APLICACION DEL METODO DE HADAMARD AL CALCULO DEL CAMPO ELECTROMAGNETICO DEL ELECTRON

por JUAN JOSE GIAMBIAGI
(Instituto de Física, Buenos Aires)
(Recibido el 14-7-1950)

A. *Potencial de un electrón puntual.*

Hadamard introdujo el concepto de parte finita de una integral divergente, que permite resolver la ecuación hiperbólica cuando el número de dimensiones es impar. Friedrichs mostró (1) que la parte finita logarítmica juega un papel análogo cuando el número de dimensiones es par. Courant-Hilbert contiene (2) una breve exposición del método y una aplicación a la resolución de la ecuación de las ondas amortiguadas. A ella nos referiremos a menudo en el curso de este artículo. Designamos con $(\xi, \eta, \varsigma, \tau)$ las coordenadas del punto potenciado y con (x, y, z, t) las del punto fuente.

En el espacio lorentziano, la distancia entre dos puntos Z, X de coordenadas (x, y, z, t) y $(\xi, \eta, \varsigma, \tau)$ es la siguiente:

$$\Gamma^{1/2} = [(\tau - t)^2 - (\xi - x)^2 - (\eta - y)^2 - (\varsigma - z)^2]^{1/2}.$$

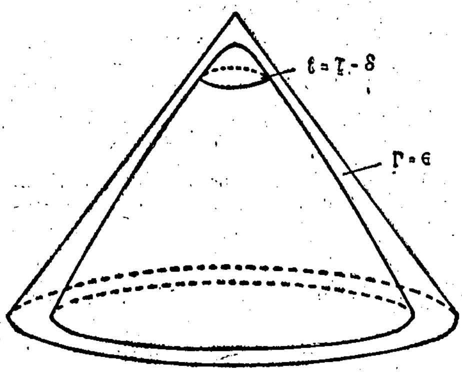
El vector $r_{QP} = X - Z$ tiene por módulo:

(I) $$r_{QP} = (X - Z, X - Z)^{1/2}.$$

Tenemos que resolver para cada uno de los potenciales del campo electromagnético, la ecuación siguiente:

(II) $$\Box \phi_i = 4 \pi j_i$$

donde ϕ_i designa el potencial y j_i la tetracorriente. Vamos a considerar el volumen limitado por el hiperboloide $\Gamma = \varepsilon$, el hiperplano $t = \tau - \delta$ y el hiperplano del infinito. En ese recinto aplicamos la fórmula de Green, designando con $G_{\varepsilon\delta}$ el interior del cono, con $M_{\varepsilon\delta}$ la superficie lateral y con $D_{\varepsilon\delta}$ el hiperplano $t = \tau - \delta$. En el infinito, las condiciones iniciales son nulas, de modo que el término correspondiente se anula. La fórmula de Green nos dice: (véase 2)



$$(\mathrm{III}) \iiiint\limits_{G\varepsilon\delta} V\, 4\pi\, j_i\, dx\, dy\, dz\, dt = \iiint\limits_{M\varepsilon\delta} \left[V \frac{\partial \phi_i}{\partial S} - \phi_i \frac{\partial V}{\partial S} \right] do$$

$$+ \iiint\limits_{D\varepsilon\delta} \left[V \frac{\partial \phi_i}{\partial t} - \phi_i \frac{\partial V}{\partial t} \right] dx\, dy\, dz.$$

donde V es la asolución fundamental de Hadamard:

$$V = \frac{U(X, Z)}{\Gamma^{\frac{n-2}{2}}} + W \log \Gamma + \ldots$$

U, W y los puntos suspensivos indican funciones regulares. Además se cumple $L[W] = 0$. $\frac{\partial}{\partial s}$ significa la derivada según la conormal, es decir:

$$\frac{\partial}{\partial s} = t_\nu \frac{\partial}{\partial t} - x_\nu \frac{\partial}{\partial x} - y_\nu \frac{\partial}{\partial y} - z_\nu \frac{\partial}{\partial z}$$

Cada una de las integrales que aparecen en (III) es de la forma: (véase 2)

$$B_k(\varepsilon) = a_k \log \varepsilon + \frac{1}{\varepsilon^{\frac{n-2}{2}}} \left(a_0 + a_1 \varepsilon + \ldots + a_{\frac{n-2}{2}} \varepsilon^{\frac{n-2}{2}} \right) + (\varepsilon)$$

y la parte finita logarítmica de esta expresión es a_k. Pasando en la (III) todo al primer miembro, dicha fórmula queda:

$$\sum_k a_k = 0.$$

U es igual, según la fórmula 51 de la página 447 de (2), a la función $J_0(\sqrt{-c\Gamma})$ y $W = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{-c}{\Gamma}}\, J_0'(\sqrt{-c\Gamma})\quad J_0\sqrt{-c\Gamma}$ donde c es la constante que aparece en la ecuación de ondas amortiguadas.

$$\phi_{tt} - \phi_{xx} - \phi_{yy} - \phi_{zz} - c\,\phi = f(x\,y\,z\,t).$$

En el caso que nos interesa, el campo electromagnético en el vacío, $c=0$ y, por lo tanto, $W=0$ y $U=1$. Los otros términos regulares dan integrales convergentes y que, por lo tanto, no contribuyen a la parte finita logarítmica. Queda, pues,

(IV) $$V = \frac{1}{\Gamma}$$

El procedimiento consiste en hacer tender ε y δ a cero y quedarnos con la parte finita logarítmica de cada integral [1].

La integral sobre $M_{\varepsilon\delta}$ no contribuye a la parte finita logarítmica, véase (2), pág. 446, fórmula 45, pues W es nula.

La parte finita logarítmica sobre $D_{\varepsilon\delta}$ es $-2\pi\phi_i$. Véase (2), fórmula 48.

La fórmula (III) se reduce a la siguiente:

$$\phi_i = -\frac{1}{2\pi}\,{}_*\!\iiiint V\,4\pi\, j_i\, dx\, dy\, dz\, dt = -2\;{}_*\!\iiiint \frac{j_i\, dx\, dy\, dz\, dt}{\Gamma}$$

Si se trata de un electrón puntual, esta expresión se reduce a una integral a lo largo de la línea del universo del electrón

(V) $$\phi_i = -2c\;{}_*\!\int_{-\infty}^{s_\varepsilon} \frac{u_i(Q)}{\Gamma}\, ds.$$

(1) El Ing. Calderón demostró que el mismo resultado se obtiene tomando como recinto de integración al hiperboloide $\Gamma = \varepsilon$ y haciendo tender $\varepsilon \to 0$ sin necesidad de cortar con el hiperplano $t = \tau - \delta$.

donde u_i es la tetravelocidad del electrón, de módulo uno, y s_ε es la intersección de la línea del electrón con el hiperboloide $\Gamma=\varepsilon$.

Vamos a integrar respecto de Γ en lugar de hacerlo con s. Tenemos:

$$\Gamma=(t-\tau)^2-(x-\xi)^2-(y-\eta)^2-(z-\varsigma)^2$$

$$\frac{d\Gamma}{ds}=2\left[(t-\tau)\frac{dt}{ds}-(x-\xi)\frac{dx}{ds}-(y-\eta)\frac{dy}{ds}-(z-\varsigma)\frac{dz}{ds}\right].$$

Se tiene, según (I)

$$\text{(VI)} \qquad \frac{d\Gamma}{ds}=-2\,(\vec{r},\vec{u}).$$

Si la velocidad espacial del electrón es menor que una constante menor que la velocidad de la luz, resulta que cuando $s\rightarrow-\infty$, $\Gamma\rightarrow\infty$.

El otro límite es ε. Queda:

$$\text{(VII)} \quad \phi_i=-2e\int_{\infty}^{\varepsilon}\frac{u_i(Q)}{\Gamma}\frac{d\Gamma}{ds_Q}\,d\Gamma=2e\int_{\infty}^{\varepsilon}\frac{u_i(Q)}{\Gamma}\frac{1}{2(\vec{r},\vec{u})}d\Gamma=$$

$$=e\int_{\infty}^{\varepsilon}\frac{u_i(Q)}{(\vec{r},\vec{u})}\frac{d\Gamma}{\Gamma}.$$

donde hemos usado la fórmula (VI).

Con la hipótesis hecha acerca de la velocidad del electrón, la siguiente integral resulta convergente:

$$\int_{\infty}^{A}\frac{u_i}{(\vec{r},\vec{u})}\frac{d\Gamma}{\Gamma}$$

donde A es un número positivo cualquiera.

Descomponemos la (VII) en suma de dos integrales $\int_{\infty}^{A}+\int_{A}^{\varepsilon}$.

Como la primera es convergente. no contribuye a la parte finita logarítmica. Podemos por lo tanto, escribir:

$$\text{(VIII)} \qquad \phi_i = e \int_{\overset{*}{A}}^{\varepsilon} \frac{u_i}{(\vec{r}, \vec{u})} \frac{d\Gamma}{\Gamma}.$$

A esta integral vamos a sumarle y restarle la siguiente:

$$e \int_{A}^{\varepsilon} \left\{ \frac{u_i}{(\vec{r}, \vec{u})} \right\}_0 \frac{d\Gamma}{\Gamma}$$

donde el subíndice cero indica que tomamos el valor en el tiempo retardado.

La (VIII) queda:

$$\phi_i = e \int_{\overset{*}{A}}^{\varepsilon} \left\{ \frac{u_i}{(\vec{r}, \vec{u})} \right\}_0 \frac{d\Gamma}{\Gamma} + \int_{\overset{*}{A}}^{\varepsilon} \left[\frac{u_i}{(\vec{r}, \vec{u})} - \left\{ \frac{u_i}{(\vec{r}, \vec{u})} \right\}_0 \right] \frac{d\Gamma}{\Gamma}.$$

El segundo término del segundo miembro da una integral convergente y no contribuye, por lo tanto, a la parte finita logarítmica. Queda sólo el primero.

$$\phi_i = e \int_{\overset{*}{A}} \left\{ \frac{u_i}{(\vec{r}, \vec{u})} \right\}_0 \frac{d\Gamma}{\Gamma} = e \left\{ \frac{u_i}{(\vec{r}, \vec{u})} \right\}_0$$

$$\text{(IX)} \qquad \phi_i = e \left\{ \frac{u_i}{(\vec{r}, \vec{u})} \right\}_0.$$

B. *Cálculo del campo.*

Usando la notación tensorial, tendremos:

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial \phi_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial \phi_\mu}{\partial x^\nu}.$$

Habíamos llegado a la siguiente expresión pâra el potencial

$$\phi_\nu = -2e \int_{-\infty}^{s_\varepsilon} \frac{u_\nu(Q)}{\Gamma} ds.$$

Se demuestra que la derivada de la parte finita logarítmica respecto de un parámetro es igual a la parte finita logarítmica de la derivada y que podemos derivar directamente bajo el signo de integral. Véase (3).

Es decir, tendremos:

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial \phi_\nu}{\partial \xi^\mu} - \frac{\partial \phi_\mu}{\partial \xi^\nu} = -2e \int_{*-\infty}^{s_\varepsilon} \left[u_\nu(Q) \frac{\partial}{\partial \xi^\mu}\left(\frac{1}{\Gamma}\right) - u_\mu \frac{\partial}{\partial \xi^\nu}\left(\frac{1}{\Gamma}\right) \right] ds$$

$$F_{\mu\nu} = 2e \int_{*-\infty}^{s_\varepsilon} \left[\frac{u_\nu \Gamma \xi^\mu - u_\mu \Gamma \xi^\nu}{\Gamma^2} \right] ds$$

o sea, en general:

$$\text{(X)} \qquad F = 4e \int_{*-\infty}^{s_\varepsilon} \frac{[\vec{r}, \vec{u}]}{\Gamma^2} ds \qquad \Gamma^2 = (x-\xi)_\mu (x-\xi)^r .$$

Tomando a Γ como variable de integración e integrando por partes, obtenemos:

$$F = 4e \int_{*\infty}^{\varepsilon} \frac{[\vec{r}, \vec{u}]}{\Gamma^2} \frac{ds}{d\Gamma} d\Gamma = -2e \int_{*\infty}^{\varepsilon} \frac{[\vec{r}, \vec{u}]}{(\vec{r}, \vec{u})} \frac{d\Gamma}{\Gamma^2} = -2e \int_{*A}^{\varepsilon} \frac{(\vec{r}, \vec{u})}{[\vec{r}, \vec{u}]} \frac{d\Gamma}{\Gamma^2}$$

$$F = 2e \left[\frac{[\vec{r}, \vec{u}]}{(\vec{r}, \vec{u})} \frac{1}{\Gamma} \right]_A^\varepsilon - 2e \int_{*A}^{\varepsilon} \frac{d}{d\Gamma} \left(\frac{[\vec{r}, \vec{u}]}{(\vec{r}, \vec{u})} \right) \frac{d\Gamma}{\Gamma}$$

El primer término no contribuye a la parte finita logarítmica. En cuanto al segundo, procediendo igual que antes da, como parte finita logarítmica

$$F = -2e \left\{ \frac{d}{d\Gamma} \left(\frac{[\vec{r}, \vec{u}]}{(\vec{r}, \vec{u})} \right) \right\}_0 = -2e \left\{ \frac{d}{d\tau} \left(\frac{[\vec{r}, \vec{u}]}{(\vec{r}, \vec{u})} \right) \right\}_0 \left(\frac{d\tau}{d\Gamma} \right)$$

$$\text{(XI)} \qquad F = e \left\{ \frac{1}{(\vec{r}, \vec{u})} \frac{d}{d\tau} \left(\frac{[\vec{r}, \vec{u}]}{(\vec{r}, \vec{u})} \right) \right\}_0$$

Compárese con el cálculo del campo hecho por Fremberg usando el método de Riesz (4).

C. *Fuerza propia del electrón.*

La fórmula (X) nos da el campo del electrón. Recordemos que el límite superior es el valor del tiempo propio que corresponde a la intersección con el cono $\Gamma = \varepsilon$.

Como la integral $\int_{-\infty}^{A} 4e \frac{[\vec{r}, \vec{u}]}{\Gamma^2} ds$ es convergente, podemos poner

$$F = 4e \int_{*A}^{s_\varepsilon} \frac{[\vec{r}, u]}{\Gamma^2} ds.$$

Desarrollemos el integrando en serie a partir del punto en que la línea del universo del electrón corta al cono retardado. Tomemos, para simplificar, $s = 0$ en ese punto. Tendremos:

$$[\vec{r}, \vec{u}] = -\frac{s^2}{2}\left\{[\vec{u}, \vec{\ddot{u}}] - \frac{2}{3}[\vec{\ddot{u}}, \vec{u}]\, s + \ldots\right\}$$

donde hemos usado

$$\vec{r} = -\vec{u}_0\, s - \ddot{u}_0 \frac{s^2}{2} - \dddot{u}_0 \frac{s^3}{9} + O(s^4)$$

$$\vec{u} = \vec{u}_0 + \vec{\ddot{u}}_0\, s + \dddot{u}_0 \frac{s^2}{2} + O(s^3)$$

$$r = \Gamma^{1/2} = -s + O(s^3)$$

En el límite superior podemos poner, teniendo en cuenta la última igualdad:

$$s_\varepsilon = -\varepsilon^{1/2}.$$

Calculemos ahora la parte finita logarítmica.

$$F = 4e \int_{*-A}^{-\sqrt{\varepsilon}} -\left\{\frac{s^2}{2}[\vec{u}, \vec{\ddot{u}}] - \frac{2}{3}[\vec{\ddot{u}}, u]\, s + O(s^2)\right\}\frac{ds}{\Gamma^2} = 4e \int_{*-A}^{-\sqrt{\varepsilon}} \frac{1}{3}[\ddot{u}, u]\frac{ds}{|s|}$$

Si ahora sumamos y restamos

$$\frac{4}{3}\, e \int_{-A}^{-\sqrt{\varepsilon}} [\vec{\ddot{u}}, \vec{u}]_0 \frac{ds}{|s|}$$

obtenemos

$$F = \frac{4}{3}\, e \;{}^{*}\!\!\int_{-A}^{-\sqrt{\varepsilon}} [\vec{\ddot{u}}, \vec{u}]_0 \frac{ds}{s} + \frac{4}{3}\, e \;{}^{*}\!\!\int_{-A}^{-\sqrt{\varepsilon}} \left\{ [\ddot{u}, u] - [\ddot{u}, u]_0 \right\} \frac{ds}{|s|} \,.$$

Como la segunda integral es convergente, no contribuye a la parte finita logarítmica.

Queda finalmente

$$F = \frac{4}{3}\, e \;{}^{*}\!\!\int_{-A}^{-\sqrt{\varepsilon}} [\ddot{u}, \vec{u}]_0 \frac{ds}{s} = \frac{2e}{3} [\vec{\ddot{u}}, \vec{u}]_0 \qquad \text{(XII)}$$

Con esta fórmula del campo obtenemos la fuerza de Lorentz sobre el electrón, a saber:

$$\text{(XIII)} \qquad f^{\mu} = F^{\mu\sigma} e\, u_0 = \frac{2e^2}{3} (\ddot{u}^{\mu} + \vec{\ddot{u}}^2 u^{\mu}).$$

Estas ecuaciones fueron deducidas por Dirac (5) y por Fremberg (4), el primero por un método intuitivo y el segundo mediante el método de Riesz de prolongación analítica.

La fórmula (XII) coincide con la semidiferencia de los potenciales avanzado y retardado.

La aplicación del método al campo mesónico se publicará en una ulterior oportunidad.

BIBLIOGRAFIA

(1) Friedrichs. Gött. Nach. 1927 S. 172.
(2) Courant-Hilbert II, página 430 y siguientes.
(3) Bureau, Florent. Bull. Cl. Sc (Ac. Royale de Belgique) 34, 480, 1948.
(4) N.-E. Fremberg. Proc. Roy. Soc. 188. 1946.
(5) Dirac. P. A. M. 1938, Proc. Roy. Soc.