simplemente que si A es recubrible-∞, existe una sucesión $B_n \subset A, m(A-B_n) \to 0$, y cada B_n recubrible; esta observación reduce a uno mismo el papel que juegan estos conjuntos en lo que sigue.

Definición 11. Un conjunto invariante será llamado *invariante recubrible* si es unión numerable de conjunto recubribles, más un conjunto de medida nula.

Lema 10. Unión o intersección numerable de invariantes recubribles es invariante recubrible.

Con la notación de los teoremas 1 y 2 podemos pues enunciar:

Teorema 3. *E se descompone en $E=E'_2+E''+S+R+E_2'''$, los cinco conjuntos disjuntos, R el máximo invariante recubrible contenido en $E-(E''+S)$ (lema 10), $E_2'''=E_1'''-R$ disipativo inicial, y $E'_2=E'_1-R$ no contiene ningún viajero no-nulo, es incompresible, no-singular y no contiene ningún conjunto recubrible no nulo.*

Demostración. Solo falta ver que E'_2 no contiene recubribles de medida positiva. Sea $A \subset E'_2$ recubrible. Es fácil ver que $c(A)=\bigcup_0^{\infty} T^i A$ es también recubrible; para ello basta subdividir la sucesión de los números naturales en infinitas subsucesiones $\{n_i^1\}, \{n_i^2\} \ldots \{n_i^k\}, \ldots$, luego poner $B^k=\bigcup_{i=1}^{\infty} A^{n_i^k}$ donde A^n es la sucesión de la definición 10. Reemplazando en la definición 10 los A^n por los B^k resulta inmediatamente que $c(A)$ es recubrible. Por el lema 4, $c(A)=H+C', H$ es invariante recubrible y C' cola de viajero. Luego $m(H-R)=0$.

Corolario 5. Si T tiene rango K, $E=E'_2+E''+S+R$, siendo las cuatro componentes invariantes. Si T es además no-

singular (es decir $m(A)=0$ implica $m(TA)=0$) queda $E=E'_2+E''+R$. Si todavía vale en E el teorema del retorno (corolario 2) es $E=E'=E'_2+R$.

Observación 2. Que en el último caso puede ser $m(R)>0$ y aún en el caso de $T=T_h$ (observación 1), h transformación puntual biunívoca de E sobre E, es el contenido de un ejemplo de P. Halmos (Annals of Math. 1947, págs. 735-55).

Corolario 6. Si T tiene rango K y todo conjunto invariante tiene medida 1 ó 0, E debe ser de uno de los cuatro tipos especificados en el corolario 5.

Observación 3. Insistamos todavía en que la descomposición final del teorema 3 no es única y presenta ciertas arbitrariedades tales como: E'' y S pueden contener conjuntos recubribles, R y S pueden contener viajeros, E'' y R pueden contener conjuntos con colas singulares. La utilidad de esta descomposición será clara en los §§ siguientes.

§ 4. - La validez de los teoremas ergódicos en $L^1(m)$ está vinculada a la existencia de medidas invariantes ligadas a m de cierta manera, como fué mostrado por Y. N. Dowker (o.c) para el caso más simple de transformaciones puntuales biunívocas. Falta sin embargo un tratamiento armónico en donde aparezcan condiciones necesarias y suficientes. Los teoremas 4, 5 de este número y 6, 7 del § 5 expresan bastante claramente las situaciones que pueden presentarse en el caso general de transformaciones de conjuntos arbitrarias.

Definición 12. Si μ es una medida definida sobre K, completamente aditiva, no-negativa, $\mu(E)=1$, escribiremos $\mu\in M^*$ (μ posee la propiedad M^*) para significar: 1) $m(A)=0$ implica $\mu(A)=0$; 2) H invariante, $\mu(H)=0$, implican $m(H)=0$; 3) $\mu(A)=\mu(TA)$.

Escribiremos $\mu\in M$ si $\mu\in M^*$ y además $\mu(A)=0$ implica $m(A)=0$.

Para lo que sigue conviene tener en cuenta el hecho bien conocido que la condición $\mu(A)=0$ implica $m(A)=0$ es equivalente a la siguiente: dado $\varepsilon>0$ existe un $\delta>0$ tal que $\mu(A)<\delta$ implica $m(A)<\varepsilon$.

Lema 11. Si el rango de T es K, entonces $M^*=M$ (pudiendo ser vacío).

Demostración. Si $\mu\in M^*$ y $\mu(A)=0$, poniendo $H=\cup_{-\infty}^{+\infty}T^iA$, es H invariante y $\mu(H)=0$, luego por M^* es $m(H)=0, m(A)=0$.

Lema 12. Si existe una $\mu \in M^*$ *es* $\mu(E'_2) = 1$, $m(E'_2 + E_2''') = 1$, $m(E'_2) > 0$, *y si* $A \subset E'_2$, $\mu(A) = 0$ *es equivalente a* $m(A) = 0$. *Demostración.* Por la naturaleza de S, R, E'' y E_2''' es $\mu(S) = \mu(R) = \mu(E'') = \mu(E_2''') = 0$, y por M^* es $m(S) = m(R) = m(E'') = 0$. Finalmente si $A \subset E'_2$ y $\mu(A) = 0$ es $\mu(c(A)) = 0$. Si $c(A) = H + C'$ es la descomposición del lema 4, es $m(H) = 0$ y $m(C' \cap E'_2) = 0$. Luego $m(A) = m(A \cap H) + m(A \cap C') = 0$.

Lema 13. Sea $\mu(A)$ *una medida no-negativa, completamente aditiva sobre* K, $\mu(E) = 1$, $\mu(A) = \mu(TA)$. *Si además* $m(A) = 0$ *implica* $\mu(A) = 0$ *y para cada* H *invariante* $\mu(H) = 0$ *implica* $m(H \cap (E' + E'')) = 0$, *entonces* $\mu \in M^*$.

Demostración. Sea H invariante y $\mu(H) = 0$. Entonces por la hipótesis $m(H \cap (E' + E'')) = 0$. Luego $m(H - E''') = 0$, y H es unión de viajeros más conjunto nulo, es decir H es disipativo invariante, luego $m(H - E'') = 0$, que con $m(H - E''') = 0$ y $E'' \cap E''' = 0$ da $m(H) = 0$, l. q. d. d.

Definición 13. Diremos que T es *equicontinua* (respecto de m) relativa a $B \subseteq E$ si para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que cualquiera sea $A \in K$ con $m(A) < \delta$ es $m((T^n A) \cap B) < \varepsilon$, para todo $n \geqq 0$. T es *equicontinua en media* relativa a $B \subseteq E$ si para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ (independiente de A) tal que $m(A) < \delta$ implica

$$\text{lím sup}\, n^{-1} \Sigma_1^n\, m[(T^i A) \cap B] < \varepsilon. \quad (*)$$

T es *biequicontinua en media* relativa a $B \subset E$ si es equicontinua en media y si dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ (independiente de A) tal que (*) implica $m(A \cap B) < \varepsilon$. Si $B = E$ omitiremos «relativo a E».

Teorema 4. *Las siguientes propiedades son equivalentes.*

A_1) *Existe* $\mu \in M^*$ *(es decir* M^* *es no vacío).*

A_2) $m(S) = m(R) = m(E'') = 0$.

A_3) *T es equicontinua en media relativa a* $E - E_2'''$.

A_4) 1. *Si* $f(P)$ *es medible-K y acotada existe el límite «ergódico»*

$$\text{lím}\, n^{-1} \Sigma_1^n T^i f(P) = f^*(P) \quad (n \to \infty)$$

para casi todo $P \in E - E_2'''$, *que por tanto es una función me-*

dible-K acotada, definida sobre $E-E_2'''$. 2. *Si* φ_A *es la función característica de* $A \in K$, *dado* $\varepsilon > 0$ *existe* $\delta > 0$, *independiente de* A, *tal que*

$$m(A) < \delta \quad \textit{implica} \quad \int_{E-E_2'''} (\varphi_A)^* \, dm < \varepsilon.$$

A_5p) 1. *Si* $f(P)$ *es medible-K y acotada,* $p \geqq 1$ *real, existe una* $f^*(P)$ *medible acotada,* definida *en* $E-E_2'''$ *tal que*

$$\int_{E-E_2'''} |n^{-1} \Sigma_1^n T^i f - f^*|^p \, dm \to 0 \qquad (n \to \infty).$$

2. *La análoga a 2, del* A_4).

Si se cumple alguna de las A_i), *existe el límite*

$$\text{lím}\, n^{-1} \Sigma_1^n m[(T^i A) \cap (E - E_2''')] = \mu(A)$$

y $\mu \in M^*$.

Demostración. A_1) *implica* A_2). Es consecuencia del lema 12. A_2) *implica* A_3). Tenemos $E = E'_2 + E_2'''$. Supongamos que A_3) no se cumpla, entonces existe una sucesión $A_n \in K$, tal que poniendo $B_n = T^{i_n} A_n$ se tiene para ciertos i_n, $m(A_n) \to 0$, $m(B_n - E_2''') > a > 0$. Supongamos que los A_n han sido elegidos tan rápidamente decrecientes que $m(A_n \cap \bigcup_{n+1}^\infty A_i) < \delta_n$; donde δ_n es tal que $m(A) < \delta_n$ implica $m(T^{i_n} A - E_2''') < a : 2$, esto último siendo posible porque por ser E'_2 no-singular, fijado n, $m(A \cap E'_2) = 0$ implica $m(T^n A \cap E'_2) = 0$, luego $m(T^n A \cap E'_2)$ puede considerarse como una medida absolutamente continua respecto de la m. Esto permite suponer que los A_n son disjuntos dos a dos pues basta reemplazar A_n por $A_n - \bigcup_{n+1}^\infty A_i$; supongamos pues que los A_n desde el principio son disjuntos. Sea $C = \text{lím sup}\,(B_n - E_2''')$ y $0 < n_1 < n_2 < \ldots \leq n_k < \ldots$ tales que $m[C - \bigcup_{n_k}^{n_{k+1}} (B_n - E_2''')] < \varepsilon_k$ con $\Sigma_1^\infty \varepsilon_k < a : 2$. Entonces $C_0 = \bigcap_k \{\bigcup_{n_k}^{n_{k+1}} (B_n - E_2''')\}$ tiene medida $m(C_0) > a - a : 2 > 0$ y es recubrible, precisamente, es menor por descomposición finita que cada $A^k = \Sigma_{n_k}^{n_{k+1}} A_n$, ya que

$$\bigcup_{n_k}^{n_{k+1}} T^{i_n} A_n = \bigcup_{n_k}^{n_{k+1}} B_n \supset \bigcup_{n_k}^{n_{k+1}} (B_n - E_2''') \supset C_0.$$

Como por hipótesis $E = E'_2 + E_2'''$ y $C_0 \subset E'_2$, $m(C_0) > 0$, tenemós una contradicción, pues E'_2 no contiene conjuntos recubribles de medida positiva.

A_3) *implica* A_1). Para cada $f(P)$ medible-K y acotada pongamos

$$M(f) = \text{lím sup}\, n^{-1}\, \Sigma_1^n \int_{E-E_2'''} (T^i f)\, dm.$$

$M(f)$ posee las siguientes propiedades: 1.º) $M(f-Tf)=0$, 2.º) $M(f'+f'') \leqq M(f')+M(f'')$; 3.º) si $\lambda \geqq 0, M(\lambda f)=\lambda M(f)$; 4.º) $M(\varphi_E)=1$. Sea $\mu(f) \leqq M(f)$ una funcional lineal dada por el teorema de extensión de Hahn-Banach (Banach, Théorie des operations lineaíres, pág. 27) con $\mu(\varphi_E)=1$. Entonces $\mu(f)= \mu(Tf)$ por 1º). Si $f=Tf$ es $\mu(f)=M(f)$ y en particular si H es invariante $\mu(\varphi_H)=M(\varphi_H)$.

Por la hipótesis A_3) dado $\varepsilon>0$ existe $\delta>0$ tal que $m(A)<\delta$ implica $M(\varphi_A)<\varepsilon$ luego $\mu(\varphi_A)<\varepsilon$. Luego si ponemos $\mu(A)= \mu(\varphi_A), \mu$ es una medida completamente aditiva que satisface las condiciones del lema 13, luego $\epsilon\, M^*$.

A_1) *implica* A_4). Aquí meramente hacemos uso del teorema ergódico de Birkhoff-Khintchine en la forma dada por Doob (o. c.) que es aplicable en nuestro caso en que existe una $\mu \epsilon M^*$ invariante. Luego existe un conjunto $N \subset E$, $\mu(N)=0$ tal que fuera de N existe el límite ergódico de A_4) y en N no existe.

Por el lema 12 es $m(N \cap E-E_2''')=0$ y queda probado 1. Si indicamos con f^* al límite originado por f, como por el lema 12 es $\mu(E_2'')=1$ y dado $\varepsilon'>0$ existe $\delta>0$ tal que $m(A)<\delta$ implica $\mu(A \cap E'_2)<\varepsilon'$, del teorema ergódico sigue $\int_{E'_2} (\varphi_A)^*\, d\mu = \int_{E'_2} \varphi_A\, d\mu = \mu(A \cap E'_2) < \varepsilon'$.

Y por el mismo lema 12, dado $\varepsilon>0$ existe $\varepsilon'>$ tal que $\int_{E'_2}(\varphi_A)^*\, d\mu<\varepsilon'$ implica $\int_{E'_2}(\varphi_A)^*\, dm<\varepsilon$. A_4) *implica* $A^p{}_5$). Es el teorema de paso al límite bajo la integral. $A_5{}^p$) *implica* A_3). Como $m(E)=1$ existe el límite

$$\text{lím}\, n^{-1}\, \Sigma_1^n\, m\,[(T^i A) \cap (E-E_2''')] = \int_{E-E_2'''} (\varphi_A)^*\, dm = M(A)$$

y la parte 2 de $A_5{}^p$) dice que M(A) tiende a cero uniformemente en A si $m(A)$ tiende a cero, lo que es la equicontinuidad en media.

Corolario 7. Si el rango de T es todo K son equivalentes *las siguientes condiciones*: 1) *existe* $\mu \in M^*$; 2) *existe* $\mu \in M$; 3) $m(S)=m(R)=m(E'')=0$; 4) $m(S)=m(R)=m(E'')=m(E_2''')=0$; 5) *$T$ es equicontinua en media*; 6) *T es equicontínua*; 7) *se verifica la condición A_4) reemplazando $E-E_2'''$ por E, es decir el teorema ergódico individual vale en todo E*; 8) *vale $A_5 p$) en todo E.*

Observación 4. La operación que *a f* medible y acotada hace corresponder la función medible y acotada $f^*=T^*f$, no tiene porqué ser acotada o contínua en $L_1(m)$. La condición 2 de 7), Corolario 7, es un poco más débil que la continuidad de T^* (ver § 5 donde la continuidad de T^* juega un rol análogo a 2 de 7)).

Corolario 8. Si $T=T_h$ (ver observación 1), son equivalentes las condiciones: 1), 3), 5), 7), 8) *del corolario precedente.*
Demostración. Solo falta probar que en este caso la condición 1) del corolario precedente implica la 7). Para ello observemos que en el caso actual dado $P \in E$ existen P' y P'' tales que $hP'=P, hP=P''$, luego las medias $n^{-1}\Sigma_1^n T^i f(P), n^{-1}\Sigma^n T^i f(P'), n^{-1}\Sigma^n T^i f(P'')$, tienen límites iguales simultáneamente o no tienen límite también simultáneamente. Luego el conjunto N de la demostración del teorema 4 es invariante. Análogamente es invariante el conjunto de los puntos P en que $\varphi_A{}^*(P) \geqq \delta > 0$. De esta observación y de $\mu \in M^*$ se deduce fácilmente que $m(N)=0$ y la parte 2 de A_4) para E.

Teorema 5. *Las siguientes propiedades son equivalentes.*

B_1) *Existe* $\mu \in M$; B_2) $m(S)=m(R)=m(E'')=m(E_2''')=0$;
B_3) *T es biequicontinua en media;*
B^i_4) *Sea $i \geqq 0$ entero. Dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$, independiente de A, tal que $m(T^i A) < \delta$ implica $m(T^j A) < \varepsilon$, $j=1,2,\ldots$*
B_5) 1. *Sea $f(P)$ medible-K y acotada. Para casi todo $P \in E$ existe*

$$\lim n^{-1}\Sigma_1^n T^i f(P) = f^*(P).$$

2. *$m(A_n) \to 0$ es equivalente con $\int_E (\varphi_{A_n})^* dm \to 0$ $(n \to \infty)$.*
$B_6 p$) *Sea $p \geqq 1$ real.* 1. *Si $f(P)$ es medible acotada, existe $f^*(P)$ de igual naturaleza tal que $\int_E |n^{-1}\Sigma_1^n T^i f - f^*|^p dm \to 0$.*
2. *igual a 2 de B_5).*

Si se verifica cualquiera de las B_i) existe

$$\lim n^{-1} \Sigma_1{}^n m(T^i A) = \mu(A)$$

y $\mu \in M$, $\int_E |T f^* - f^*| \, dm = 0$

Salvo pequeños detalles la demostración es completamente análoga a la del teorema 4 y la omitimos.

Corolario 9. Si el rango de T es K las condiciones A_i), Bi) y las del corolario 7 son equivalentes dos a dos.

El teorema 5 contiene el teorema de E. Hopf (l. c.) así como también nuestra nota (l. c.); el núcleo singular de allí está contenido en $E - E'_2$.

§ 5. - Ahora consideraremos una transformación entre funciones Tf, con las propiedades a) - d) del § 1. Como vimos allí, Tf puede suponerse deducida de una transformación entre conjuntos. Vamos a agregar a T la condición siguiente: *que T «opere» sobre $L^1(m)$*, de modo que si $\int_E |f| dm < \infty$ entonces $\int_E |Tf| dm < \infty$, y si $\int |f| \, dm = 0$ también $\int |Tf| dm = 0$.

(Se puede ver fácilmente que la última condición es consecuencia de la primera si m es no-atómica y T posee inversa). En particular la nueva condición introducida impide la existencia de colas singulares (§ 3), es decir T es no-singular en el sentido que $m(A)=0$ implica $m(TA)=0$, luego $m(S)=0$. Además T resulta continua en $L^1(m)$, como lo muestra el lema siguiente, probado por N. Dunford y D. S. Miller (l. c.) en el caso particular de $T = T_h$.

Lema A. Si Tf verifica las condiciones a) - d) y $f \in L^1(m)$ implica $Tf \in L^1(m)$, entonces Tf es una operación lineal continua de $L^1(m)$ en $L^1(m)$, y en particular existe k tal que $m(TA) \leqq k \, m(A)$, independientemente de $A \in K$.

Demostración. Suponiendo lo contrario existirá una sucesión $f_n \in L^1(m)$ tal que $\int |f_n| \, dm \leqq 1 : 2^n$ y $\int |Tf_n| dm > a > 0$; podemos además elegir las f_n de modo que se verifique $|f_n(P)| \to 0$ y $\sup_n |f_n(P)| < \infty$ para *todo* P.

Poniendo $f(P) = \sup |f_n(P)|$, se tiene entonces $f \in L^1(m)$ y en virtud de d), $Tf = \sup |Tf_n|$, $Tf_n(P) \to 0$. Por hipótesis resulta $Tf \in L^1(m)$, luego es aplicable el teorema de Lebesgue del límite y se obtiene $\int |Tf_n| \, dm \to 0$, que contradice lo supuesto.

Definición 14. Sea μ una medida completamente aditiva sobre K, no-negativa, $\mu(E)=1$, y sea $I_\mu(f)=\int_E f d\mu$ la integral correspondiente. Escribiremos $I_\mu \in I_m{}^*$ si 1º) $L^1(m) \subset L^1(\mu)$ (como espacios de funciones de punto), 2º) $I_m(|f|)=0$ implica $I_\mu(|f|)=0$, 3º) $I_\mu(Tf)=I_\mu(f)$, 4º) si $f \geqq 0$, $Tf=f$, $f \in L^1(m)$ y $I_\mu(f)=0$ entonces $I_m(|f|)=0$. Pondremos $I_\mu \in I_m$ si $I_\mu \in I_m{}^*$ y además $I_\mu(|f|)=0$ implica $I_m(|f|)=0$.

Lema 14. Si $Tf=f$, el conjunto $E\{P; f(P) \geqq \lambda\}$ es invariante para todo λ real. Demostración. Puesto que $T(\lambda)=\lambda$ basta hacer la demostración para $\lambda=0$.

Sea $A_n=E\{P; f(P) \geqq 1:n\}$, $B_n=E\{P; -f(P) \geqq 1:n\}$, y $C=E\{P; f(P)=0\}=E\{P; |f(P)|=0\}$. Si ponemos $A=\cup_1^\infty A_n$, $B=\cup_1^\infty B_n$, A, B, C son disjuntos y $E=A+B+C$. De $|f|=f \cup 0+(-f) \cup 0$ sigue $T(|f|)=|f|$.

De aquí y de $\varphi_C \cap |f|=0$ sigue que $T\varphi_C \cap |f|=0$, luego, puesto que $T\varphi_C=\varphi_{TC}$ que $TC \subset C$ y C es no-creciente. Además $A_n+B_n=E\{P; |f(P)| \geqq 1:n\}$.

Luego $|f(P)| \geqq 1:n\, \varphi_{A_n+B_n}$ que con $T(|f|)=|f|$ da $|f(P)| \geqq 1:n\, \varphi_{TA_n+TB_n}$ y por tanto $TA_n+TB_n \subset A_n+B_n$. Luego $T(A+B) \subset A+B$ y $A+B$ es no-creciente.

Luego $E=TA+TB+TC$ da $TC=C$. Análogamente se prueba $TA_n \subset A_n$, $TB_n \subset B_n$, luego $TA \subset A$, $TB \subset B$, que con $T(A+B)=A+B$ da $A=TA$, $B=TB$, c. d. d.

Lema 15. $I_\mu \in I_m{}^*$ si y solo si $\mu \in M^*$ y $L^1(m) \subset L^1(\mu)$. Demostración. Una parte es trivial. Para la otra probamos 2º) de la definición 14. Si $f \geqq 0$, $I_m(|f|)=0$ es $m[E\{P; |f(P)|>0]=0$, luego $\mu[E\{P; |f(P)|>0]=0$, por M^*; luego $I_\mu(|f|)=0$. Análogamente sigue 4º) teniendo en cuenta el lema precedente, y 3º) es consecuencia directa de la definición de la integral.

De los lemas 15 y 11 sigue inmediatamente el

Lema 16. Si el rango de T contiene a las funciones características φ_A y si $I_\mu \in I_m{}^*$, entonces $I\mu \in I_m$.

Definición 15. Driemos que I_m es *equicontinua en media* relativa a $B \subset E$, si dado $\varepsilon>0$ existe $\delta>0$ independiente de f tal que $I_m(|f|) \leqq \delta$ implica $\text{lím sup}\, n^{-1} \Sigma_1^n \int_B T^i |f|\, dm < \varepsilon$; si además, dado $\delta>0$ existe $\varepsilon>0$ independiente de f tal que vale la implicación inversa, diremos que I_m es *biequicontínua* en media relativa a B. Diremos que I es *equilipschitziana* (*biequilipschitziana*) en media relativa a B, si existe una constante k (dos constantes k, k') independientes de f, tal que $k\int_E |f|dm \geqq \int_B n^{-1}\Sigma_1^n T^i|f|dm$ $(\geqq k' \int_B |f|dm)$.

Si $B=E$ omitiremos «relativa a E».

Observación 5. Es fácil ver que la equilipschitzianidad en media equivale a

$$(*) \quad n^{-1} \Sigma\, m(T^i A \cap B) \leqq k\, m(A).$$

Enseguida veremos (teorema 6) que la equicontinuidad y equilipschitzianidad en media son equivalentes.

Definición 16. Diremos que $f \geqq 0, f \in L^1(m)$ es *recubrible* si existen $z_n \geqq 0$, $z_n \in L^1(m), \Sigma_1^\infty z_n \in L^1(m)$ tales que para cada $n=1,2,\ldots$ hay sucesión finita de funciones $g_n^1, g_n^2, \ldots g_n^k$; $g_n^i \in L^1(m), g_n^i \geqq 0$, y una sucesión de números enteros $0 < n_1, \ldots n_k$ tales que: $z_n = \Sigma_1^k g_n^i, f(P) \leqq \Sigma_{i=1}^k T^{n_i} g_n^i(P), P \in E$.

T e o r e m a 6. *Son equivalentes las siguientes propiedades.*

F_1) *Existe* $I_\mu \in I_m^*$;
F_2) *Si* $f \geqq 0, f \in L^1(m)$ *es recubrible, entonces* $\int_{E-E_2'''} f dm = 0$;
F_3) I_m *es equicontinua en media relativa a* $E - E_2'''$;
F_4) *Para cada* $f \in L^1(m)$ *existe* $\lim n^{-1} \Sigma_1^n \int_{E-E_2'''} T^i f\, dm < \infty$;
F_5) I_m *es equilipschitziana en media relativa a* $E - E_2'''$;
F_6) *Dada* $f \in L^1(m)$, *para casi todo* $P \in E - E_2'''$ *existe el* $\lim n^{-1} \Sigma_1^n T^i f(P) = f^*(P)$ *y* $\int_{E-E_2'''} f^* dm < \infty$;
$F_7{}^p$) *Dada* $f \in L^p(m)$ *existe* $f^* \in L^p(m)$ *tal que*

$$\int_{E-E_2'''} |n^{-1} \Sigma_1^n T^i f - f^*|^p\, dm \longrightarrow 0.$$

Si se verifica alguna de las F_i), *la función* f^* *verifica*

$$I_\mu(|f|) = \int_{E-E_2'''} |f^*| dm \leqq k \int_E |f|\, dm \quad (k \text{ independiente de } f)$$

y es $I_\mu \in I_m^*$.

Observación 6. La acotación última juega el rol de las partes 2 de A_4) y $A_5{}^p$) del teorema 4. En este caso es ya *consecuencia* de la existencia del límite ergódico, porque el espacio de las f donde el límite existe es ahora completo, luego aplicable el teorema de Banach-Steinhaus.

Demostración. F_1) *implica* F_2). Si $f \geqq 0$ es recubrible es

$I_\mu(f)=0$, luego $f=0$ salvo un conjunto A con $\mu(A)=0$; de los lemas 15 y 13 sigue $m(A-E_2''')=0$, l. q. d. d.

F_2) *implica* F_3). Supongamos lo contrario, entonces existen $f_n \geqq 0$ tales que $\int_E f_n\, dm \leqq \varepsilon_n$, $\Sigma_1^\infty \varepsilon_n < \infty$, lím sup $k^{-1} \Sigma_1^k \int_{E-E_2'''} T^i f_n > a > 0$, $n=1, 2, \ldots$

Luego para cada n existe un i_n tal que si $g_n = T^{i_n} f_n$ es $\int_{E-E_2'''} g_n\, dm > a$.

Sea $\overline{g} = \text{lím sup}\, g_n$, y $g^*(P)$ una función acotada medible tal que $0 \leqq g^* \leqq \overline{g}$ y $\int_{E-E_2'''} g^* dm > a:2$. Sea $\varphi_n = g_n \cap g^*$ de modo que lím sup $\varphi_n = g^*$. Sea $n_1 < n_2 < \ldots n_k < \ldots$ una sucesión creciente de enteros positivos tal que si

$$\phi_k = \bigcup_{n_k}^{n_{k+1}} \varphi_i \quad \text{es} \quad \int_{E-E_2'''} \phi_k\, dm > \int_{E-E_2'''} g^* - a:4$$

y pongamos $g = g^* - \bigcup_1^\infty (g^* - \phi_k)$ de modo que todas las funciones que han aparecido hasta ahora son no-negativas. De las definiciones resulta

$$\int_{E-E_2'''} g\, dm > \int_{E-E_2'''} g^*\, dm - \int_{E-E_2'''} (g^* - \phi_k)\, dm >$$
$$> \int_{E-E_2'''} g^*\, dm - a:4 > a:4.$$

Esto contradice al hecho que g es recubrible, pues

$$g \leqq \phi_k \leqq \Sigma_{n_k}^{n_{k+1}} \varphi_n \leqq \Sigma_{n_k}^{n_{k+1}} g_n = \Sigma_{n_k}^{n_{k+1}} T^{i_n} f_n,$$

y como sucesión z_k de la definición 16 puede tomarse $z_k = \Sigma_{nk}^{nk+1} f_n$, ya que por hipótesis $\Sigma_1^\infty z_k \leqq \Sigma_1^\infty f_n \in L^1(m)$.

F_3) *implica* F_1). Pongamos $M(f) = \text{lím sup}\, n^{-1} \Sigma^n \int_{E-E_2'''} T^i f\, dm$ para cada $f \in L^1(m)$.

Entonces se verifican 1º) - 4º) del teorema 4; para ver la 1º), sea $\varepsilon > 0$ dado y $\delta > 0$ el dado por la equicontinuidad. Sea λ_0 tal que poniendo $f_2(P) = f(P)$ donde $f(P) > \lambda_0$ y $f_2(P)=0$ en los demás P sea $\int_{E-E_2'''} |f_2|\, dm < \delta$. Calculemos $M(f-Tf)$ poniendo $f = f_2 + (f - f_2) = f_2 + f_1$. Es

$$n^{-1} \Sigma_1^n \int_{E-E_2'''} T^i(f-Tf)\, dm = .$$
$$n^{-1} \int_{E-E_2'''} (Tf_1 - T^{n+1} f_1)\, dm + n^{-1} \Sigma_1^n \int_{E-E_2'''} T^i(f_2 - Tf_2)\, dm.$$

El primer sumando tiende a cero con $n \to \infty$, pues f_1 es acotada, y el segundo tiene un lím sup menor en valor absoluto que 2ε. Luego $|M(f-Tf)|<2\varepsilon$. Sea $F(f)\leqq M(f)$ una funcional lineal con $F(\varphi_E)=1$. Por el lema 15 basta entonces ver que si $\mu(A)=F(\varphi_A)$ es $\mu\in M^*$ y F es la integral generada por μ; la verificación de esto último es fácil y dejamos los detalles al lector.

F_1) *implica* F_6). Igual que en el teorema 4. F_6) *implica* F_7p), inmediato. F_7p) *implica* F_5). Sea U el operador proyección con dominio $L_1(m)$ y rango en $L^1(m)$ que a cada f hace corresponder la función $Uf=f$ si $P\in E-E_2'''$ y cero en caso contrario. Pongamos, $n^{-1}\Sigma_1^n UT_i=U_n$; F_7p) dice que la sucesión de operadores acotados U_n es convergente en cada f hacia la función igual a f^* en $E-E_2'''$ y nula en E_2'''. Por el teorema citado de Banach-Steinhaus las normas $\|U_n\|$ son acotadas uniformemente, es decir existe k independiente de f y de $i=1,2,\ldots$ tal que $\int_E |U_n(f)|\,dm\leqq k\int_E |f|\,dm$.

Siendo $T^i f\geqq 0$ si $f\geqq 0$ resulta F_5). F_5) *implica* F_3) y F_6) *implica* F_4), evidente. F_4) *implica* F_3). Neguemos la equicontinuidad en media; entonces existen $f_k\geqq 0, \int_E f_k\,dm<\varepsilon_k, \Sigma_1^\infty \varepsilon_k<\infty$, $\lim n^{-1}\Sigma_1^n \int_{E-E_2'''} T^i f_k\,dm\geqq a>0$.

Luego este límite para la función $\Sigma_1^\infty f_k\in L^1(m)$ será infinito, contra F_4).

De este teorema y el lema 16 sigue inmediatamente el

Corolario 10. Si el rango de T contiene a las funciones características de los conjuntos $A\in K$, son equivalentes las siguientes propiedades: F_1); F'_2) *existe* $I_\mu\in I_m$, *más aún* $I_m=I_m^*$; F'_3) I_m *es equicontinua en media;* F'_4) I_m *es equilipschitziana en media;* F'_5) $m(T^n A)\leqq k\,m(A)$, k *independiente de* A *y* n. F'_6) *vale el teorema ergódico individual en* $L^1(m)$; F'_7) *vale el teorema ergódico medio en* $L^p(m), p\geqq 1$. *Si para cada* $f\in L^p(m)$ *ponemos* $T^*f=f^*$, *el operador* T^* *es acotado, su rango es el espacio lineal cerrado de las* $f\in L^p(m)$ *medible respecto del* σ*-cuerpo de los conjuntos invariantes* (lema 14).

En este corolario es $m(E_2''')=0$; la situación es diferente en el siguiente corolario donde $m(E_2''')$ puede ser positiva aunque también son válidos los teoremas ergódicos. Una vez más se observa que la más profunda y potente de las propiedades es el teorema ergódico individual.

Corolario 11. Si $T=T_h$, *siendo* h *una transformación pun-*

tual con dominio E y rango en E, son equivalentes las propiedades F'_1), F'_3), F'_4), F'_5), F'_6), F'_7), *del corolario anterior.*

El corolario 11 contiene los resultados de Dunford y Miller (l. c) para el caso discreto y el teorema 6 de Dowker (l. c., pág. 1059).

La condición $I_\mu \in I_m$ trae como consecuencia una situación mucho más simple que la expresada explícitamente hasta ahora. Esto lo aclaramos en el lema 17, el teorema 7 y el corolario 12 que siguen a continuación.

Lema 17. Son equivalentes las siguientes condiciones: F'_2) *existe* $I_\mu \in I_m$; α) $\mu \in M$ *y* $L^1(m) = L^1(\mu)$; β) $\mu(TA) = \mu(A)$, $L^1(m) = L^1(\mu)$ *y sobre estos espacios las dos seudonormas dadas por* m *y* μ *son equivalentes. Demostración.* Evidentemente β) implica F'_2), vamos pues probar que F'_2) implica α) y β). Evidentemente F'_2) implica que $\mu \in M$ y $L^1(m) \subset L^1(\mu)$. Bastará probar que sobre $L^1(m)$ son equivalentes las normas m, μ, para deducir la igualdad de los espacios de Banach respectivos. Si $f_n \geqq 0, f_n \in L^1(m)$, $\int_E f_n\, dm < \varepsilon_n, \Sigma\, \varepsilon_n$ convergente, $\int_E f_n\, d\mu \geqq a > 0$, resulta $\varphi = \text{lím sup}\, f_n$ está definida salvo medida m nula, $\int_E \varphi\, dm = 0$, $\int_E \varphi\, d\mu \geqq a$, contra $I_\mu \in I_m$; análogamente se ve la recíproca. Observemos todavía que las condiciones de la tesis equivalen a $L^1(m) = L^1(\mu)$ como espacios de funciones módulo funciones nulas.

T e o r e m a 7. *Son equivalentes las propiedades:* F'_2) *existe* $I_\mu \in I_m$; G_1) I_m *es biequicontinua en media;* G_2) *si* $f \in L^1(m)$ *existe* $I(f) = \text{lím}\, n^{-1} \Sigma_1^n \int_E T^i f\, dm$, *e* $I(|f|) = 0$ *implica* $\int_E |f|\, dm = 0$ G_3) I_m *es biequilipschitziana en media;* G_4) *vala el teorema ergódico individual en* $L^1(m)$, $\text{lím}\, n^{-1} \Sigma_1^n T^i f = T^* f$, *y* $\int T^*(|f|)\, dm = 0$ *implica* $\int |f|\, dm = 0$. $G_5{}^p$) *vale el teorema ergódico medio en* $L^p(m), p \geqq 1$, *y* $\int (T^*|f|))^p\, dm \doteq$ *implica* $\int |f|^p\, dm = 0$.

La demostración resulta inmediatamente como en teorema 5 del teorema 6 y el lema 17, y la omitimos.

Observación 7. En los corolarios 10, 11, la uniforme acotación de las normas $\|T^n\|$ es necesaria y suficiente para la validez de los teoremas ergódicos. En el teorema 7 esta acotación es tan solo necesaria.

Corolario 12. Si el rango de T incluye a las funciones características, son equivalentes dos a dos las condiciones F_i), F'_i) *y* G_i).

§ 6. - Vamos a hacer finalmente una aplicación del teorema 7. Basándonos en un teorema de J. L. Doob (l. c.) enunciaremos una caracterización de los operadores de Koopman, de tipo algo diferente a la dada por v. Neumann (o. c.).

Definición 17. Sean $E, m, L^2(m)$ como antes, y T un operador con dominio $L^2(m)$ y rango en $L^2(m)$. Diremos que T *es equivalente a un operador de Koopman,* si existen E', m', $L^2(m'), T'$, tales que:

1) $T' = T'_h$, siendo h una aplicación puntual de E' sobre E' con $m'(T' A') = m'(A')$. 2) Existe un isomorfismo lineal topológico V que aplica $L^2(m)$ sobre $L^2(m')$ que relativizado sobre las funciones φ_A origina una correspondencia biunívoca de K sobre K', $V(A) = A'$, tal que $V(0) = 0$, $V(E) = E'$, $V(\bigcup_1^\infty A_n) = \bigcup_1^\infty V(A_n)$, $V(\bigcap_1^\infty A_n) = \bigcap_1^\infty V(A_n)$. 3) $VT = T'V$.

Aquí T' es un operador de Koopman en un sentido algo más amplio que el clásico. Si T admite un inverso T^{-1} se obtiene el caso clásico para T'.

Si T es equivalente a un operador de Koopman es evidente por el teorema 7 que él verifica los teoremas ergódicos (respecto de m). La recíproca es consecuencia directa del teorema 7 y del siguiente teorema A, que resulta inmediatamente de los razonamientos usados por Doob en su teorema citado más arriba.

Teorema A. Sea T una transformación acotada definida sobre $L^2(m)$ con las propiedades a) - d) (§ 1), *y TA, $A \in K$, definido por $\varphi_{TA} = T\varphi_A$. Si para todo $A \in K$ es $m(TA) = m(A)$ entonces T es equivalente a un operador de Koopman.*

De este teorema, el lema 17 y el teorema 7 resulta inmediatamente el

T e o r e m a 8. *Si un opeerador acotado Tf sobre $L^2(m)$ verifica las condiciones a) - d) del § 1 y uno de los teoremas ergódicos G_4) o $G_5{}^2$), entonces T es equivalente a un operador de Koopman. La hipótesis de verificar las condiciones a) - d) puede reemplazarse por las dos siguientes:* 1) *T es una transformación lineal continua sobre $L^2(m)$;* 2) $T(fg) = Tf \,.\, Tg$.

La última afirmación resulta enseguida para funciones acotadas observando que $|f|$ se aproxima uniformemente por polinomios en f, que $\bigcup_1^2 f_i = [f_1 + f_2 + |f_1 - f_2|] : 2$, que $f \geqq 0$

equivale a $f=g^2$ y que $f=1$ equivale a $fg=g$ para todo g. Por tanto de 1) y 2) sigue para funciones f acotadas

$$Tf \geqq 0 \text{ si } f \geqq 0,\ T(|f|)=|Tf|,\ T(1)=1,\ T(\cup_1^n f_i)=\cup_1^n Tf_i,$$

luego por la continuidad de T resulta la condición d).

Groseramente puede enunciarse el teorema 8 diciendo, que toda vez que el teorema ergódico (u otra condición del teorema 7), sea válido para operadores que conservan el producto, se está en presencia del caso clásico tratado desde los comienzos del desarrollo de la teoría ergódica.

INSTITUTO DE MATEMÁTICA. BUENOS AIRES.

BIBLIOGRAFIA

Espaços Vetoriais Topologicos, por el profesor Leopoldo Nachbin ("Notas de Matemática", Departamento de Matemática de la Facultad de Filosofía. Río de Janeiro, 1948).

El profesor Nachbin ha reunido en un volumen sus lecciones del año 1948, pero ha deseado también, como él mismo lo hace resaltar en el prefacio, conferir a su exposición un carácter de autosuficiencia, en el sentido de que el lector encuentre en su libro todos los materiales indispensables para la lectura; y es necesario decir que lo ha conseguido ampliamente, agregando a esta virtud la de ser clarísimo en la exposición al par que exacto y riguroso en el lenguaje. Se trata de una obra esencialmente didáctica: se hace en ella hincapié en todos los elementos fundamentales de las demostraciones, que son presentadas con gran detalle, pero no se ahorra al lector la posibilidad de ejercitar su propio discernimiento, por cuanto se deja librada a éste buena cantidad de cuestiones que pueden servir como ejercicios. Se han suprimido resultados inútiles, y la constitución orgánica de la obra permite avanzar rápidamente hasta llegar a los objetivos primordiales del autor. En las primeras páginas se dan los elementos de la topología general, adoptando la definición de espacio topológico por conjuntos abiertos: se dan las definiciones de continuidad, homeomorfismo, producto cartesiano, etc., hasta llegar al concepto de supremum de topologías. En el segundo capítulo se estudian rápidamente las propiedades de los cuerpos algebraicos, y en el tercero la de los cuerpos topológicos. En el capítulo cuarto, correspondiente a Espacios Vectoriales, se analizan las importantes nociones de variedad lineal, transformación lineal, isomorfismo, forma lineal y espacio vectorial cociente. En el capítulo quinto comienza a vincularse definitivamente todo el material algebraico y topológico acumulado en los anteriores, mediante el estudio de los Espacios Vectoriales Topológicos: además de las propiedades generales de éstos, se tratan las transformaciones lineales continuas. El capítulo sexto se refiere a las Partes