EL TEOREMA ERGODICO EN LA MECANICA CUANTICA

por OSCAR ALBERTO VARSAVSKY

(Recibido el 13 de abril de 1950)

SUMMARY: Known methods of ergodic theory are applied to the phase space of quantum mechanics in the case of a finite number of degrees of freedon. The flows constitute inner automorphisms of a matrix algebra. Physical criteria are used to characterize the "transitive cells". A sequence of consecutive measurements is seen to behave as a Markov chain, which is simple if equal a priori probabilities are assumed, and the limit of their means agrees with the ergodic theorem.

I) *Introducción.*

En este trabajo se aplican los resultados más sencillos de la teoría ergódica al caso particular de la mecánica cuántica, ya abordado por von Neumann (4) antes de poseerse las herramientas matemáticas necesarias (que él mismo contribuyó en gran parte a crear).

El método seguido es considerar a los operadores como puntos de cierto espacio de Hilbert que sólo se estudia para el caso de dimensión finita.

En este espacio las «corrientes» tienen una interpretación sencilla; la «transitividad métrica» existe para un cierto subespacio cuyo complemento ortogonal está formado por operadores invariantes para la corriente de que se trata, y en su interpretación física se encuentra que la admisibilidad de cualquier método de medición de una magnitud tiene la misma importancia que en la deducción de la forma del «operador estadístico» hecha por von Neumann (5).

Por último se demuestra que una sucesión de mediciones constituye estadísticamente una cadena de Markov, mas bien que un proceso aleatorio estacionario, y se calcula el promedio temporal de una tal sucesión hallándoselo igual al promedio espacial con hipótesis equivalentes a la transitividad métrica, que aquí aseguran que la cadena de Markov sea simple.

II) *El espacio ergódico.*

Llamaremos *EH*—1 al espacio de las fases de un sistema físico, con las características descritas por von Neumann (5), a saber: *EH*—1 es un espacio de Hilbert; cada dirección en él representa un «estado puro» del sistema; los operadores autoadjuntos están en correspondencia biunívoca con las magnitudes físicas y en particular los operadores proyección o «proyectores» (autoadjuntos e idempotentes) se corresponden con las «propiedades» físicas, es decir, magnitudes cuya medición tiene sólo dos resultados posibles: si y no. El conocimiento que se tiene del estado de un sistema se engloba en un operador autoadjunto definido positivo, llamado «operador estadístico» S, mediante el cual puede calcularse el valor medio de una magnitud A cualquiera por la fórmula: $vm(A) = Sp(SA)/SpS$, donde el símbolo Sp significa traza (Spur) del operador a que se aplica. La traza es una funcional lineal, invariante para cualquier transformación unitaria del operador y real cuando éste es autoadjunto. Aplicada a una proyección da el número de dimensiones del subespacio sobre el que se proyecta.

En *EH*—1 consideremos un subespacio I (con la misma letra designaremos a un subespacio y al operador que proyecta sobre él) de número de dimensiones $N = SpI$ tan grande como se quiera, pero finito. Observacionalmente este I no se diferencia del espacio total si N es suficientemente elevado (ver (10), pág. 30); por ello llamaremos en lo sucesivo *EH*—1 a cualquiera de ambos, siempre que no produzca confusión.

Todos los operadores lineales acotados que conmutan con I pueden representarse en ese subespacio por matrices de N filas y columnas. Dado entonces un operador A_0 lineal, acotado y tal que $A_0 v I$ (el símbolo v significa «conmuta con»), consideraremos sólo su «componente según I»: $A = A_0 I$. Si A es autoadjunto, su representación canónica será: $A = \sum_n a_n E_n$, siendo los a_n sus valores propios y los E_n sus «proyectores propios», es decir, los operadores que proyectan sobre sus subespacios característicos, y $E_j E_k = \delta_{jk} E_j$.

Admitiendo valores complejos para los a_n, esta representación vale para los operadores «normales», o sea aquellos que conmutan con sus adjuntos (en particular los unitarios). En general, siendo B una matriz cualquiera, se puede escribir $B = R + iJ$, donde R y J son autoadjuntos: $R = \frac{1}{2}(B + B^*)$; $iJ = \frac{1}{2}(B - B^*)$. (Mediante B^* se indica el adjunto de B). R y J conmutan si y sólo si el operador B es normal.

Con los elementos de EH—1 como puntos, definimos un nuevo espacio euclídeo, el EH—2, que es entonces a la vez el álgebra de las matrices de la forma $AI = IA$, y tiene N^2 dimensiones.

El punto de apoyo para ls conclusiones que pretendemos obtener es la siguiente definición de producto interior:

$$(A, B) = Sp\, AB^*.$$

Es fácil verificar que se trata de un producto interno hermitiano recordando que $SpA^* = \overline{SpA}$ y que $SpAB = SpBA$.

La métrica así obtenida es idéntica a la que se define usualmente mediante el isomorfismo que existe entre el espacio de las matrices de N filas y columnas y el de los vectores de N^2 componentes. Pero esta correspondencia no es cómoda de aplicar a productos de matrices, y además nos parece que la noción de traza es la básica (nótese, por ejemplo, que se obtiene así un criterio de convergencia que es un caso particular de lo que von Neumann llama «strongest convergence» (7)).

En EH—2 definiremos a su vez operadores lineales, que se indicarán con mayúsculas verticales: T, E, etc. En particular nos ocuparemos de los operadores unitarios de EH—2, o sea aquellos T tales que:

$$(\mathrm{T}A, \mathrm{T}B) = (A, B), \text{ para todo } A \text{ y } B.$$

Es desagradable tener que limitarse al caso de dimensión finita, pero son conocidas las dificultades que se presentan si se quiere pasar al límite $N \to \infty$. La más evidente aquí es que habría que trabajar con operadores tales que $SpAA^* < \infty$, y entonces los unitarios no cabrían en el $EH-2$. Tampoco parece posible aplicar en este caso el concepto de dimensión continua introducido por Murray y von Neumann (8).

III) *Corrientes en el* $EH-2$.

Sea $\{\mathrm{T}_t\}$ un grupo abeliano de operadores unitarios en $EH-2$, donde t es real. En caso que valga la relación $\mathrm{T}_t[AB] = \mathrm{T}_t A \,.\, \mathrm{T}_t B$ para todo A y B diremos que el grupo $\{T_t\}$ representa una *corriente* en $EH-2$ (ver von Neumann (6)).

Pero es sabido que toda aplicación de un álgebra de matrices sobre sí misma, que sea biunívoca, lineal y distributiva con respecto al producto, es un automorfismo interior. En otras palabras, para cada T_t de una corriente, existe una matriz T_t tal que:

$$\mathrm{T}_t A = T_t A T_t^{-1}, \quad \text{para todo } A.$$

La unitariedad de los T_t en $EH-2$ implica que las T_t deben ser unitarias en $EH-1$; y la estructura de grupo, que las T_t también forman un grupo abeliano y $T_t^{-1} = T_{-t}$.

El ejemplo físico más interesante es aquél en que las T_t son de la forma $T_t = \exp(itH)$ donde H es una matriz autoadjunta relacionada con la energía del sistema. Los T_t dan la evolución temporal del sistema, y estudiarla como hasta aquí en su efecto sobre los operadores, corresponde a la llamada «representación de Heisenberg». Si se prefiere por más intuitiva la «representación de Schrödinger», en que aparece explícitamente la dirección del $EH-1$, que indica el estado del sistema, y se sigue la evolución de dicho estado manteniendo fijos los operadores, debe usarse en lugar de cada operador A, la función $A(P) \equiv AP$, donde P es el proyector de una dirección genérica de $EH-1$. Tendremos ahora como nuevas definiciones:

producto interno: $(AP, BP) = SpAB^*$;

producto de funciones: $A(P) \,.\, B(P) = AB(P)$,

corriente: $\mathrm{T}_t A(P) = A(T_{-t} P T_t) = AT_{-t} P T_t$.

I) *Desscomposición del EH—2 según una corriente.*

Sea T un operador unitario de corriente en $EH-2$; le corresponde, como hemos visto, un operador unitario T de $EH-1$ (que puede multiplicarse, trivialmente, por un factor numérico de módulo uno). Con respecto a éste podemos descomponer al $EH-2$ en dos subespacios ortogonales, a cuyos proyectores llamaremos E'_1 y E_2.

E'_1 es el anillo de todas las matrices que conmutan con T. Es evidente que forman un espacio lineal, que T deja invariante.

E_2 es el contradominio del operador T—I (donde I es la identidad en $EH-2$); o sea, $A \in E_2$ si y sólo si es de la forma $A = TBT^{-1} - B$ para algún punto B de $EH-2$. Es también un espacio lineal y su ortogonalidad con E'_1 se ve fácilmente: si $A \in E_2$ y $B \in E'_1$: $(A,B) = ([T-I]\,C, B) = (C, T^{-1}B) - (C,B) = 0$, pues T^{-1} también deja invariante a B.

A la inversa, todo elemento M perpendicular a E_2 pertenece a E'_1, pues: $(M, TC-C) = (T^{-1}M, C) - (M,C)$, y si esto es cero para todo C de $EH-2$, M es invariante por T^{-1} y por lo tanto, por T.

A su vez el E'_1 puede descomponerse en una parte «trivial», de proyector E_0, formada por las matrices de la forma aI, y su complemento ortogonal con respecto a E'_1, que llamaremos E_1.

En resumen, un operador cualquiera A puede descomponerse en suma de otros tres, perpendiculares entre sí según la definición de producto interno de $EH-2$: $A = aI + L + M$, donde I es la identidad en $EH-1$: L es invariante por T y M es de la forma $M = TCT^{-1} - C$ para algún C. Por ser perpendiculares a I, tanto L como M son de traza nula, y por lo tanto es $a = SpA/SpI$.

El operador I no tiene interés físico, pues como tiene un solo autovalor, corresponde a una magnitud física cuya medición puede dar un solo resultado y por lo tanto no nos enseña nada nuevo sobre el sistema que se está estudiando. Representa los datos que se conocen por hipótesis, por ejemplo la existencia del sistema. Recordemos también que como operador estadístico (véase (5)) representa a un sistema del cual no se sabe absolutamente nada, y en tal sentido, el número $SpA/SpI = (A,I)/SpI$ es el valor medio de la magnitud física representada por A (si es autoadjunto) en el conjunto de Gibbs representativo de tal sistema.

Si por lo tanto nos limitamos al subespacio ortogonal a E_0, ello equivale a restar a cada magnitud física su valor medio sobre un conjunto totalmente desordenado. En otras palabras: toda magnitud física cuyo operador pertenezca a $E_1 + E_2$ tiene como valor medio cero cuando se la mide sobre un sistema del cual no se sabe a priori nada.

Diremos que se ha «normalizado» un operador cuando se lo ha proyectado sobre $E_1 + E_2$, es decir, cuando se le ha restado $(SpA/SpI) . I$.

El significado físico de E_1 está claro: si T representa la evolución temporal del sistema (es decir, aproximamos el grupo $\{T_t\}$ por las potencias de T), las magnitudes físicas de E_1 son constantes del movimiento.

En cuanto al E_2, veremos que sus elementos merecen el nombre de ergódicos con respecto al operador T.

Un problema importante es la determinación de las dimensiones de estos subespacios. El E_0 tiene por supuesto dimensión uno. Las de los otros dos dependen del espectro de T.

Hay dos casos extremos: uno, trivial, cuando $T = I$ y entonces el subespacio E_2 desaparece; otro, el más interesante, ocurre cuando T tiene espectro simple, o sea es de la forma $T = \sum\limits_n e^{i\lambda_n} P_n$, donde los P_n son proyectores unidimensionales ortogonales entre sí y los λ_n son todos distintos.

En este caso es fácil ver que E'_1 está formado exclusivamente por operadores normales de la forma $A = \sum\limits_n a_n P_n$ (sin restricción sobre los a_n). Por lo tanto los P_n forman en E'_1 un sistema ortogonal completo, de modo que E_1 tiene $N—1$ dimensiones (si $EH—1$ tenía N) y E_2 tiene $N^2—N$.

Para un caso intermedio cualquiera, sea r_n la degeneración del n-ésimo autovalor de T. Es también inmediato que la dimensión de E'_1 es $\sum r_n^2$ (la suma extendida a todos los autovalores diferentes).

Tomemos como ejemplo el caso de dos dimensiones. El EH—2 está formado por todas las matrices de dos filas y dos columnas; las tres matrices de Pauli y la unidad forman allí un sistema ortogonal completo. Sea T una matriz unitaria de esspectro simple, si elegimos los ejes de modo que resulte diagonal tendremos la siguiente descomposición del $EH-2$: el E_0 tiene como base a la matriz unidad; el E_1 es unidimensional y tiene como base a la matriz diagonal de Pauli; el E_2 es bidimensional y está subtendido por las dos matrices no diagonales de Pauli. Tomando como T a una de las matrices de Pauli (pues son unitarias), obtenemos la siguiente propiedad: «Si P es una matriz de Pauli y A una matriz cualquiera, la función $PAP^{-1}-A$ es una combinación lineal de las otras dos matrices de Pauli».

V) *El teorema ergódico.*

Nos limitaremos al estudio de una corriente «discreta»

$$\mathrm{T}^n A = T^n A T^{-n}$$

ya que el pasaje al caso continuo no trae novedad. No nos ocuparán tampoco las posibles generalizaciones (reemplazo de los operadores T por otros no unitarios, etc.). Para lo que sigue, compárese con Hopf (2), parágrafos 8 y 9.

Sea entonces A un elemento cualquiera de $EH-2$ y $\{\mathrm{T}^n\}$ una corriente discreta, se trata de calcular el límite del «promedio temporal»:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{r} \mathrm{T}^k A = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{r} T^k A T^{-k} \equiv l\,.\,p\,.\,t\,.\,A$$

(límite del promedio temporal).

Según lo visto en el parágrafo anterior, podemos descomponer a A en tres partes ortogonales entre si: $A = A_0 + A_1 + A_2$, siendo $A_0 = (SpA/SpI)\,I$; $A_1 v T$; $A_2 = TBT^{-1} - B$ para cierto B, y $SpA_1 = SpA_2 = 0$.

Es evidente que:

$$l\,.\,p\,.\,t\,.\,A_0 = A_0; \quad l\,.\,p\,.\,t\,.\,A_1 = A_1$$

pues conmutan con T.

Como $\mathrm{T}^n A_2 = T^{n+1} B T^{-n-1} - T^n B T^{-n}$, resulta, como es inmediato:

$$l\,.\,p\,.\,t\,.\,A_2 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} (T^{n+1} B T^{-n-1} - B) = 0$$

en la métrica de $EH-2$. En resumen:

Teorema ergódico:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{r} \mathrm{T}^k A = (SpA/SpI)\, I + A_1 = \mathrm{E}'_1 A.$$

Se dice que la corriente $\{\mathrm{T}^n\}$ es «ergódica» si, y sólo si, $A_1 = 0$, *para todo* A de $EH—2$.

VI) *Transitividad métrica.*

Diremos que una corriente es «métricamente transitiva» cuando sólo deja invariantes a los elementos I y 0 de $EH—2$, es decir, a todo el espacio $EH—1$ o a sus partes vacías.

Evidentemente esto es lo mismo que pedir que la corriente sea ergódica (equivalencia que en el fondo se debe a la finitud de $EH—1$).

Podemos pues enunciar el siguiente

T e o r e m a 2. - En el espacio $EH—2$ no hay corrientes métricamente transitivas.

En efecto, el subespacio E_1 no es nunca vacío, y en el caso más favorable tiene $N—1$ dimensiones (cuando T tiene espectro simple, ver pgfo. IV). Sin embargo ,como $EH—2$ tiene N^2 dimensiones, si T se mantiene de espectro simple al tomar N cada vez mayor, podemos despreciar el subespacio invariante frente al espacio total, y decir que existe una transitividad métrica aproximada.

Lo mismo ocurre cuando, sin ser T de espectro simple, su degeneración máxima se mantiene acotada al crecer N. Tales operadores de «degeneración acotada» dan origen a corrientes «aproximadamente métricamente transitivas».

Sin embargo, físicamente el camino correcto no consiste en despreciar esas magnitudes invariantes. Si por ejemplo se trata de un sistema que evoluciona a energía constante, nadie se preocupa porque no haya transitividad métrica en el espacio total de las fases. Sólo interesa el subespacio compatible con la condición dada.

En nuestro caso, al dar el operador T estamos indicando todas las constantes del movimiento del sistema. Es pues lógico que nos baste la transitividad métrica en el subespacio E_2, que incluso puede ampliarse agregándole el E_0, como es inmediato.

La no transitividad del espacio total puede expresarse pues diciendo que: «cuánticamente es forzoso que haya constantes del movimiento no triviales $(\neq I)$».

Para todo $A \in E_2 + E_0 \equiv M$ vale entonces

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{r} T^k A = (SpA/SpI)\, I = E_0 A.$$

Si se quiere ver el significado de esta fórmula en la representación de Schrödinger, puede multiplicarse ambos miembros por un proyector unidimensional genérico P y tomar trazas. Resulta entonces:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{r} SpAT^{-k} PT^k = SpA/SpI.$$

$SpAP$ es el valor medio de la magnitud A para un sistema en el «estado puro» simbolizado por P. Por lo tanto el primer miembro es el promedio temporal de A al ir variando el estado del sistema según la corriente originada por T^{-1}. El segundo miembro hemos dicho ya que representa el valor medio de A sobre el conjunto de Gibbs más general posible que representa al sistema. En este sentido es un promedio espacial.

Más aclaratorio aún es el caso en que A es un proyector. Desde von Neumann (4) se sabe que los proyectores representan las «celdas» del espacio de las fases cuántico, y el volumen de dichas celdas está medido por su número de dimensiones, es decir, por la traza del proyector. Ahora entonces el segundo miembro es la relación de volúmenes entre la celda A y el espacio total $EH-1$, y el primero es la permanencia límite temporal del punto P en la celda A.

VII) *Existencia de proyectores en el subespacio* E_2.

Sea $T = \sum_r e^{i\lambda_r} E_r$ la descomposición canónica de T (los λ_r diferentes entre sí; los E_r de cualquier dimensión).

Entonces:

$$T^k = \Sigma\, e^{ik\lambda_r} E_r$$

$$T^k A T^{-k} = \sum_{r,s} E_r A E_s e^{ik(\lambda_r - \lambda_s)}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_1^n T^k A = \sum_{r,s} E_r A E_s \,.\, \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n e^{ik(\lambda_r - \lambda_s)} = \sum_r E_r A E_r$$

o sea:

$$\sum_r E_r A E_r = E'_1 A = (E_0 + E_1)\, A.$$

Si $A \in E_2 + E_0$, es $A - aI$ ortogonal a E'_1 $(a = SpA/SpI)$, y por lo tanto $SpAE_r = aSpE_r$ para todo E_r, o sea que A debe tener igual valor medio para todos los conjuntos de Gibbs caracterizados por los operadores estadísticos E_r.

Si además algún E_r tiene más de una dimensión, y P es un proyector cualquiera contenido en él, también $P \in E'_1$ y entonces

$$SpAP = aSpP.$$

(Si esto se cumple para todos los P unidimensionales de E'_1, se cumple para todos los elementos de E'_1, ya que son combinaciones lineales de ellos).

Veamos en qué casos pueden satisfacerse esas igualdades suponiendo que A es también un proyector.

Un proyector de M dimensiones está dado por $M^2 + (N-M)^2$ condiciones, pues se comporta como unidad en un subespacio M-dimensional y como cero en el complemento.

Si D es la dimensión de E_1 (ver parágrafo IV), tendremos para un proyector de $M = E_0 + E_2$, $M^2 + (N-M)^2 + D$ condiciones, pero que no son necesariamente independientes entre sí.

Se ve entonces que aun en el peor de los casos (T con sólo dos autovalores y de igual dimensión, y todas las condiciones independientes) habrá siempre proyectores en M, pero puede no haberlos unidimensionales.

Por la linealidad de M es obvio que si un proyector pertenece a M, su complemento también.

VIII) *Un criterio físico.*

Veamos ahora cuál es el significado experimental de ese límite en media a que hemos sometido a los operadores, y si existe algún criterio físico que permita caracterizar al subespacio «ergódico» $\mathrm{M} = \mathrm{E}_2 + \mathrm{E}_0$.

Por lo pronto sólo deberíamos considerar operadores autoadjuntos, para poder hablar de significado físico, pero nos reduciremos a tratar los proyectores (que representan «propiedades», ver parágrafo II), pues sólo para éstos hemos encontrado una solución sencilla al segundo problema.

La utilización de la expresión

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{r} T^k E T^{-k}$$

significa que al sistema se lo deja evolucionar en el tiempo sin perturbarlo con mediciones, que acarrearían discontinuidades salvo en el caso en que $E \, v \, T$, que dejaremos de lado. Sería lo mismo decir que se hacen mediciones, pero en número finito, y a partir de la última podemos estudiar la evolución que sufre el sistema por el mero transcurso del tiempo.

Podemos pues limitar el problema a dos mediciones: la última medición de E, y la del límite, que es un operador autoadjunto E_1.

Para que esto tenga algún sentido observacional, es menester que la medición de E no cambie el límite E_1, y eso independientemente del método de medición utilizado.

Que la medición de E no perturbe a E_1, es decir, que ambas tengan significado físico simultáneamente, se expresa como es bien sabido por la condición: $E_1 \, v \, E$. Que esto sea independiente del método de medición implica más. En efecto, la medición de cualquier magnitud A equivale a la de E con la única condición de que los subespacios característicos de A estén incluídos en alguno de loss de E y ambas magnitudes conmutan. Pero si exigimos que A tampoco perturbe al límite E_1, éste debe ser forzosamente de la forma

$$E_1 = aE + b(I - E)$$

o, en otras palabras, E_1 debe conmutar con todo lo que conmuta con E (en símbolos $E_1 \, vv \, E$).

Demostraremos ahora que, para que un proyector pertenezca al subespacio M, es necesario y suficiente que no sea invariante y que los métodos de medirlo no perturben al promedio temporal asintótico.

La necesidad de ambas condiciones es evidente. Veamos la suficiencia.

T e o r e m a 3. - Sea E un proyector: E no vT; $E_1 = aE + b(I - E)$. Entonces es

$$E_1 = (SpE/SpI)\, I.$$

La demostración es inmediata con sólo recordar que el límite E_1 tiene que ser invariante, es decir $E_1 vT$, y eso implica

$$a = b = SpE/SpI.$$

En el parágrafo anterior hemos dado condiciones de existencia de proyectores en el subespacio M.

IX) *Las corrientes como funciones aleatorias estacionarias.*

Es sabido que un proceso estacionario puede representarse mediante un grupo de operadores unitarios en un espacio de Hilbert (véase Kampé de Fériet (3)). En el presente caso, por ejemplo, cada operador autoadjunto A aplicado a un sistema en el estado P (proyección unidimensional en EH—1) representa una variable aleatoria real cuya función de distribución está dada en términos de su familia espectral. Es decir, si

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \, dE_\lambda$$

es la representación canónica del operador A, $SpE_\lambda P$ es la función de distribución de la variable aleatoria AP (cuyo valor medio sería entonces $Sp\, AP$).

A primera vista entonces toda corriente {T} genera un proceso aleatorio estacionario a partir de una variable A, y entonces el teorema ergódico cuántico sería sólo un caso particular del ya conocido en esstadística.

Pero es menester recordar que la función de correlación a dos tiempos cualesquiera debe ser una magnitud medible, y esta condición, que en la mecánica clásica no agrega nada nuevo, en la cuántica implica que las mediciones de la magnitud A a los tiempos t y t' no deben perturbarse, o lo que es lo mismo, que los operadores $A_t = T_t A$ y $A_{t'} = T_{t'} A$ deben conmutar (ver Arnous y Massignon (1)). De otro modo toda medición introduduciría un factor independiente del grupo generador del proceso, que dejaría entonces de ser estacionario.

Sin embargo esta exigencia entraña grandes limitaciones, que los autores citados (1) no han señalado. Si, como es lo usual en Física, la corriente es una función continua del parámetro t, la ecuación

$$AT_t\, AT_{-t} = T_t\, AT_{-t}\, A$$

no puede satisfacerse para todo t, salvo en el caso trivial $A \mathrm{v} T$, en que justamente no hay transitividad métrica. Incluso si se admitiera la existencia de un quantum elemental de tiempo, de modo que el grupo $\{T_n\}$ fuese efectivamente discreto; para que valga $AT^n AT^{-n} = T^n AT^{-n} A$ para todo n y A no $\underline{v} T$ las transformaciones T admisibles son muy pocas relativamente, pues deben consistir en el intercambio de autofunciones de A pertenecientes a distintos autovalores.

Nótese la diferencia con la condición exigida en el parágrafo anterior: aquí se pide que A conmute con todos sus transformados según T; allí sólo que conmute con su límite temporal A_1, aunque de un modo más completo, a saber: $A_1\, vv\, A$.

X) *Las corrientes como cadenas de Markov.*

Sin embargo a todas luces es más físico, o por lo menos más «operacional» el planteo de Arnous y Massignon, porque se refiere a mediciones sucesivas realmente efectuadas. ¿Por qué se limita tanto entonces el alcance del teorema?

A juicio del autor, el error consiste en tratar a una sucesión de mediciones cuánticas como un proceso estacionario. Cuando se recuerda que una de las primeras leyes cuánticas es que el resultado de una medición depende del estado del sistema en ese insstante *y no de su historia anterior* (luego se puntualizará esto) resulta evidente que, como proceso estadístico, corresponde a una cadena de Markov.

El «estado» de un sistema físico a un tiempo t es la colección de todo lo que se sabe acerca de él, y este conocimiento proviene de mediciones, la última de las cuales se supone efectuada al tiempo cero. Todas las propiedades del sistema así verificadas se resumen en una proyección E (que corresponde al operador estadístico de von Neumann). El transcurso del tiempo t transforma el estado E por ejemplo en TET^{-1}, siendo T el operador unitario apropiado. Sea el caso no trivial, E no $v\underline{T}$. En este nuevo estado el sistema tiene una cierta probabilidad de seguir poseyendo la propiedad E, que es $SpETET^{-1}/SpE$ (esta fórmula se deduce a partir del principio de equiprobabilidad a priori y es una generalización de la conocida fórmula $|(\varphi, \varphi_t)|^2$ a la que se reduce cuando E es la proyección sobre la función de onda φ. Véase (5)). Efectuada la medición al tiempo t, por ejemplo con resultado afirmativo (si fuese negativo habría que reemplazar E por $I—E$), se sabe que el estado es nuevamente E; pero puede ocurrir que se sepa algo más. En efecto, si E y TET^{-1} tienen un subespacio común, éste puede mantenerse sin perturbar eligiendo convenientemente el método de medición (habría que verificar la propiedad E midiendo una magnitud $A\,v\,E$ de espectro puntual positivo cuando las autofunciones pertenecen a E y negativo en caso contrario, y tal que algunas de sus autofunciones formen una base en el subespacio común).

Para que esto no ocurra es menester recurrir a la misma condición del parágrafo VIII: que la propiedad E pueda ser verificada por cualquier método, o en otras palabras, que en la elección del método no intervenga la inteligencia. Entonces todo «recuerdo» del estado TET^{-1} queda borrado y el sistema queda caracterizado por la proyección E solamente.

El proceso es entonces una cadena de Markov simple.

Las probabilidades que fijan el problema son:

$SpET_{t_n}ET_{-t_n}/SpE$ = probabilidad de que una medición dé resultado afirmativo si una medición efectuada t_n segundos antes dió resultado *afirmativo*.

$SpET_{t_n}(I—E)T_{-t_n}/Sp(I—E)$ = probabilidad de que una medición dé afirmativo si una medición t_n segundos anterior dió *negativo*.

Llamándolas respectivamente a_n y b_n, donde el subíndice indica que se trata de la n-ésima medición, debe cumplirse la conocida ecuación (ver p. ej. Uspensky (9)): $p_n=(a_n-b_n)\,.\,p_{n-1}+b_n$, siendo p_n la probabilidad de obtener un resultado afirmativo en la n-ésima medición. Una solución particular de esta ecuación es $p_n=SpE/SpI$, como puede verificarse con fáciles cálculos.

La ecuación homogénea: $p_n=(a_n-b_n)\,.\,p_{n-1}$ tiene como solución:

$$p_n=c\prod_1^r(a_j-b_j);$$

de modo que la solución general es:

$$p_n=c\prod_1^r(a_j-b_j)+\frac{SpE}{SpI}$$

Como

$$a_n-b_n=\frac{SpI\,.\,SpET_{t_n}ET_{-t_n}-(SpE)^2}{SpI\,.\,SpE-(SpE)^2}$$

y esto es menor que uno en valor absoluto siempre que E no $\upsilon\,T_t$, la solución de la ecuación homogénea tiende a cero al tender a infinito el número de mediciones. Se toma ahora como definición de promedio temporal de E la cantidad:

$$p=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{r}p_k$$

y se obtiene como resultado final: $p=\dfrac{SpE}{SpI}$, que como se ha dicho, es también el promedio espacial en el espacio de las fases.

La transitividad métrica vale, pues, con las mismas hipótesis anteriores, aunque aquí se trata de una sucesión de mediciones efectivas, efectuadas a intervalos cualesquiera e incluso admitiendo que el operador T cambie de un intervalo a otro, con la única condición de que no conmute con E.

VII) *Conclusiones.*

Se ha visto, pues, que en un espacio de las fases de dimensión finita vale el teorema ergódico, es decir, existe el límite temporal; y hay transitividad métrica, es decir, igualdad con el límite espacial, con dos condiciones: 1) que el operador o magnitud a medir no conmute con el que genera la corriente; es decir que no sea una constante del movimiento, y 2) que el procedimiento de medición no pueda ser elegido inteligentemente. La primera es clásica; la segunda ha sido discutida parcialmente por von Neumann en relación con la hipótesis de equiprobabilidad a priori (5) y será analizada en otra oportunidad.

BIBLIOGRAFIA

1) E. Arnous - D. Massignon. Compt. Rend. 226 - 318 y 557. 1948.
2) E. Hopf. "Ergodentheorie". Erg. d. Math. 1937.
3) J. Kampé de Fériet. Compt. Rend. 226 - 868. 1948.
4) J. von Neumann. Zeits. f. Phys. 57 - 30. 1929.
5) J. von Neumann. "Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik". Springer, 1932.
6) J. lon Neumann. Ann. Math. 33 - 587. 1932.
7) J. von Neumann. Ann. Math. 37 - 111. 1936.
8) J. von Neumann. Ann. Math. 37 - 116. 1936.
9) J. Uspensky. "Introduction to Mathematical probabilities". 1937.
10) O. Varsavsky. *Tesis.* Buenos Aires. 1948.