

DIFRACCION DE LUZ EN UN FILO

por RICARDO GANS (La Plata) y GUIDO BECK (Córdoba).

(Recibido el 11 de Mayo de 1950)

ZUSAMMENFASSUNG: Es ist ein schwieriges Problem, den Krümmungsradius einer Schneide zu messen. Deshalb liegt es nahe, es nicht mechanisch, sondern auf optischem Wege zu tun. Dazu muss man die Lichtbeugung an der Schneide in Abhängigkeit von ihrer Krümmung kennen. Die vorliegende Arbeit stellt einen Versuch dar, diesen Einfluss in erster Näherung, d. h. für Krümmungsradien, die klein gegen die Wellenlänge sind, theoretisch zu ermitteln.

Die Lichtbeugung an einer Halbebene σ eines vollkommen reflektierenden Materials ist bekannt, es ist die berühmte strenge Lösung Sommerfelds. Diese bildet den Ausgangspunkt unseres Verfahrens. Wir überlagern ihr eine Störung derart, dass die neue Lösung den Grenzbedingungen an der benachbarten Fläche σ' mit dem Krümmungsradius ρ ($2\pi\rho/\lambda \ll 1$) genügt. Dabei beschränken wir uns auf die Lösung in grosser Entfernung (gross gegenüber der Wellenlänge) von der Schneide, was praktisch allein in Frage kommt. Ausserdem entwickeln wir, ohne dass es nötig wäre, unsere Formeln nur im Bereich des geometrischen Schattens, d. h. wir setzen die besonders bequeme Beobachtung im Dunkelfeld voraus.

Das Endresultat findet sich in den Formeln (43) und (44). Es ist die Intensität des in den Schattenraum abgebeugten Lichts für die Fälle, dass das Licht parallel resp. senkrecht zur Schneide schwingt. Die Klammern stellen den Einfluss der Krümmung dar; das Verhältnis der beiden Intensitäten ist von ρ unabhängig.

Es un problema difiil medir mecánicamente el radio de curvatura de un filo. Por esta razón se sugiere efectuarlo ópticamente. Para eso hay que conocer la difracción de la luz en un filo en dependencia de su curvatura. El actual trabajo representa un ensayo para determinar teóricamente esa influencia en primera aproximación, es decir para radios de curvatura pequeños en comparación con la longitud de onda.

La difracción en un semiplano σ de un material perfectamente reflejante es conocida. Es la famosa solución de Sommerfeld. Ella forma el punto de partida de nuestro procedimiento. Superponemos a ella una perturbación tal que la nueva solución obedezca a las condiciones de contorno en la superficie próxima σ' del radio de curvatura ρ ($2\pi\rho/\lambda \ll 1$).

Nos limitamos a la solución a gran distancia (grande en comparación con la longitud de onda) del filo, la única que es

En el caso de que el vector eléctrico de la onda incidente oscila paralelamente al filo, $\vec{E} = (0, 0, E_z)$, la solución de Sommerfeld para E_z se escribe

$$U_1(r, \varphi) = U_+ - U_- \quad (2)$$

y, si es el vector magnético, $\vec{H} = (0, 0, H_z)$, el que oscila en esta dirección, H_z está dado por

$$U_2(r, \varphi) = U_+ + U_- \quad (3)$$

Las soluciones (2) y (3) satisfacen las condiciones

$$U_1\left(r, \frac{\pi}{2}\right) = U_1\left(r, -\frac{3\pi}{2}\right) = 0 \quad (4)$$

$$\left(\frac{\partial U_2}{\partial \varphi}\right)_{\varphi = \frac{\pi}{2}} = \left(\frac{\partial U_2}{\partial \varphi}\right)_{\varphi = -\frac{3\pi}{2}} = 0. \quad (5)$$

Notamos, para lo que sigue, las integrales

$$e^{i\frac{\pi}{4}} \int_0^{\infty} e^{-i\tau^2} d\tau \left(\equiv \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{\infty} e^{-z^2} dz \right) = \frac{1}{2} \sqrt{\pi} \quad (*) \quad (6)$$

$$\frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\infty} e^{-i\tau^2} d\tau = \frac{e^{-i(x+\frac{\pi}{4})}}{2\sqrt{\pi x}}; \quad \sqrt{x} \gg 1.$$

§ 2. *La polarización en la sombra geométrica.*— Consideremos los valores de las funciones (1) a gran distancia del origen, en el punto $r=R$, $\varphi = \alpha'$, $kR \gg 1$, $\alpha' > \alpha$, donde $\alpha' = \alpha$ caracteriza el límite de la sombra geométrica.

(*) Esta relación muestra, que el factor multiplicativo arbitrario en (1) ha sido elegido de manera tal, que la amplitud de la luz incidente sea igual a la unidad.

Con (1) y (6) obtenemos

$$U_{+} = \frac{e^{-i(kR + \frac{\pi}{4})}}{2\sqrt{2\pi kR} \operatorname{sen} \frac{\alpha' - \alpha}{2}}, \quad U_{-} = \frac{e^{-i(kR + \frac{\pi}{4})}}{2\sqrt{2\pi kR} \cos \frac{\alpha' + \alpha}{2}} \quad (7)$$

y, para la relación de las intensidades de las dos polarizaciones mencionadas

$$q = \left| \frac{U_1}{U_2} \right|^2 = \left| \frac{1 - \frac{\operatorname{sen} \frac{\alpha' - \alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha' + \alpha}{2}}}{1 + \frac{\operatorname{sen} \frac{\alpha' - \alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha' + \alpha}{2}}} \right|^2 = \frac{\cos^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right) \cos^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha'}{2} \right)}{\cos^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2} \right) \cos^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha'}{2} \right)} (*) \quad (8)$$

q , en función de α' está dada, para $\alpha = 0^\circ$ y para $\alpha = 45^\circ$ en la figura 2.

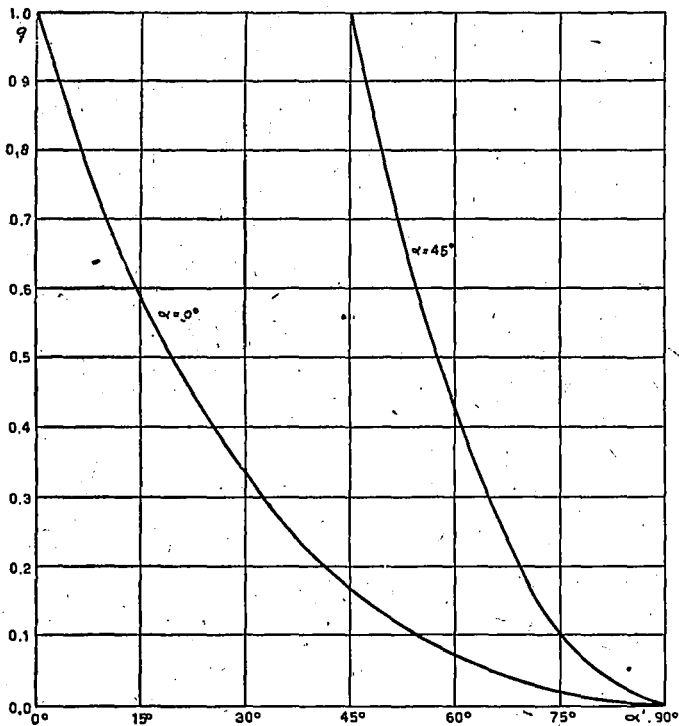


Fig. 2

(*) Ver: B. B. BAKER and E. T. COPSON, *The mathematical theory of Huygens' principle* (Oxford, 1939), pp. 147-49.

La relación (8) se presta particularmente para la observación: se enfoca un anteojo al filo, intercalando entre ellos un prisma birrefringente y un nicol, girando este último hasta que se vean las dos imágenes del filo con igual intensidad (penumbra).

§ 3. *Aplicación del teorema de Green.*—El primer paso de nuestro cálculo consiste en agregar a las soluciones de Sommerfeld, (2) y (3), las funciones de perturbación u_1 y u_2 , respectivamente, de manera tal que sean satisfechas las condiciones de contorno en σ' .

Sea G_1 (G_2) la función de Green del espacio limitado por σ' , de manera que $G_1 \frac{\partial G_2}{\partial n}$ se anula en σ' , donde, por otra parte $u_1 = -U_1$, $\partial u_2 / \partial n = -\partial U_2 / \partial n$. Entonces vale, con una normalización apropiada de G_1 y G_2

$$u_1 = - \int U_1 \frac{\partial G_1}{\partial n} \cdot d\sigma'; \quad u_2 = \int \frac{\partial U_2}{\partial n} G_2 \cdot d\sigma'.$$

Teniendo U_1 y $\partial U_2 / \partial n$ valores muy pequeños en σ' , por la vecindad de las dos superficies σ y σ' , podemos reemplazar las funciones de Green G_1 y G_2 relativas a σ' por las que se refieren a σ y podemos, además, reemplazar la integración sobre σ' por la sobre σ , por lo menos a gran distancia del filo.

Notamos que, para proceder con todo rigor, la superficie σ' debe ser completada por una superficie cilíndrica de radio infinito alrededor del filo, para formar una superficie cerrada. Sin embargo, dejaremos esta superficie cilíndrica en el infinito de lado, porque es sabido que su contribución es nula (*).

G_1 y G_2 son soluciones de la ecuación de onda que corresponden a un hilo luminoso (en nuestro caso de amplitud $1/2\pi$), paralelo al filo, colocado en el punto campo. Dado que no nos interesan sino puntos a gran distancia del filo, G_1 y G_2 son, nuevamente, soluciones de Sommerfeld.

Por esta razón, consideramos, ahora, las soluciones de Sommerfeld que obtenemos de (1) por la substitución $\alpha \rightarrow \alpha' - \pi$,

(*) Ver: A. SOMMERFELD, *Vorlesungen über theoretische Physik*, Bd. VI, p. 195; F. RELICH, *Jahresbericht d. D. Math. Vereinigung*, 53, (1943), 57.

$$G_+ = \frac{1}{N} e^{ikr \cos(\varphi - \alpha')} \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\sqrt{2}kr \cos \frac{\varphi - \alpha'}{2}}^{\infty} e^{-i\tau^2} d\tau \quad (9)$$

$$G_- = \frac{1}{N} e^{-ikr \cos(\varphi + \alpha')} \frac{e^{i\frac{\pi}{2}}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\sqrt{2}kr \operatorname{sen} \frac{\varphi + \alpha'}{2}}^{\infty} e^{-i\tau^2} d\tau$$

$$G_1 = G_+ - G_-; \quad G_2 = G_+ + G_- \quad (10)$$

y que satisfacen, según (4) y (5), las condiciones

$$G_1\left(r, \frac{\pi}{2}\right) = G_1\left(r, -\frac{3\pi}{2}\right) = 0$$

$$\left(\frac{\partial G_2}{\partial n}\right)_{\varphi = \frac{\pi}{2}} = \left(\frac{\partial G_2}{\partial n}\right)_{\varphi = -\frac{3\pi}{2}} = 0 \quad (11)$$

N es un factor de normalización constante que determinaremos a continuación.

(10) representa, en el finito, una onda plana incidente sobre el semiplano de Sommerfeld en la dirección $\alpha' - \pi$. Podemos considerar esta onda como una parte de un frente de onda cilíndrica emergente de un hilo paralelo al filo, colocado a gran distancia del mismo, en $R \rightarrow \infty$, $\Phi = \alpha'$.

Cerca del origen, R, Φ , estas ondas cilíndricas se comportan como la función de Hankel $H_0^{(2)}(kr')$, y, en particular podemos conseguir por elección conveniente de la constante de normalización N , que valga para $kr' \ll 1$

$$G_{1,2}(kr') = \frac{1}{4i} H_0^{(2)}(kr') \sim -\frac{1}{2\pi} \cdot \ln r' + \text{const.} \quad (12)$$

Comparando el valor asintótico de la función $H_0^{(2)}(kr')$

$$\dot{H}_0^{(2)}(kr') \cong \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{e^{-i(kR - \frac{\pi}{4})}}{\sqrt{kR}} e^{ikr \cos(\varphi - \alpha')}$$

$$r' \cong R - r \cos(\varphi - \alpha')$$

con (9) y (10), el valor de N que asegura (12) resulta ser

$$1/N = \frac{1}{4i} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{e^{-i(kR - \frac{\pi}{4})}}{\sqrt{kR}} \quad (13)$$

En la forma (10), con (9) y (13), las funciones G pueden servir, inmediatamente, como funciones de Green que permiten construir, por

$$u_1(R, \alpha') = \int u_1(\sigma) \left(\frac{\partial G_1}{\partial n} \right)_{\sigma} d\sigma \quad (14)$$

$$u_2(R, \alpha') = - \int G_2(\sigma) \left(\frac{\partial u_2}{\partial n} \right)_{\sigma} d\sigma \quad (15)$$

soluciones de la ecuación de onda

$$\Delta u + k^2 \cdot \bar{u} = 0$$

que tengan, en el semiplano σ de Sommerfeld, valores predeterminados o de la función $u_1(\sigma)$ o de la derivada normal

$$\left(\frac{\partial u_2}{\partial n} \right)_{\sigma},$$

siempre que el valor de R sea suficientemente grande.

Como ya hemos mencionado arriba, las relaciones (14) y (15) quedan válidas, salvo términos de orden superior, en una superficie σ' cualquiera, suficientemente vecina al semiplano de Sommerfeld, p. ej., en la superficie indicada en la figura 1, siempre que la distancia ρ sea pequeña en comparación con la longitud de onda ($k\rho \ll 1$).

Elijiendo, en la superficie σ' indicada,

$$u_1(\sigma') = -U_1(\sigma') \quad (16)$$

$$\left(\frac{\partial u_2}{\partial n} \right)_{\sigma'} = - \left(\frac{\partial U_2}{\partial n} \right)_{\sigma'} \quad (17)$$

las funciones

$$V_1(R, \alpha') = U_1(R, \alpha') + u_1(R, \alpha') \quad (18)$$

$$V_2(R, \alpha') = U_2(R, \alpha') + u_2(R, \alpha') \quad (19)$$

satisfacen las condiciones de contorno necesarias sobre la superficie σ' y representan, con la aproximación deseada, las soluciones que buscamos.

Si nos limitamos a calcular las perturbaciones para $\alpha' > -\pi/2$, en particular en la sombra geométrica, $\alpha' > \alpha$, lo que corresponde a la observación a campo oscuro, los integrandos de los segundos miembros de (14) y (15), con (16) y (17), consisten, en ambos lados de la pantalla, de dos factores de los cuales uno es muy pequeño menos en la cercanía inmediata del filo. Eso fluye del hecho, que en el mencionado caso siempre una de las caras de la pantalla se encuentra en la sombra geométrica, sea de la fuente luminosa U , sea de la fuente imaginaria que corresponde a G . De ahí resulta la convergencia rápida de esas integrales, a las que contribuyen solamente unas pocas longitudes de onda alrededor del filo de la extensión de σ' .

§ 4. *La contribución de la cercanía del filo.* - Para poder evaluar las integrales (14) y (15), necesitamos los valores de las funciones u_1 , G_2 , $\partial u_2/\partial n$ y $\partial G_1/\partial n$ en la vecindad del semiplano de Sommerfeld, los que estableceremos a continuación en cada caso.

Simplificaremos el cálculo, dividiendo la superficie σ' en dos partes: a) la cercanía del borde, la que comprende el semicírculo $r = \rho$, $-\pi \leq \varphi \leq 0$ y las partes vecinas de los dos planos $x = \pm \rho$, $0 \leq y \leq y_0$; b) la parte alejada de los dos planos, $x = \pm \rho$, $y \geq y_0$. Eligiendo $k\rho \ll ky_0 \ll 1$ podemos encontrar en cada una de las dos partes un desarrollo conveniente de las funciones que nos interesan y podemos tratar las dos partes por separado.

En la cercanía del borde, $kr \ll 1$, vale

$$u_1 = -U_1 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{i\frac{\pi}{4}} \sqrt{kr} \left\{ \operatorname{sen} \frac{\varphi - \alpha}{2} - \cos \frac{\varphi + \alpha}{2} \right\} \quad (20)$$

$$G_2 = 1/N \cdot \left\{ 1 + \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{i\frac{\pi}{4}} \sqrt{kr} \left(\cos \frac{\varphi - \alpha'}{2} + \operatorname{sen} \frac{\varphi + \alpha'}{2} \right) \right\} \quad (21)$$

$$\frac{\partial G_1}{\partial n} = \frac{\partial G_1}{\partial r}, \quad \frac{\partial u_2}{\partial n} = \frac{\partial u_2}{\partial r} \quad \text{en el semicírculo } -\pi \leq \varphi \leq 0$$

$$\frac{\partial G_1}{\partial n'} = \pm \frac{\partial G_1}{\partial x}, \quad \frac{\partial u_2}{\partial n} = \pm \frac{\partial u_2}{\partial x} \quad \text{en los planos } x = \pm \rho$$

con

$$\begin{aligned} \frac{\partial G_1}{\partial r} &= \frac{1}{2N} \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{i\frac{\pi}{4}} \sqrt{\frac{k}{r}} \left(\cos \frac{\varphi - \alpha'}{2} - \operatorname{sen} \frac{\varphi + \alpha'}{2} \right) \\ \frac{\partial G_1}{\partial x} &= \frac{1}{2N} \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{i\frac{\pi}{4}} \sqrt{\frac{k}{r}} \left(\cos \frac{\varphi + \alpha'}{2} + \operatorname{sen} \frac{\varphi - \alpha'}{2} \right) \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_2}{\partial r} = -\frac{\partial U_2}{\partial r} &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{i\frac{\pi}{4}} \sqrt{\frac{k}{r}} \left(\cos \frac{\varphi + \alpha}{2} + \right. \\ &\quad \left. + \operatorname{sen} \frac{\varphi - \alpha}{2} \right) + ik \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \alpha \end{aligned} \quad (23)$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial x} = -\frac{\partial U_2}{\partial x} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{i\frac{\pi}{4}} \sqrt{\frac{k}{r}} \left(\cos \frac{\varphi - \alpha}{2} - \operatorname{sen} \frac{\varphi + \alpha}{2} \right).$$

Es característico para nuestro problema, que el borde del semiplano de Sommerfeld es un punto de ramificación y que las derivadas de las funciones presentan, en este punto, singularidades (integrables).

Introduciendo (20) y (22) en (14) y (21). (23) en (15) e integrando sobre

$$\begin{aligned} &\int_{-\pi}^0 d\varphi \quad \text{con } r = \rho \\ &\int_{-\frac{3\pi}{2} + \frac{\rho}{y_0}}^{-\pi} d\varphi + \int_0^{\pi - \frac{\rho}{y_0}} d\varphi \quad \text{con } r = \frac{\rho}{|\cos \varphi|} \end{aligned}$$

encontramos, sin dificultad

$$\bar{u}_1 = -\frac{k\rho}{2\pi} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{e^{-i(kR - \frac{\pi}{4})}}{\sqrt{kR}} \sqrt{(1 + \operatorname{sen} \alpha)(1 - \operatorname{sen} \alpha')} \left(\frac{\pi}{2} + 1 + \ln \frac{2ky_0}{k\rho} \right) \quad (24)$$

$$\bar{u}_2 = -\frac{k\rho}{2\pi} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{e^{-i(kR - \frac{\pi}{4})}}{\sqrt{kR}} \left\{ -\pi \operatorname{sen} \alpha + \sqrt{(1 - \operatorname{sen} \alpha)(1 + \operatorname{sen} \alpha')} \left(\frac{\pi}{2} - 1 + \ln \frac{2ky_0}{k\rho} \right) \right\} \quad (25)$$

§ 5. *La contribución de $y \geq y_0$.* - Para evaluar las funciones (1) y (9) y sus derivadas de ambos lados del semiplano de Sommerfeld, a pequeña distancia del mismo, observamos primero que

$$\begin{aligned} \sqrt{2kr} \cdot \operatorname{sen} \frac{\varphi - \alpha}{2} &= \pm \sqrt{k \cdot (r - x \cdot \cos \alpha - y \cdot \operatorname{sen} \alpha)} \\ \sqrt{2kr} \cdot \cos \frac{\varphi + \alpha}{2} &= \pm \sqrt{k \cdot (r + x \cdot \cos \alpha - y \cdot \operatorname{sen} \alpha)} \\ -\sqrt{2kr} \cdot \cos \frac{\varphi - \alpha'}{2} &= \mp \sqrt{k \cdot (r + x \cdot \cos \alpha' + y \cdot \operatorname{sen} \alpha')} \\ -\sqrt{2kr} \cdot \operatorname{sen} \frac{\varphi + \alpha'}{2} &= \mp \sqrt{k \cdot (r - x \cdot \cos \alpha' + y \cdot \operatorname{sen} \alpha')} \end{aligned}$$

para $x \geq 0$ respectivamente.

Obtenemos, entonces, para $x = \pm \rho$, $y \geq y_0$

$$\begin{aligned} u_1 &= \pm k\rho \cos \alpha \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{\pi}} \left\{ 2ie^{-iky \operatorname{sen} \alpha} \int_{\pm \sqrt{ky(1 - \operatorname{sen} \alpha)}}^{\infty} e^{-t^2} dt \mp \frac{e^{-iky}}{\sqrt{ky(1 - \operatorname{sen} \alpha)}} \right\} \\ \pm \frac{\partial G_1}{\partial x} &= \pm \frac{k \cos \alpha'}{N} \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{\pi}} \left\{ 2ie^{iky \operatorname{sen} \alpha'} \int_{\mp \sqrt{ky(1 + \operatorname{sen} \alpha')}}^{\infty} e^{-t^2} dt \pm \frac{e^{-iky}}{\sqrt{ky(1 + \operatorname{sen} \alpha')}} \right\} \quad (26) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
 G_2 &= \frac{2}{N} \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{\pi}} e^{iky \operatorname{sen} \alpha'} \int_{\mp \sqrt{ky(1+\operatorname{sen} \alpha')}}^{\infty} e^{-i\tau^2} d\tau \\
 \pm \frac{\partial u_2}{\partial x} &= k\rho \cos^2 \alpha \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{\pi}} \left\{ 2ke^{-iky \operatorname{sen} \alpha} \int_{\pm \sqrt{ky(1-\operatorname{sen} \alpha')}}^{\infty} e^{-i\tau^2} d\tau \right. \\
 &\quad \left. \pm ik \frac{e^{-iky}}{\sqrt{ky(1-\operatorname{sen} \alpha)}} \pm \frac{k}{2} \frac{\sqrt{1-\operatorname{sen} \alpha}}{\cos^2 \alpha} \frac{e^{-iky}}{\sqrt{ky}^3} \right\}. \quad (27)
 \end{aligned}$$

Introducimos, primero, (26) en (14) e integramos sobre y

$$\int_{ky_0}^{\infty} dky.$$

Siendo $ky_0 \ll 1$, podemos, en general, reemplazar el límite inferior de la integral por cero. Solamente en el caso de términos donde las integrales divergen en $y=0$ indicaremos, en lo que sigue, el valor finito del límite inferior. Las integrales que obtenemos se simplifican por las substitutiones

$$z = 2 \cdot ky$$

$$\int \frac{e^{-iky(1+\operatorname{sen} \alpha)}}{\sqrt{ky}} dky = \frac{2}{\sqrt{1+\operatorname{sen} \alpha}} \int e^{-i\sigma^2} d\sigma, \quad \sigma = \sqrt{ky(1+\operatorname{sen} \alpha)}$$

$$\int \frac{e^{-iky(1-\operatorname{sen} \alpha')}}{\sqrt{ky}} dky = \frac{2}{\sqrt{1-\operatorname{sen} \alpha'}} \int e^{-i\sigma^2} d\sigma, \quad \sigma = \sqrt{ky(1-\operatorname{sen} \alpha')}$$

y resulta, por cálculo directo,

$$\underline{u}_1 = -\frac{k\rho}{2\pi} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{e^{-i(kR - \frac{\pi}{4})}}{\sqrt{kR}} \left\{ \sqrt{(1+\operatorname{sen} \alpha)(1-\operatorname{sen} \alpha')} \int_{2ky_0}^{\infty} \frac{e^{-iz}}{z} dz \right.$$

$$\begin{aligned}
 & + 2 \cdot i \sqrt{(1 - \operatorname{sen} \alpha)(1 - \operatorname{sen} \alpha')} \int_0^{\infty} e^{-i\sigma^2} d\sigma \int_{-\sigma \operatorname{tg} \delta}^{+\sigma \operatorname{tg} \delta} e^{-i\tau^2} d\tau \\
 & + 2 \cdot i \sqrt{(1 + \operatorname{sen} \alpha)(1 + \operatorname{sen} \alpha')} \int_0^{\infty} e^{-i\sigma^2} d\sigma \int_{-\sigma \operatorname{tg} \delta'}^{+\sigma \operatorname{tg} \delta'} e^{-i\tau^2} d\tau \\
 & + 2 \cdot \cos \alpha \cdot \cos \alpha' \int_0^{\infty} e^{iky(\operatorname{sen} \alpha' - \operatorname{sen} \alpha)} \int_{+\sqrt{ky(1 - \operatorname{sen} \alpha)}}^{\infty} e^{-i\sigma^2} d\sigma \int_{-\sqrt{ky(1 + \operatorname{sen} \alpha')}}^{\infty} e^{-i\tau^2} d\tau \\
 & + 2 \cdot \cos \alpha \cdot \cos \alpha' \int_0^{\infty} e^{iky(\operatorname{sen} \alpha' - \operatorname{sen} \alpha)} \int_{-\sqrt{ky(1 - \operatorname{sen} \alpha)}}^{\infty} e^{-i\sigma^2} d\sigma \int_{+\sqrt{ky(1 + \operatorname{sen} \alpha')}}^{\infty} e^{-i\tau^2} d\tau \}
 \end{aligned} \tag{28}$$

con

$$\begin{aligned}
 \operatorname{tg} \delta & = \sqrt{\frac{1 - \operatorname{sen} \alpha}{1 + \operatorname{sen} \alpha}}, \quad \delta = \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}; \quad \operatorname{tg} \delta' = \\
 & = \sqrt{\frac{1 + \operatorname{sen} \alpha'}{1 - \operatorname{sen} \alpha'}}, \quad \delta' = \frac{\pi}{4} + \frac{\alpha'}{2}.
 \end{aligned} \tag{29}$$

Introduciendo (27) en (14) obtenemos de manera análoga

$$\begin{aligned}
 u_2 & = -\frac{k\rho}{2\pi} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{e^{-i(kR - \frac{\pi}{4})}}{\sqrt{kR}} \left\{ \sqrt{(1 - \operatorname{sen} \alpha)(1 - \operatorname{sen} \alpha')} \int_{\sigma_0}^{\infty} \frac{e^{-i\sigma^2}}{\sigma^2} d\sigma \right. \\
 & \qquad \qquad \qquad \left. \int_{-\sigma \operatorname{tg} \delta'}^{+\sigma \operatorname{tg} \delta'} e^{-i\tau^2} d\tau \right. \\
 & + \frac{2i \cos^2 \alpha}{\sqrt{(1 - \operatorname{sen} \alpha)(1 - \operatorname{sen} \alpha')}} \int_0^{\infty} e^{-i\sigma^2} d\sigma \int_{-\sigma \operatorname{tg} \delta'}^{+\sigma \operatorname{tg} \delta'} e^{-i\tau^2} d\tau \\
 & \left. + 2 \cdot \cos^2 \alpha \int_0^{\infty} e^{iky(\operatorname{sen} \alpha' - \operatorname{sen} \alpha)} dky \int_{+\sqrt{ky(1 - \operatorname{sen} \alpha)}}^{\infty} e^{-i\sigma^2} d\sigma \int_{-\sqrt{ky(1 + \operatorname{sen} \alpha')}}^{\infty} e^{-i\tau^2} d\tau \right\}
 \end{aligned} \tag{30}$$

$$+ 2 \cdot \cos^2 \alpha \int_0^{\infty} e^{iky(\sin \alpha' - \sin \alpha)} dk \gamma \left\{ \int_{-\sqrt{ky(1-\sin \alpha)}}^{\infty} e^{-i\sigma^2} d\sigma \int_{+\sqrt{ky(1+\sin \alpha')}}^{\infty} e^{-i\tau^2} d\tau \right\}$$

donde la primera integral puede, todavía, ser transformada integrando por partes

$$\int_{\sigma_0}^{\infty} \frac{e^{-i\sigma^2}}{\sigma^2} d\sigma \int_{-\sigma \operatorname{tg} \delta'}^{+\sigma \operatorname{tg} \delta'} e^{-i\tau^2} d\tau = 2 \operatorname{tg} \delta' + \operatorname{tg} \delta' \int_{\sigma_0}^{\infty} \frac{e^{-iz}}{z} dz - 2i \int_0^{\infty} e^{-i\sigma^2} d\sigma \int_{-\sigma \operatorname{tg} \delta'}^{+\sigma \operatorname{tg} \delta'} e^{-i\tau^2} d\tau \quad (31)$$

con

$$\sigma_0 = \sqrt{ky_0(1-\sin \alpha')}; \quad \operatorname{tg} \delta' = \sqrt{\frac{1+\sin \alpha'}{1-\sin \alpha'}}$$

Llama la atención el hecho, que, contrariamente a (28), la expresión (30) no hace intervenir en forma simétrica los ángulos α y α' . Veremos, sin embargo, más adelante, que esta asimetría no es sino aparente y que las expresiones (28) y (30) presentan simetría del mismo tipo.

§ 6. *Evaluación de las integrales.* - Notamos, primero, que para valores pequeños de ky_0 vale con suficiente aproximación

$$\int_{\sigma_0}^{\infty} \frac{e^{-iz}}{z} dz = -\ln \gamma \cdot 2ky_0 - i \frac{\pi}{2}, \quad \ln \gamma = 0,577 \dots \quad (32)$$

La integral

$$I_1 = \int_0^{\infty} d\sigma \int_{-\sigma \operatorname{tg} \delta}^{+\sigma \operatorname{tg} \delta} d\tau e^{-i(\sigma^2 + \tau^2)}$$

puede ser considerada como una integral en el plano de la figura 3 extendida sobre la parte rayada de la superficie. Intro-

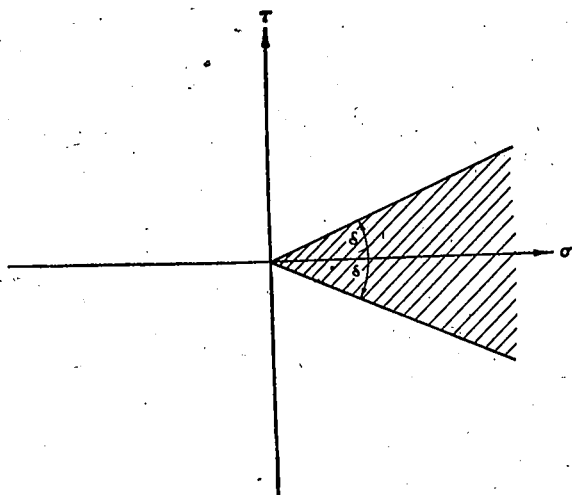


Fig. 3

duciendo en el plano (σ, τ) coordenadas polares (ρ, ψ) resulta

$$I_1 = \frac{1}{2i} \int_{-\delta}^{+\delta} d\psi \int_0^{\infty} e^{-i\rho^2} d\rho^2 = -i\delta \quad (*)$$

y obtenemos para las integrales que aparecen en (28), (30) y (31) con la condición (29)

$$\int_0^{\infty} e^{-i\sigma^2} d\sigma \int_{-\sigma \operatorname{tg} \delta}^{+\sigma \operatorname{tg} \delta} e^{-i\tau^2} d\tau = -i \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right) \quad (33)$$

(*) Para determinar el valor, a primera vista indeterminado, de la integral

$$\int_0^{\infty} e^{-i\rho^2} \cdot d\rho^2$$

tenemos que recurrir a la definición más rigurosa de nuestras integrales, dada en (6). Entonces resulta

$$\int_0^{\infty} e^{-i\rho^2} \cdot d\rho^2 = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^{\infty} e^{-(\epsilon+i)\rho^2} \cdot d\rho^2 = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon+i} = -i$$

$$\int_0^{\infty} e^{-i\sigma^2} d\sigma \int_{-\sigma \operatorname{tg} \delta'}^{+\sigma \operatorname{tg} \delta'} e^{-i\tau^2} d\tau = -i \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha'}{2} \right). \quad (34)$$

Para determinar, finalmente, la última integral,

$$I_2^{\pm} = \int_0^{\infty} e^{iky(\operatorname{sen} \alpha' - \operatorname{sen} \alpha)} dk \gamma \int_{\pm \sqrt{ky(1-\operatorname{sen} \alpha)}}^{\infty} e^{-i\sigma^2} d\sigma \int_{\mp \sqrt{ky(1+\operatorname{sen} \alpha')}}^{\infty} e^{-i\tau^2} d\tau \quad (35)$$

partimos de la identidad

$$\begin{aligned} 2 ik \operatorname{sen} \alpha e^{-iky \operatorname{sen} \alpha} \int_{\pm \sqrt{ky(1-\operatorname{sen} \alpha)}}^{\infty} e^{-i\sigma^2} d\sigma \pm k \sqrt{1-\operatorname{sen} \alpha} \frac{e^{-iky}}{\sqrt{ky}} = \\ = -2 \frac{\partial}{\partial y} \left[e^{-iky \operatorname{sen} \alpha} \int_{\pm \sqrt{ky(1-\operatorname{sen} \alpha)}}^{\infty} e^{-i\sigma^2} d\sigma \right]. \end{aligned}$$

Multiplicando los dos miembros por

$$e^{iky \operatorname{sen} \alpha'} \int_{\pm \sqrt{ky(1+\operatorname{sen} \alpha')}}^{\infty} e^{-i\tau^2} d\tau$$

integrando sobre y y transformando por integración por partes obtenemos

$$\begin{aligned} 2 ik \operatorname{sen} \alpha I_2^{\pm} \pm 2 \sqrt{\frac{1-\operatorname{sen} \alpha}{1-\operatorname{sen} \alpha'}} \int_0^{\infty} e^{-i\tau^2} d\tau \int_{\mp \sigma \operatorname{tg} \delta'}^{\infty} e^{-i\tau^2} d\tau \\ = -2 \int_0^{\infty} \frac{\partial}{\partial y} \left[e^{-iky \operatorname{sen} \alpha} \int_{\pm \sqrt{ky(1-\operatorname{sen} \alpha)}}^{\infty} e^{-i\sigma^2} d\sigma \right] e^{+iky \operatorname{sen} \alpha'} dk \gamma \int_{\mp \sqrt{ky(1+\operatorname{sen} \alpha')}}^{\infty} e^{-i\tau^2} d\tau \\ = -2 \left[e^{iky(\operatorname{sen} \alpha' - \operatorname{sen} \alpha)} \int_{\pm \sqrt{ky(1-\operatorname{sen} \alpha)}}^{\infty} e^{-i\sigma^2} d\sigma \int_{\mp \sqrt{ky(1+\operatorname{sen} \alpha')}}^{\infty} e^{-i\tau^2} d\tau \right]_0^{\infty} \\ + 2 \int_0^{\infty} e^{-iky \operatorname{sen} \alpha} dk \gamma \int_{\pm \sqrt{ky(1-\operatorname{sen} \alpha)}}^{\infty} e^{-i\sigma^2} d\sigma \frac{\partial}{\partial y} \left[e^{iky \operatorname{sen} \alpha'} \int_{\mp \sqrt{ky(1+\operatorname{sen} \alpha')}}^{\infty} e^{-i\tau^2} d\tau \right] \end{aligned}$$

$$= -i \frac{\pi}{2} + 2ik \operatorname{sen} \alpha' I_2^{\pm} \pm 2 \sqrt{\frac{1+\operatorname{sen} \alpha'}{1+\operatorname{sen} \alpha}} \int_0^{\infty} e^{-i\sigma^2} d\sigma \int_{\pm \sigma \operatorname{tg} \delta}^{\infty} e^{-i\tau^2} d\tau.$$

De aquí fluye inmediatamente la relación

$$2 \cdot (\operatorname{sen} \alpha' - \operatorname{sen} \alpha) \cdot (I_2^{+} + I_2^{-}) = \pi$$

$$-2i \sqrt{\frac{1+\operatorname{sen} \alpha'}{1+\operatorname{sen} \alpha}} \int_0^{\infty} e^{-i\sigma^2} d\sigma \int_{-\sigma \operatorname{tg} \delta'}^{+\sigma \operatorname{tg} \delta'} e^{-i\tau^2} d\tau - 2i \sqrt{\frac{1-\operatorname{sen} \alpha}{1-\operatorname{sen} \alpha'}} \int_0^{\infty} e^{-i\sigma^2} d\sigma \int_{-\sigma \operatorname{tg} \delta'}^{+\sigma \operatorname{tg} \delta'} e^{-i\tau^2} d\tau \quad (36)$$

y, con (33) y (34), el valor de la integral que nos interesa

$$I_2^{+} + I_2^{-} = \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha' - \operatorname{sen} \alpha} \left\{ \frac{\pi}{2} - \sqrt{\frac{1+\operatorname{sen} \alpha'}{1+\operatorname{sen} \alpha}} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right) - \sqrt{\frac{1-\operatorname{sen} \alpha}{1-\operatorname{sen} \alpha'}} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha'}{2} \right) \right\} \quad (37)$$

§ 7. Resultado del cálculo. — Introduciendo los valores obtenidos en (32), (33), (34) y (36) en (28) obtenemos

$$\begin{aligned} \bar{u}_1 = & -\frac{k\rho}{2\pi} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{e^{-i(kR - \frac{\pi}{4})}}{\sqrt{kR}} \\ & \left\{ \sqrt{(1+\operatorname{sen} \alpha)(1-\operatorname{sen} \alpha')} \left(-\ln \gamma 2ky_0 - i \frac{\pi}{2} \right) \right. \\ & + \sqrt{(1-\operatorname{sen} \alpha)(1-\operatorname{sen} \alpha')} \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) + \\ & \left. + \sqrt{(1+\operatorname{sen} \alpha)(1+\operatorname{sen} \alpha')} \left(\frac{\pi}{4} + \alpha' \right) \right. \\ & \left. + \frac{\cos \alpha \cos \alpha'}{\operatorname{sen} \alpha' - \operatorname{sen} \alpha} \left[\pi - \sqrt{(1-\operatorname{sen} \alpha)(1+\operatorname{sen} \alpha')} \left(\frac{\pi}{2} + \alpha' + \frac{\pi}{2} - \alpha \right) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (38)$$

Para evaluar (30) con (31) llevamos, primero, estas rela-

ciones con ayuda de la identidad (30), a una forma más simétrica

$$\begin{aligned}
 u_2 = & -\frac{k\rho}{2\pi} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{e^{-i(kR - \frac{\pi}{4})}}{\sqrt{kR}} \left\{ \pi(1 + \operatorname{sen} \alpha) + \right. \\
 & + \sqrt{(1 - \operatorname{sen} \alpha)(1 + \operatorname{sen} \alpha')} \left(2 - \ln \gamma 2ky_0 - i \frac{\pi}{2} \right) \\
 & - 2i \sqrt{(1 + \operatorname{sen} \alpha)(1 + \operatorname{sen} \alpha')} \int_0^{\infty} e^{-i\sigma^2} d\sigma \int_{-\sigma \operatorname{tg} \delta}^{+\sigma \operatorname{tg} \delta} e^{-i\tau^2} d\tau \\
 & - 2i \sqrt{(1 - \operatorname{sen} \alpha)(1 - \operatorname{sen} \alpha')} \int_0^{\infty} e^{-i\sigma^2} d\sigma \int_{-\sigma \operatorname{tg} \delta'}^{+\sigma \operatorname{tg} \delta'} e^{-i\tau^2} d\tau \\
 & \left. + 2(1 + \operatorname{sen} \alpha) \cdot (1 + \operatorname{sen} \alpha') \cdot (I_2^+ + I_2^-) \right\} \quad (39)
 \end{aligned}$$

y, observando (32), (33), (34) y (37), a

$$\begin{aligned}
 u_2 = & -\frac{k\rho}{2\pi} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{e^{-i(kR - \frac{\pi}{4})}}{\sqrt{kR}} \left\{ \pi(1 + \operatorname{sen} \alpha) + \right. \\
 & + \sqrt{(1 - \operatorname{sen} \alpha)(1 + \operatorname{sen} \alpha')} \left(2 - \ln \gamma 2ky_0 - i \frac{\pi}{2} \right) \\
 & - \sqrt{(1 + \operatorname{sen} \alpha)(1 + \operatorname{sen} \alpha')} \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) - \\
 & - \sqrt{(1 - \operatorname{sen} \alpha)(1 - \operatorname{sen} \alpha')} \left(\frac{\pi}{2} + \alpha' \right) \quad (40) \\
 & + \frac{(1 + \operatorname{sen} \alpha)(1 + \operatorname{sen} \alpha')}{\operatorname{sen} \alpha' - \operatorname{sen} \alpha} \\
 & \left. \left[\pi - \sqrt{(1 - \operatorname{sen} \alpha)(1 + \operatorname{sen} \alpha')} \left(\frac{\frac{\pi}{2} - \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\frac{\pi}{2} + \alpha'}{\cos \alpha'} \right) \right] \right\}
 \end{aligned}$$

Sumando, finalmente, (24) y (38) y (25) y (40) llegamos

a las soluciones buscadas

$$\begin{aligned}
 u_1(R, \alpha') = & -\frac{k\rho}{2\pi} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{e^{-i(kR - \frac{\pi}{4})}}{\sqrt{kR}} \\
 & \left\{ \sqrt{(1+\text{sen } \alpha)(1-\text{sen } \alpha')} \left(\frac{\pi}{2} + 1 - \ln \gamma k\rho - i \frac{\pi}{2} \right) \right. \\
 & + \sqrt{(1-\text{sen } \alpha)(1-\text{sen } \alpha')} \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) + \\
 & \left. + \sqrt{(1+\text{sen } \alpha)(1+\text{sen } \alpha')} \left(\frac{\pi}{2} + \alpha' \right) \right. \\
 & \left. + \frac{\cos \alpha \cos \alpha'}{\text{sen } \alpha' - \text{sen } \alpha} \left[\pi - \sqrt{(1-\text{sen } \alpha)(1+\text{sen } \alpha')} \left(\frac{\pi}{2} - \alpha + \frac{\pi}{2} + \alpha' \right) \right] \right\}.
 \end{aligned} \tag{41}$$

$$\begin{aligned}
 u_2(R, \alpha') = & -\frac{2\pi}{k\rho} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{e^{-i(kR - \frac{\pi}{4})}}{\sqrt{kR}} \\
 & \left\{ \pi + \sqrt{(1-\text{sen } \alpha)(1+\text{sen } \alpha')} \left(\frac{\pi}{2} + 1 - \ln \gamma k\rho - i \frac{\pi}{2} \right) \right. \\
 & - \sqrt{(1+\text{sen } \alpha)(1+\text{sen } \alpha')} \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) - \\
 & \left. - \sqrt{(1-\text{sen } \alpha)(1-\text{sen } \alpha')} \left(\frac{\pi}{2} + \alpha' \right) \right. \\
 & \left. + \frac{(1+\text{sen } \alpha)(1+\text{sen } \alpha')}{\text{sen } \alpha' - \text{sen } \alpha} \right. \\
 & \left. \left[\pi - \sqrt{(1-\text{sen } \alpha)(1+\text{sen } \alpha')} \left(\frac{\pi}{2} - \alpha + \frac{\pi}{2} + \alpha' \right) \right] \right\}.
 \end{aligned} \tag{42}$$

Los términos reales en los paréntesis de (41) y (42), corresponden al cambio de fase que acompaña cada desplazamiento de una superficie reflejante. Ellos no modifican la intensidad de las ondas consideradas y tienen poco interés físico. Los términos imaginarios, sin embargo, afectan la intensidad de la luz y son más significativos. Estos términos provienen de la parte imaginaria de la integral (32),

$$i \int_{y_0}^{\infty} \frac{\text{sen } 2ky}{y} dy$$

y su origen puede ser localizado en el primer cuarto de onda de las dos caras planas de σ' , cerca del filo.

Formando las soluciones (18), (19), con (1), (2), (3), (41) y (42) y elevando al cuadrado absoluto, obtenemos para la intensidad

$$|V_1|^2 = \frac{2}{\pi k R} \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) \cos^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha'}{2}\right)}{(\text{sen } \alpha' - \text{sen } \alpha)^2} [1 - k\rho(\text{sen } \alpha' - \text{sen } \alpha)] \quad (43)$$

y

$$|V_2|^2 = \frac{2}{\pi k R} \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right) \cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha'}{2}\right)}{(\text{sen } \alpha' - \text{sen } \alpha)^2} [1 - k\rho(\text{sen } \alpha' - \text{sen } \alpha)]. \quad (44)$$

§ 8. *Discusión.*—Las ecuaciones (43) y (44) representan el resultado final, las intensidades de la luz difractada por una cuchilla en la región de la sombra ($\alpha' > \alpha$), para ondas incidentes que oscilan paralela y normalmente con respecto al filo. Los factores afuera de los paréntesis corresponden a la solución de Sommerfeld y valen, pues, para $\rho = 0$. Los paréntesis representan la influencia del radio ρ en primera aproximación ($k\rho = \frac{2\pi\rho}{\lambda} \ll 1$).

Esta influencia disminuye la intensidad y tanto más cuanto más entramos en la sombra. La relación de ambas intensidades es independiente de la curvatura ρ en la aproximación apetecida.

Hablando más exactamente, nuestro resultado contiene no solamente la influencia del radio de curvatura del filo, sino al mismo tiempo la del espesor 2ρ de la cuchilla σ' , la que comparamos con la lámina σ (véase la figura 1).