GENERALIZACION DE UNA DESIGUALDAD DE H. HORNICH A ESPACIOS DE CURVATURA CONSTANTE

por L. A. SANTALÓ

1. *Enunciado del teorema.* Sea C una curva rectificable del espacio euclidiano n-dimensional y L la longitud de la misma. Si V representa el volumen cubierto por los puntos del espacio cuya distancia a C es igual o menor que R, vale la siguiente desigualdad establecida por H. Hornich (1),

$$V \leqq L\,\varkappa_{n-1} R^{n-1} + \varkappa_n R^n \tag{1.1}$$

siendo $\varkappa_n$ el volumen de la esfera euclidiana n-dimensional, de radio unidad, o sea, en general,

$$\varkappa_i = \frac{\pi^{i/2}}{\Gamma(i/2+1)}\,. \tag{1.2}$$

De esta desigualdad dimos en otra oportunidad (2) una demostración distinta de la de Hornich, la cual permitía establecer los casos en que vale el signo de igualdad por un criterio más cómodo que el dado por Hornich (3).

El objeto de esta nota es demostrar una desigualdad análoga para el caso de curvas de un espacio de curvatura constante K. Demostramos el siguiente teorema:

Sea C una curva rectificable de longitud L del espacio n-dimensional de curvatura constante K. Sea V el volumen cubierto por los puntos del espacio cuya distancia a C sea $\leqq R$. Entonces vale la desigualdad

$$V \leqq k^{-(n-1)} \left(\varkappa_{n-1} L \operatorname{sen}^{n-1} kR + n\,\varkappa_n \int_0^R \operatorname{sen}^{n-1} k\rho\, d\rho\right) \tag{1.3}$$

donde $\varkappa_i$ está dado por (1.2) *y se ha puesto $K = k^2$.*

---

(1) H. HORNICH, *Bemerkungen zu einer allgemeinen Ungleichung für Kurven,* Monatshefte für Mathematik und Physik, t. 49, 1940.

(2) L. A. SANTALÓ, *A theorem and an inequality referring to rectifiable curves,* American Journal of Mathematics, vol. 63, 1941, p. 635-644.

(3) Observemos de paso que la desigualdad dada por Hornich para el caso

El signo de igualdad en (1. 3) vale únicamente cuando son satisfechas las dos condiciones: a) C no puede ser cortada por una hipersuperficie esférica de radio R en más de 2 puntos (salvo para un conjunto de posiciones de la esfera de medida nula ([4])*; b) Toda esfera de radio R que contiene a los extremos de C en su interior, caso de ser esta curva abierta, contiene también a toda la curva.*

Si $K<0, k$ resulta imaginario y en (1. 3) para que figuren solamente valores reales basta introducir las funciones hiperbólicas de acuerdo con las relaciones

$$\operatorname{sen} i\rho = i \operatorname{senh} \rho, \quad \cos i\rho = \cosh \rho .$$

La demostración que vamos a dar es la generalización natural de la que dimos para el caso euclidiano ($K=0$) en el trabajo ya mencionado ([2]).

Junto con el volumen (1. 2) de la esfera euclidiana n-dimensional de radio unidad necesitaremos el área de la misma, que representaremos en general por ω_i y vale, como es sabido,

$$\omega_i = \frac{2\pi^{(i+1)/2}}{\Gamma((i+1)/2)} \tag{1. 4}$$

existiendo por tanto la relación

$$\omega_i = (1+i)\, \varkappa_{i+1}. \tag{1. 5}$$

2. *Una fórmula integral.* Consideremos una esfera de radio R y centro el punto P. Como estamos en el espacio de curvatura constante K, al decir esfera entendemos la variedad de $n-1$ dimensiones que se obtiene como lugar geométrico de los puntos cuya distancia geodésica a P es igual a R. Es sabido que el área de esta esfera vale

$$F(R) = k^{-(n-1)}\, \omega_{n-1} \operatorname{sen}^{n-1} kR \tag{2. 1}$$

---

de curvas cerradas, pág. 106 del trabajo mencionado, no es correcta, como resulta evidente al considerar una circunferencia de radio muy pequeño, para la cual L es tan pequeña como se quiera y en cambio V tiende al área del círculo de radio R.

Tampoco es cierto que la condición 3ª que Hornich da para la igualdad en (1.1) sea *necesaria* como afirma el autor: basta considerar un segmento de longitud menor que 2 R.

([4]) Es decir, un conjunto de esferas cuyos centros forman un conjunto de puntos de medida n-dimensional nula.

donde ω_{n-1} es el área de la esfera $n-1$ dimensional euclidiana de radio unidad, dada por (1. 4).

Para cada punto P, sea n el número (finito o infinito) de puntos comunes de dicha esfera con la curva C. Llamando dP al elemento de volumen del espacio correspondiente al punto P, es sabido que vale la fórmula integral

$$\int n\, dP = 2\frac{\varkappa_{n-1}}{\omega_{n-1}} F\, L = 2\varkappa_{n-1} k^{-(n-1)} L \operatorname{sen}^{n-1} kR \tag{2. 2}$$

extendida la integración a todos los puntos P para los cuales es $n \neq 0$.

3. *Otra fórmula auxiliar.* Consideremos un arco de geodésica del espacio de longitud D. El volumen cubierto por los puntos cuya distancia a este arco es $\leqq R$, se puede calcular a partir de la fórmula que da el volumen del cuerpo paralelo exterior a otro a distancia R. Para aplicar esta fórmula utilizando la misma notación de C. B. Allendoerfer(5) debemos tener en cuenta que las «curvaturas medias» de un arco de geodésica de longitud D (considerado como límite de la hipersuperficie paralela exterior a distancia ε cuando $\varepsilon \to 0$), son

$$M_0 = \omega_{n-1},\ M_1 = \omega_{n-2} D,\ M_2 = M_3 = \ldots = M_{n-1} = 0,$$

con lo cual el volumen buscado resulta valer

$$V_R = M_0 I_0 + M_1 I_1 = \omega_{n-1} I_0 + \frac{\omega_{n-2}}{n-1} D\, k^{-(n-1)} \operatorname{sen}^{n-1} kR \tag{3. 1}$$

siendo

$$I_0 = \int_0^R k^{-(n-1)} \operatorname{sen}^{n-1} k\rho\, d\rho. \tag{3. 2}$$

4. *Demostración del teorema.* Pasemos ahora a la demostración del teorema enunciado. Considerando cada punto del volumen V que figura en el enunciado del teorema como centro de una esfera de radio R, puede ocurrir que esta esfera corte a la curva C en $0, 1, 2, 3, \ldots$ puntos (el caso 0 significa que la esfera contiene totalmente a C en su interior).

(5) C. B. Allendoerfer, *Steiner's formulae on a general S^{n+1}* Bulletin of the American Math. Society, Vol. 54, 1948.

Llamando m_i al volumen de los puntos P que son centros de esferas de radio R que tienen i puntos comunes con C, por definición de V es

$$(4.1) \qquad m_0 + m_1 + m_2 + m_3 + \ldots = V.$$

Por otra parte (2.2) da

$$(4.2) \qquad m_1 + 2\,m_2 + 3\,m_3 + 4\,m_4 + \ldots = 2\,k^{-(n-1)}\,\varkappa_{n-1} L \operatorname{sen}^{n-1} kR.$$

De estas igualdades se deduce

$$(4.3) \qquad m_3 + 2\,m_4 + 3\,m_5 + \ldots - (2\,m_0 + m_1) = \\ = 2\,k^{-(n-1)}\,\varkappa_{n-1}\,L \operatorname{sen}^{n-1} kR - 2\,V.$$

Por otra parte, considerèmos el arco de geodésica que une los extremos de C; sea D la longitud del mismo, la cual será nula si C es cerrada. Llamando m_i^* al volumen cubierto por los puntos que son centros de esferas de radio R que tienen i puntos comunes con dicho arco de geodésica (solo puede ser $i = 0, 1, 2$), según (3.1) será

$$(4.4) \qquad m_0^* + m_1^* + m_2^* = \omega_{n-1}\,I_0 + \frac{\omega_{n-2}}{n-1}\,D\,k^{-(n-1)} \operatorname{sen}^{n-1} kR$$

y por la fórmula (2.2) aplicada al caso del arco de geodésica de longitud D vale también

$$(4.5) \qquad m_1^* + 2\,m_2^* = 2\,\varkappa_{n-1}\,k^{-(n-1)}\,D \operatorname{sen}^{n-1} kR$$

de cuyas igualdades resulta, teniendo en cuenta (1.5),

$$(4.5) \qquad 2\,m_0^* + m_1^* = 2\,\omega_{n-1}\,I_0.$$

Observemos que si una esfera corta a C en un solo punto, debe también cortar al arco D en un solo punto; por tanto $m_1^* \geqq m_1$. Además, si la esfera contiene totalmente a C en su interior, contendrá también totalmente al arco de geodésica que une sus extremos; por tanto es $m_0^* \geqq m_0$. Es decir,

$$(4.6) \qquad 2\,m_0^* + m_1^* \geqq 2\,m_0 + m_1.$$

Esta desigualdad, junto con las igualdades (4.3), (4.5) y (1.5) da

$$(4.7) \qquad \frac{1}{2}(m_3 + 2\,m_4 + \ldots) + V \leqq k^{-(n-1)}\varkappa_{n-1}\,L \operatorname{sen}^{n-1} kR + n\,\varkappa_n\,I_0.$$

Como las m_i son esencialmente no negativas, esta desigualdad contiene a la (1. 3) que se trataba de demostrar.

Para que valga el signo de igualdad en (1. 3), según (4. 7) debe ser $m_i = 0$ para $i \geqq 3$, lo cual lleva consigo que sea $m_1 = m_1^*$. Entonces como también debe valer la igualdad en (4. 6) resulta $m_0 = m_0^*$, con lo cual se tienen establecidas las dos condiciones necesarias y suficientes para la igualdad que figuran en el enunciado del teorema.

5. *Casos particulares.* Si $K = 0$, hallando el límite del segundo miembro de (1. 3) para $k = 0$, resulta la desigualdad (1. 1) de Hornich.

Para $n = 2$, $k = 1$, resulta

$$V \leqq 2\, L \operatorname{sen} R + 2\pi\,(1 - \cos R)$$

que es la desigualdad conocida para curvas esféricas ([6]).

6. *Observación.* Hemos basado la demostración en la fórmula (2. 2). Esta fórmula se obtiene por métodos clásicos en Geometría Integral con demostración fácil si se supone que la curva C se compone de un número finito de arcos con tangente que varía con continuidad en cada uno de ellos. Para curvas que se supongan nada más rectificables la demostración de (2. 2) no es tan fácil, si bien puede hacerse por el mismo método directo que seguimos en ([2]) para el caso euclidiano. Sin embargo, para el caso actual, basta suponer establecida (2. 2) para el caso de curvas compuestas de un número finito de arcos con tangente continua, por ejemplo para poligonales. En efecto, una vez establecida la desigualdad (1. 3) para curvas de esta clase, aproximando por poligonales y pasando al límite, lo cual puede hacerse sin inconveniente pues tanto V como L tienden a los límites respectivos, queda demostrado el teorema para el caso general.

Facultad de Ciencias Físico-matemáticas
Universidad de La Plata.

([6]) Ver L. A. Santaló, *Integral formulas in Crofton's style on the sphere...* Duke Mathematical Journal, Vol. 9, 1942, pág. 717.