ONDES DE CORRELATION ATMOSPHERIQUES

par G. DEDEBANT

RÉSUMÉ. — On discute d'abord le concept général d'*onde*, en Mathématiques et en Physique, qu'on limite ensuite aux phénoménes présentant effectivement un caractère de *périodicité*. On souligne que l'Hydrodynamique ne connaît (dans ce sens restreint) qu'une sorte d'ondes: les *ondes sonores*, alors que les fluídes réels et l'atmosphére en particulier, en contiennent bien d'autres. On rappelle succintement los efforts des Météorologistes théoriques pour expliquer les *ondes synoptiques*, de vitesse bien inférieure à la vitesse sonique.

Or, la théorie des fonctions aléatoires stationnaires vient fort à propos pour rénover le probléme, par suite de l'identification qu'elle apporte entre les concepts de *stationnarité* et de *périodicité*. On établit à partir des équations météorologiques du mouvement horizontal, los *équations aux covariances*, c'est à dire celles que doivent satisfaire les fonctions d'autocorrélation. Elles sont du type des équations d'ondes et dépendent dans leur solution numérique d'une vitesse de propagation: $c = 47$ m/sec. On cite des vérifications numériques satisfaisantes et l'on en déduit une théorie de la circulation zonale.

L'article n'est parfaitement compréhensible qu'avec une connaissance, au moins élémentaire, de la théorie des fonctions aléatoires.

1. *Du concept d'onde.*

Les efforts des Météorologistes théoriques pour traiter les mouvements et les perturbations de l'atmosphére selon *l'aspect ondulatoire* (ce mot étant entendu d'abord dans son sens le plus large) sont dejà nombreux et l'on ne peut pourtant pas dire que le problème ait beaucoup avancé.

Les difficultés rencontrées par le probléme des ondes en Météorologie ne sont pas toutes particuliéres au milieu atmosphèrique et certaines existent dejà en Hydrodynamique. Avant de les citer, expliquons nous d'abord sur le sens, ou pour mieux dire *les* sens qui sont attribués au terme: *onde* (1).

(1) Nous nous abstenons volontairement de parler ici des ondes au sens de la Mécanique ondulatoire (L. de Broglie, Schrödinger) dont la discussion nécessiterait à elle seule une dissertacion spéciale.

Dans l'acception la plus générale, on dit qu'il existe une onde dans l'espace, lorsque celui-ci peut être séparé en deux régions par une surface, l'une de ces régions étant ou ayant été le siége d'un phénomène et l'autre n'étant pas encore affectée par ce même phénomène. La surface de démarcation se déplace et change de forme avec le temps; on l'appelle: *front d'onde*. Il se peut que sitôt passé le front d'onde, le milieu reprenne son équilibre (cas des ondes sonores) ou bien qu'il continue à être le siège d'un dérangement (cas des ondes électriques le long d'un fil télégraphique-cas de l'instabilité subsistant dans l'atmosphére après le passage d'un front froid). Le déplacement (propagation) du front d'onde peut ou non correspondre à un transport de matière ou d'énergie.

Par exemple:

a) Le front froid qui limite une masse d'air polaire en progression vers l'équateur, est un front d'onde correspondant à un transport de matière. Car lorsque la température baisse brusquement en une station, au passage du front, c'est qu'elle vient d'être effectivement *submergée* par l'air polaire.

b) Le méridien qui, sur le globe terrestre, correspond au lever du soleil est un front d'onde que n'accompagne pas un transport de matière; son passage se marque cependant par un relévement simultané de la température en toutes les stations qu'il atteint.

Les ondes matérielles ont une vitesse de propagation *limitée* par les propriétés élastiques du milieu; ainsi dans l'atmosphère, il est bien clair qu'elles ne peuvent excéder la *vitesse du son* (qui est elle même bornée par la vitesse d'agitation des molécules, la causalité se propageant par les chocs moléculaires). Par contre les ondes immatérielles no sont assujetties à aucune limitation, n'étant pas conditionnees par les propriétés de la matière, telles que masse, inertie, viscosité, etc. (l'onde semidiurne de pression par exemple voyage à l'équateur, à raison de 450 m/sec).

Le concept général d'onde n'implique *a priori* aucune idée de périodicité. Mais dans le sens vulgaire (sens *restreint*) la notion d'onde inclut des périodicités plus ou moins apparentes et plus moins complexes. Ainsi: les ondes lumineuses, les ondes sonores, les ondes de marée, les nuages ondulés, etc. Ce genre de phénoménes est bien représenté mathématiquement par *l'équation des ondes*:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 \varphi,$$

ou des variantes de cette équation, mais contenant les dérivées partielles *secondes*.

Selon *Hadamard*, on appelle d'une maniére précise *onde*, en mathématiques, toute hypersurface *caractéristique* $\varphi(x, y, z, t)$ d'une équation aux dérivées partielles du second ordre, du type hyperbolique normal (Théorie de *Hugoniot*). Mais nous croyons qu'il faille un peu élargir cette définition car des équations du type elliptique peuvent très bien admettre des ondes (en fait c'est le cas que nous rencontrerons dans notre application météorologique).

Par opposition à l'équation typique des ondes, on a l'équation (parabolique) de *Fourier* (qui contrôle la propagation de la chaleur et les phénomènes de diffusion):

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \nu \nabla^2 \varphi.$$

Elle ne représente pas, à proprement parler, un mécanisme d'ondes (régulier et rythmé), mais bien plutôt une extension *diffuse* du phenoniène φ (sorte de processus contagieux).

2. *Les ondes et l'hydrodynamique.*

La mécanique et la thermodynamique des fluides montrent que dans un milieu *continu*, les seules ondes matérielles possibles sont les ondes *sonores*. Pourtant, il existe dans les fluides réels d'autres ondes matérielles que les ondes sonores.

Pour en rendre compte, on introduit a priori, dans le milieu primitivement continu, des *discontinuités* le long de surfaces ou de lignes, sans expliquer cependant le mécanisme de leur formation (ondes de sillage en hydrodynamique, frontogénése en météorologie).

Hadamard a consacré un ouvrage (Leçons sur l'hydrodynamique et la théorie des ondes) à l'étude du mouvement et de l'évolution des discontinuités au sein d'un fluide, que ces discontinuités portent sur un élément physique lui-même ou sur ses dérivées (par exemple: un front froid qui présente une discontinuité de la température elle-même, serait une discontinuité *d'ordre zéro,* tandis que la tropopause où la discontinuité ne porte que sur le gradient de température, serait une discontinuité *d'ordre un*).

Mais il se trouve que *Duhem* (physicien théorique français fondateur de la Mécanique générale et de l'Energétique) a établi que dans le fluide de l'hydrodynamique (même visqueux), il ne peut *exister* de discontinuités (c'est à dire: sans se mettre en contradiction avec les principes initiaux). Le même Duhem a, en même temps, levé la difficulté, en substituant aux discontinuités mathématiques, des zones de transition rapide qu'il a appelées *quasi-ondes*. Les quasi-ondes représentent d'ailleurs bien la structure réelle (révélée par l'expérience) des surfaces de discontinuité atmosphèrique, qui ne sont que des couches relativement minces à l'intérieur desquelles les éléments météorologiques varient avec une rapidité inusitée.

3. *Les ondes et la Météorologie.*

On peut donc considérer que pour les ondes au sens large, les paradoxes théoriques sont levés. Mais pour les ondes au sens restreint, nous en restons toujours aux *ondes sonores,* alors que les perturbations atmosphèriques que nous voudrions décrire comme des ondes véritables (familles de cyclones, courants de noyaux de variation, etc.) ont une vitesse de propagation *bien inférieure* à la vitesse du son.

Dans l'état présent de la théorie des ondes atmosphèriques, on peut faire la clasification suivante:

a) *La théorie des marées atmosphèriques* (*Margules* et autres). Les ondes y sont considérées comme des ondes de *compressibilité* intéressant l'atmosphère entiére; les vitesses de propagation sont par conséquent des vitesses soniques. Les auteurs ont principalement en vue la détermination des modes de vibration *propres* de l'atmosphère. C'est ainsi que Margules a proposé une explication de l'onde semi-diurne de pression (qui est et reste un des grands mystéres de la Mécanique atmosphèrique).

b) *La théorie des perturbations* (*V. Bjerknes* et son école). Les ondes y sont interprétées comme des *ondes de gravité* dans une couche fluide limitée par une paroi solide et une surface libre, ou encore comme de telles ondes le long de la surface de discontinuité séparant deux milieux de densités différentes (ainsi: la surface du front polaire et ses cyclones). Ce sont des ondes de divergence nulle (incompresibilité). Selon les valeurs attribuées à l'épaisseur de la couche atmosphèrique ou aux discontinuités entre deux couches, on trouve toutes les vitesses de propagation que l'on désire; mais bien entendu si l'on étend la théorie à l'atmosphère entière, on retombe sur la vitesse sonique, comme dans la théorie de Margules. D'ailleurs V. Bjerknes et ses collaborateurs ne considérent les ondes qu'en tant que stade préliminaire des cyclones, l'onde devenant instable et se transformant en une sorte de tourbillon dissymétrique lorsque sa longueur dépasse une valeur critique. La théorie norvégienne des cyclones ne saurait donc être considérée comme une théorie ondulatoire (au sens restreint).

c) *La théorie des ondes stationnaires dans la circulation générale d'Ouest (Rossby et autres).* Ainsi que dans la théorie précédente, il s'agit d'ondes de divergence nulle. La force de Coriolis et le mouvement général d'Ouest de l'atmosphère des régions tempérées y jouent les rôles fondamentaux. De grande longueur d'onde (6000 km et plus), elles seraient causées par la circulation zonale d'Ouest. C'est une conception bien différente de la vibration propre d'un milieu, comme c'etait le cas chez Margules.

4. *Les ondes atmosphèriques et la Mécanique aléatoire.*

Au premier abord, lorsqu'un parle d'aleatoire et de turbulence, l'auditeur, dans sa pensée, associe à ces termes l'idée de chaos et de désordre incontrolables, aussi éloignée que possible de celle de périodicité qui suggère le rythme, l'organisation et la régularité. Or, rien n'est plus faux. La théorie des fonctions aléatoires (continues) stationnaires montre qu'on peut associer à ces fonctions un *spectre* (de fréquences, dans le temps et de nombre d'ondes, dans l'espace), qui n'est autre que la *réciproque* de *Fourier* de son coefficiént d'autocorrélation. Et l'on peut même dire que la fonction aléatoire est entiérement représentée et caractérisée par ce spectre; le concept de stationnarité (aléatoire) *incarne* celui de périodicité.

Bien entendu, il n'est pas question de se servir directement des équations (individuelles) du mouvement, elles-mêmes, dont les théoriciens ont déjà extrait tout ce qu'il est possible. Il faut auparavant leur faire subir une transformation de nature statistique à laquelle nous avons donné le nom de: *aléatorisation.* Cette transformation consiste à déduire des équations individuelles, d'autres équations vérifiées par les moments statistiques, et tout particulièrement par le coefficient d'autocorrélation.

Von Kármán a déjà indiqué la voie en aléatorisant les équations du mouvement d'un fluide incompressible et visqueux en vue de représenter la turbulence au tunnel aérodynamique. Il a montré que le coefficient d'autocorrélation des vitesses vérifie une equation du type de Fourier dont il s'est servi pour étudier la decroissance de la turbulence.

Notre objectif est distinct; nous cherchons des phénomènes stationnaires (au sens aléatoire) et de nature ondulatoire, c'est à dire obeissant à des équations du type de l'équation des ondes. Nous ferons jouer un rôle à la *compressibilité* mais négligerons par contre la viscosité. Enfin, nous prendrons en considération la *force de Coriolis.*

5. *Aléatorisation des equations météorologiques du mouvement horizontal.*

Il est bien connu que les équations du mouvement *horizontal* de l'atmosphère (axes liés à la Terre), peuvent se mettre sous la forme compacte:

$$\frac{dW}{dt}+i\lambda W=-\left(\frac{\partial B}{\partial x}+i\frac{\partial B}{\partial y}\right), \qquad \text{(I)}$$

où:

$W=U+iV$ ($i=\sqrt{-1}$; U et V composantes horizontales du vent); $\dfrac{d}{dt}=\dfrac{\partial}{\partial t}+U\dfrac{\partial}{\partial x}+V\dfrac{\partial}{\partial y}$;

$\lambda=2\,\omega\sin\varphi$ (facteur de Coriolis).

$\mathrm{B}=\int^{P} A(p)\,dp$ ($A=$ volume spécifique; $P=$ pression);

A étant supposé fonction de p — hypothèse de *barotropie*).

L'aléatorisation de l'équation (I) va consister à substituer aux fonctions *certaines* W et B de (x, y, t), des fonctions aléatoires (dérivables en moyenne quadratique): $W/x, y, t$ et $B/x, y, t$, des mêmes paramétres certains (x, y, t), soit encore d'un point de l'espace-temps.

En outre, dans le problème qui nous occupe, nous admettrons les régles du *Calcul* faiblement aléatoire, qui reviennent à traiter la composante purement aléatoire: $Z' = Z - \overline{Z}$, d'un nombre aléatoire Z, comme une *différentielle* (lorsque $\sqrt{\overline{Z'^2}} \ll \overline{Z}$). Cette «linéarisation» ne tombe pas sous le coup du reproche fait à l'Ecole norvégienne dans sa théorie des perturbations (se servir des équations des *petits mouvements* pour étudier des perturbations *finies*) car, ne portant que sur la partie aléatoire, elle ne préjuge rien des dimensions de la perturbation elle-même.

Enfin, nous négligerons les variations du facteur de Coriolis, ce qui vaut approximativement pour un domaine limité des latitudes tempérées et rigourensement pour les mouvements parallèles.

Le but recherché est d'établir les *«équations aux covariances»* des fonctions aléatoires supposées *stationnaires* dans le temps et dans l'espace (c'est à dire dont les covariances sont fonctions seulement du *vecteur* $M_1 M_2$ de l'espace-temps, et non des points M_1 et M_2 séparément).

Prenons d'abord la valeur probable de l'équation (I). Il vient:

$$\frac{d_0 \overline{W}}{dt} + i\lambda \overline{W} = -\left(\frac{\partial \overline{B}}{\partial x} + i \frac{\partial \overline{B}}{\partial y}\right),$$

où:

$$\frac{d_0}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \overline{U} \frac{\partial}{\partial x} + \overline{V} \frac{\partial}{\partial y}$$

(dérivée en suivant le mouvement d'ensemble, qui sera supposé par la suite *uniforme* et *permanent*).

Le mouvement d'ensemble obéit donc à des équations de même forme que le mouvement individuel (compte tenu évidemment de l'hypothèse faiblement aléatoire). Il résulte immédiatement de là qu'il en est de même du mouvement purement aléatoire, soit:

$$\frac{d_0 W'}{dt} + i\lambda W' = -\left(\frac{\partial B'}{\partial x} + i \frac{\partial B'}{\partial y}\right). \qquad \text{(II)}$$

Ecrivons maintenant les équations relatives à deux points $M_1(x_1, y_1, t_1)$ et $M_2(x_2, y_2, t_2)$, en ayant soin de remplacer la seconde par son imaginaire conjuguée, soit:

$$\begin{cases} \dfrac{d_0 W_1'}{dt_1} + i\lambda\, W_1' = -\left(\dfrac{\partial B'_1}{\partial x_1} + i\dfrac{\partial B'_1}{\partial y_1}\right) & \text{(II)}_1 \\[2ex] \dfrac{d_0 W_2'^*}{dt_2} - i\lambda\, W_1'^* = -\left(\dfrac{\partial B'_2}{\partial x_2} - i\dfrac{\partial B'_2}{\partial y_2}\right). & \text{(II)}_2 \end{cases}$$

Multiplions les membre à membre et prenons les valeurs probables. Il vient, en designant par μ les covariances

$$(\mu_W = \overline{W_1' W_2'^*};\ \mu_B = \overline{B_1' B_2'}):$$

$$\frac{d_0^2 \mu_W}{dt_1\, dt_2} + \lambda^2 \mu_W + i\lambda\left(\frac{d_0 \mu_W}{dt_2} - \frac{d_0 \mu_W}{dt_1}\right)$$
$$= \frac{\partial^2 \mu_B}{\partial x_1\, \partial x_2} + \frac{\partial^2 \mu_B}{\partial y_1\, \partial y_2} + i\left(\frac{\partial^2 \mu_B}{\partial x_2\, \partial y_1} - \frac{\partial^2 \mu_B}{\partial x_1\, \partial y_2}\right).$$

Introduisons maintenant l'hypothèse de *stationnarité*; les μ sont fonctions seulement des différences: $h = t_2 - t_1$; $k = x_2 - x_1$; $l = y_2 - y_1$.

On obtient:

$$\frac{d_0^2 \mu_W}{dh^2} - \lambda^2 \mu_W - 2i\lambda \frac{d_0 \mu_W}{dh} = \nabla^2 \mu_B.$$

Ecrivons aussi l'équation imaginaire conjuguée de la précédente, soit:

$$\frac{d_0^2 \mu_W^*}{dh^2} - \lambda^2 \mu_W^* + 2i\lambda \frac{d_0 \mu_W^*}{dh} = \nabla^2 \mu_B.$$

Par addition et soustraction, on déduit les deux équations suivantes:

$$\begin{cases} \left(\dfrac{d_0^2}{dh^2} - \lambda^2\right) \mathrm{M} - 2i\lambda \dfrac{d_0 \mathrm{P}}{dh} = \nabla^2 \mu_B \\[2ex] \left(\dfrac{d_0^2}{dh^2} - \lambda^2\right) \mathrm{P} + 2i\lambda \dfrac{d_0 \mathrm{M}}{dh} = 0 \end{cases}$$

en posant: $2\,\mathrm{M} = \mu_W + \mu_W^*$ et $2\,\mathrm{P} = \mu_W - \mu_W^*$.

Enfin, de ces deux équations, on peut éliminer P, en appliquant à la première l'opérateur $\left(\frac{d_0^2}{dh^2} - \lambda^2\right)$ et à la seconde l'opérateur $2\,i\,\lambda\frac{d_0}{dh}$, et ajoutant (sous la réserve toutefois que ces opérateurs ne soient pas systématiquement nuls). On obtient ainsi une première équation *fondamentale* aux covariances:

$$\boxed{\left(\frac{d_0^2}{dh^2} + \lambda^2\right)^2 \mathrm{M} = \left(\frac{d_0^2}{dh^2} - \lambda^2\right) \nabla^2 \mu_B}\,. \tag{1}$$

6. *Aléatorisation de la divergence et du tourbillon.*

Il est facile de voir que l'on a *formellement*

$$\dot{W}'_x - i\dot{W}'_y = \operatorname{div}(U', V') + i\operatorname{rot}(U', V'),$$

$\operatorname{rot}(U', V')$ désignant ici non le *vecteur* rot, mais sa composante verticale.

Ecrivant cette relation pour le point M_1, et son imaginaire conjuguée pour le point M_2, multipliant membre à membre et prenant les valeurs probables, on obtient:

$$-\nabla^2 \mu_W = \mu_d + \mu_r + i\,\overline{(\operatorname{rot}_1 \operatorname{div}_2 - \operatorname{div}_1 \operatorname{rot}_2)},$$

où μ_d et μ_r sont les covariances de la divergence et du tourbillon, respectivement.

En ajoutant cette équation à son imaginaire conjuguée, on obtient l'importante relation (*formelle*) suivante, entre les covariances de la vitesse, de la divergence et du tourbillon:

$$\boxed{\mu_d + \mu_r = -\nabla^2 \mathrm{M}}\,. \tag{2}$$

7. *Relation dynamique entre les covariances du tourbillon et de la divergence.*

Ecrivons les équations (aléatoires) du mouvement horizontal en termes réels:

$$\begin{cases} \dfrac{d_0 U'}{dt} - \lambda V' = -\dot{B}'_x \\ \dfrac{d_0 V'}{dt} + \lambda U' = -\dot{B}'_y \end{cases}$$

En dérivant la première par rapport à x, et la seconde par rapport à y, et soustrayant, en tenant compte de la permutabilité des opérateurs $\dfrac{\partial}{\partial x}, \dfrac{\partial}{\partial y}$ et $\dfrac{d_0}{dt}$ (à cause de la constance de $\overline{U}, \overline{V}$), on obtient:

$$\frac{d_0}{dt} \operatorname{rot}(U', V') = -\lambda \operatorname{div}(U', V'),$$

ce qui, traduit en covariances, selon le procédé habituel, donne:

$$\boxed{\frac{d_0{}^2 \mu_r}{dh^2} = -\lambda^2 \mu_d}. \tag{3}$$

Cette relation n'existe qu'en vertu des propriétés *dynamiques* du mouvement horizontal de l'atmophère:

8. *Aléatorisation de l'équation de continuité.*

En plus des équations du mouvement, l'hydrodynamique nous fournit aussi l'équation de continuité. Lui appliquant les régles du Calcul faiblement aléatoire, on trouve que la composante purement aléatoire du mouvement satisfait à l'équation de de continuité suivante:

$$\frac{d_0 A'}{dt} = -\overline{A} \operatorname{div}(U', V'),$$

qui donne lieu à l'équation aux covariances:

$$\boxed{\frac{d_0{}^2 \mu_A}{dh^2} = -\overline{A}^2 \mu_d}. \tag{4}$$

9. *Etablissement de l'équation aux covariances thermodynamiques.*

Nous nous trouvons donc en présence de cinq covariances inconnues: trois de caractère cinématique: M, μ_d et μ_r et deux de caractère thermodynamique: μ_A et μ_B, reliées par quatre équations. On peut donc former une équation reliant μ_A et μ_B, et dont la résolution ne dépendra plus que des processus thermodynamiques de la particule d'air.

D'abord, en combinant les équations (2), (3) et (4) pour en éliminer μ_d et μ_r, on arrive à une relation entre la covariance M de la vitesse et celle μ_A, du volume spécifique, qui est:

$$\boxed{\left(\frac{d_0{}^2}{dh^2}-\lambda^2\right)\frac{d_0{}^2\,\mu_A}{dh^2}=\bar{A}^2\,\frac{d_0{}^2}{dh^2}\,\nabla^2\,\mathrm{M}}\,. \tag{5}$$

Enfin, entre les équations (1) et (5), on élimine la covariance cinématique M et l'on obtient une équation reliant les deux covariances thermodynamiques μ_A et μ_B, soit:

$$\boxed{\left(\frac{d_0{}^2}{dh^2}+\lambda^2\right)^2\mu_A=\bar{A}^2\,\nabla^4\,\mu_B}\,. \tag{6}$$

10. *Aléatorisation de l'hypothèse de barotropie.*

Arrivé en ce point, on voit que la suite du problème nécessite l'introduction d'une hypothèse sur la loi des transformations thermodynamiques de la particule d'air au cours de son mouvement. Cette hypothèse est, en hydrodynamique classique celle de *barotropie*: A fonction *certaine* de *P*. En lui appliquant les régles du Calcul faiblement aléatoire, on trouve à partir de:

$$B(P)=\int^{P} A(p)\,dp,$$

successivement:

$$B'=\bar{A}\,P'=\bar{A}\,\frac{d\bar{P}}{d\bar{A}}\,A'; \quad \mu_B=\bar{A}^2\left(\frac{d\bar{P}}{d\bar{A}}\right)^2\mu_A.$$

Ainsi s'établit une relation de proportionnalité entre μ_A et μ_B (ce qui permet d'éliminer une des ces deux covariances), mais malheureusement la vitesse de propagation qui va gouverner les ondes atmosphèriques, va être:

$$\sqrt{\frac{d\overline{P}}{d\left(\frac{1}{\overline{A}}\right)}},$$

c'est à dire *la vitesse du son* dans le milieu en repos, et nous retombons sur l'obstacle qui a fait trébucher les théories classiques rappelées au début.

Cependant il n'y a aucune raison *a priori* d'admettre la barotropie *individuelle* (ce serait même contraire à l'esprit aléatoire). Nous devons soumettre l'hypothèse de barotropie au procédé général d'aléatorisation. Tout ce qui nous importe est de conserver la relation de proportionnalité entre μ_A et μ_B. Et notons tout de suite que cette relation n'entraîne *aucune espéce de conséquence* sur les corrélations qui peuvent exister entre B, A (et P).

Nous poserons donc:

$$\textit{Hypothèse } \mathrm{B}_1: \quad \boxed{\mu_B = \frac{\sigma_B{}^2}{\sigma_A{}^2}\,\mu_A} \tag{7}$$

(le coefficient de proportionnalité est nécessairement egal au rapport des variances $\sigma_B{}^2$ et $\sigma_A{}^2$).

L'extension la plus naturelle de l'hypothèse de barotropie individuelle est de supposer que la pression P étant choisie comme un paramétre certain p, le volume spécifique A est une *fonction aléatoire* de p. D'autre part, il est naturel de prendre comme pression de référence commune à toutes les partìcules, la pression uniforme $\overline{P}$ qui correspond à l'état moyen. De sorte que:

$$B = \int_{\overline{P}}^{P} A/p \; dp.$$

B est ainsi une fonction aléatoire de la limite supérieure P de l'intégrale.

La moyenne *conditionnée* de B pour P fixé va être:

$$E(B;P)=\int_{\overline{P}}^{P}\overline{A}(p)\,dp.$$

Si l'on suppose maintenant (ce qui n'est pas interdit):

Hypothèse B_2: *B indépendant de P,*

alors la moyenne conditionnée de B est égale à sa moyenne générale, ce qui donne:

$$E(B)=\int_{\overline{P}}^{P}\overline{A}(p)\,dp.$$

On déduit de là la partie purement aléatoire de B, qui est:

$$B'=B-E(B)=\int_{\overline{P}}^{P}A'/p\,dp,$$

soit en suivant les régles du Calcul faiblement aléatoire ($P'=P-\overline{P}$, petit):

$$B'=A'/\overline{P}\,.\,P',$$

d'où il résulte que (A' et P' étant non corrélés car: $O=\overline{B'}=\overline{A'P'}$):

$$\sigma_B=\sigma_A\,\sigma_P,$$

relation qui, portée dans (7) donne:

$$\boxed{\mu_B=\sigma_P^2\,\mu_A}\,. \tag{8}$$

Telle est la relation entre covariances, destinée à remplacer l'hypothèse barotropique; on voit que loin de faire appel à des liaisons rigides entre les variables thermodynamiques, elle est basée au contraire sur leur indépendance en probabilité.

Remarquons en outre que la relation $B' = A'/\overline{p}P'$ entraîne la proportionnalité des covariances μ_B et μ_P, puisque:

$$\mu_B = \overline{B_1' B_2'} = \overline{A'^2}/\overline{p} \; \overline{P'_1 P'_2} = \sigma_A{}^2 \mu_P.$$

En rapprochant de (8), on en déduit aussi: $\mu_A = \dfrac{\sigma_A{}^2}{\sigma_P{}^2} \mu_P$.

11. *Equation des ondes de corrélation atmosphèriques.*

En combinant la relation (8) avec l'équation (7), on arrive à l'équation d'ondes du volume spécifique, que l'on peut présenter sous la forme:

$$\boxed{\left(\frac{d_0{}^2}{dh^2} + \lambda^2 + c^2 \nabla^2\right)\left(\frac{d_0{}^2}{dh^2} + \lambda^2 - c^2 \nabla^2\right) r_A = 0} . \qquad \text{(E)}$$

Les parenthèses sont des opérateurs *linéaires* et *permutables* ($\overline{U}$ et $\overline{V}$ ayant été supposés constants). La grandeur

$$c = \sqrt{\overline{A}\,\sigma_P} = \sqrt{\frac{\sigma_P}{\overline{\rho}}}$$

est la vitesse de propagation (différente de celle du son), des ondes de corrélation de la densité ρ.

Ces ondes de densité sont aussi des ondes de *pression* (car $\mu_P = \dfrac{\sigma_P{}^2}{\sigma_A{}^2} \mu_A$, ou encore $r_P = r_A$). Cette remarque est importante car finalement c'est sur la pression barométrique que sont fondées les vérifications et les applications de la théorie. Soulignons que dans les théories des marées atmosphèriques (§ 3), les ondes portent sur le potentiel de la vitesse (²), grandeur pratiquement inaccessible à partir des donnés d'observation. Une réflexion analogue peut être faite au sujet de la théorie de Rossby (§ 3) où les ondes portent sur une fonction de courant (³).

(²) Supposée sans tourbillon.
(³) Supposeé nulle la divergence de la vitesse.

12. *Preuves physiques de l'existence de la vitesse c.*

Pour schématiser les résultats du § 10, nous pouvons dire que:

a) dans l'hypothèse (classique) de barotropie individualle: A = fonction certaine de P, la vitesse de propagation des ondes des corrélation atmosphèrique est la *vitesse du son*: $\sqrt{\frac{d\overline{P}}{d\overline{\rho}}}$.

b) dans l'hypothèse (aléatoire): A = fonction aléatoire de p (p = valeur courante de P), et A *indépendant* en probabilité de P[4], la vitesse de propagation est *différente* de la vitesse du son (et bien inférieure), étant égale à $c=\sqrt{\frac{\sigma_P}{\overline{\rho}}}$.

L'existence de la vitesse de propagation c, résulte jusqu'à présent de considérations théoriques (comme c'était le cas il y a 159 ans, pour la vitesse du son). Ayant d'aller plus loin, il est indiqué de rechercher une preuve physique de cette existence en utilisant les observations aérologiques, ce qui de plus doit nous fixer sur la valeur *numérique* à adopter pour c.

Or, *W. H. Dines* a donné les valeurs de $\overline{\rho}$[5] et de σ_P, de 0 à 13 km. d'altitude, pour l'Europe occidentale, entre les latitudes 45° et 55°. Elles sont reproduites ci-dessous avec les valeurs de c calculées par la formule:

$$c=100\sqrt{10\frac{\sigma_P}{\overline{\rho}}},$$

c'étant exprimé en m/sec, σ_P en millibars et ρ en grs/m³.

z km.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$\overline{\rho}$ grs/m³	1253	1128	1014	909	819	735	658	589	524	463	409	355	305	261
σ_P mbs	10.8	10.5	10.5	10.8	10.9	11.4	11.5	11.4	11.0	10.4	9.6	8.0	6.7	5.6
c m/sec	28.2	30.4	32.3	34.4	36.3	39.3	42.2	45.5	45.8	47.7	48.4	47.7	46.9	46.6

(4) Ces deux suppositions en apparence contradictoires: A fonction de p at A indépendant de P, ne le sont en réalité nullement.

(5) $\overline{\rho}$ a été déduit par Dines de l'équation des gaz parfaits.

On voit qu'à partir de 7 km (c'est à dire dans la zone non troublée en général par les phenoménes *convectifs*) se manifeste une vitesse c, d'une *constance remarquable,* à laquelle on peut attribuer la valeur:

$$\boxed{c = 47\ \mathrm{m/sec} = 170\ \mathrm{km/h}}\,.$$

C'est cette constance de c, à partir d'une certaine altitude qui nous induit à croire en sa signification physique. Nous verrons plus loin que la valeur numérique de c est susceptible de rendre compte des *ondes synoptiques,* ce qui n'est absolúment pas le cas de la vitasse du son.

13. *Résolution de l'équation des ondes de corrélation.*

Les opérateurs qui figurent dans l'équation des ondes (E) étant *permutables,* celle-ci se decompose en les deux suivantes:

$$\begin{cases} \left(\dfrac{d_0{}^2}{dh^2} + \lambda^2 + c^2\ \nabla^2\right) r = 0 \\[2ex] \left(\dfrac{d_0{}^2}{dh^2} + \lambda^2 - c^2\ \Delta^2\right) r = 0. \end{cases}$$

Et les opérateurs étant *linéaires,* la solution générale de (E) sera une combinaison linéaire des solutions des équations facteurs. La première est du type elliptique; la seconde, du type hyperbolique.

Nous réduirons le probléme à *une* dimension, c'est à dire au cas des *ondes planes,* de sorte que nous avons en fin de compte à traiter des deux équations:

$$\begin{cases} \left[\dfrac{\partial^2}{\partial h^2} + 2\,u_0\,\dfrac{\partial^2}{\partial h\,\partial k} + \lambda^2 + (u_0{}^2 + c^2)\,\dfrac{\partial^2}{\partial k^2}\right] r = 0 \quad (E_1) \\[2ex] \left[\dfrac{\partial^2}{\partial h^2} + 2\,u_0\,\dfrac{\partial^2}{\partial h\,\partial k} + \lambda^2 + (u_0{}^2 - c^2)\,\dfrac{\partial^2}{\partial k^2}\right] r = 0 \quad (E_2). \end{cases}$$

Leur résolution ne se présente pas de la manière classique, car nous ne disposons ni de conditions aux limites, ni de conditions initiales (sinon tout au plus: $r(0,0)=1$). Par contre, nous connaissons la *forme* analytique de la solution qui, étant un coefficient d'autocorrélation, doit être celle de *Khintchine* (à deux dimensions), c'est à dire:

$$r(h,k)=\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cos(\omega h-\mu k)\, d_{\omega,\mu}\, G(\omega,\mu),$$

où $G(\omega,\mu)$ est une *fonction de répartition.*

La fonction $r(h,k)$ satisfera à l'une ou l'autre des équations (E_1) ou (E_2) si $\cos(\omega h-\mu k)$ y satisfait lui-même. Et ceci nous conduit aux relations suivantes entre ω et μ:

$$\begin{cases}(\omega-\mu u_0)^2-\lambda^2+c^2\mu^2=0\\ (\omega-\mu u_0)^2-\lambda^2-c^2\mu^2=0.\end{cases}$$

Désignant par $\varkappa$ le rapport $\frac{u_0}{c}$, et développant, ces équations se mettent sous la forme:

$$\begin{cases}(1+\varkappa^2)\, c^2\mu^2-2\varkappa c\,\omega\mu+\omega^2-\lambda^2=0 & (C_1)\\ (\varkappa^2-1)\, c^2\mu^2-2\varkappa c\,\omega\mu+\omega^2-\lambda^2=0 & (C_2)\end{cases}$$

dont les solutions (μ en fonction de ω) sont:

$$\left.\begin{matrix}\mu_1(\omega)\\ \mu_2(\omega)\end{matrix}\right\}=\frac{\varkappa\omega\pm\sqrt{\lambda^2(1+\varkappa^2)-\omega^2}}{c(1+\varkappa^2)}$$

$$\left.\begin{matrix}\mu_3(\omega)\\ \mu_4(\omega)\end{matrix}\right\}=\frac{\varkappa\omega\pm\sqrt{\omega^2-(1-\varkappa^2)\lambda^2}}{c(\varkappa^2-1)}.$$

La solution générale de l'équation (E) est, en conséquence:

$$r(h,k)=\sum_{j=1}^{j=4}\nu_j\int_0^{\infty}[\cos\omega h-\mu_j(\omega)\, k]\, dF_j(\omega),$$

où $\sum_{j=1}^{j=4}\nu_j=1$, et où $F_j(\omega)$ est une *fonction de répartition.*

14. *Propriétés des spectres et des vitesses des ondes.*

Il est clair que, selon le choix des fonctions spectrales $F_j(\omega)$, on peut tirer de l'expression précédente de $r(h, k)$ toutes sortes d'ondes. Signalons d'abord quelques propriétés générales de ces ondes.

a) L'équation $C_1(\omega, \mu) = 0$ représente une *ellipse* dans le plan (ω, μ). Il en résulte que les spectres de fréquences $F_1(\omega)$ et $F_2(\omega)$ sont *tronqués* vers les hautes fréquences, c'est à dire que:

$$\left.\begin{array}{l} d\,F_1(\omega) \\ \\ d\,F_2(\omega) \end{array}\right\} = 0 \quad \text{pour} \quad \omega \geqq \lambda\sqrt{1+\varkappa^2}.$$

Et aussi que les spectres de nombres d'ondes sont tronqués vers les grands nombres d'ondes:

$$\mu_1 \text{ et } \mu_2 \leqq \frac{\lambda}{c}.$$

b) Au contraire, l'équation $C_2(\omega, \mu) = 0$ représente une *hyperbole* $\left(\text{d'asymptotes } \frac{c}{\varkappa \pm 1}\right)$. Les spectres de fréquence $F_3(\omega)$ et $F_4(\omega)$ sont tronqués vers les basses fréquences, soit:

$$\left.\begin{array}{l} d\,F_3(\omega) \\ \\ d\,F_4(\omega) \end{array}\right\} = 0 \quad \text{pour} \quad \omega \leqq \lambda\sqrt{1-\varkappa^2}\,(\varkappa \leqq 1).$$

Mais les spectres de nombres d'ondes sont *complets*.

c) La vitesse de *phase* des ondes, par rapport au milieu ambiant (de vitesse d'ensemble u_0) est:

$$V_f = \left(\frac{\omega}{\mu} - u_0\right).$$

En vertu de (C_1) et (C_2), elle satisfait donc à l'une ou l'autre des deux équations:

$$\begin{cases} V_f^2 = \dfrac{\lambda^2}{\mu^2} - c^2 & (C'_1) \\ V_f^2 = \dfrac{\lambda^2}{\mu^2} + c^2 & (C'_2). \end{cases}$$

On en déduit que pour (C'_1), la vitesse de phase peut prendre toute valeur de 0 à ∞, tandis que pour (C'_2), elle est toujours supérieure à la vitesse de propagation c.

d) Considérons maintenant la vitesse de *groupe*:

$$V_g = \left(\frac{d\omega}{d\mu} - u_0\right).$$

En vertu de (C_1) et (C_2), elle satisfait à l'une ou l'autre des équations:

$$\begin{cases} V_g V_f = - c^2 & (C''_1) \\ V_g V_f = c^2 & (C''_2). \end{cases}$$

Elle est donc (au signe près pour C''_1), réciproque de la vitesse de phase par rapport à la vitesse de propagation c. A remarquer que pour (C_2''), la vitesse de groupe est toujours inférieure ou égale à c (puisque $V_f \geqq c$).

15. *Ondes de courant - Perturbations synoptiques.*

Il semble établi en Météorologie synoptique que les perturbations se déplacent à peu près avec la vitesse du mouvement d'ensemble, autrement dit qu'elles n'ont pas de vitesse de propagation propre; c'est pourquoi nous les appellerons: *ondes de courant.* Seule l'équation (C_1) peut nous fournir des ondes de courant. Pour celles-ci nous avons:

$$\omega = \mu u_0 = \varkappa c \mu,$$

d'où:

$$\mu = \pm \frac{\lambda}{c}.$$

Si nous appelons τ la période correspondant à λ, soit $\tau = \frac{2\pi}{\lambda}$, on trouve que la longueur d'onde correspondante est:

$$L = \frac{2\pi}{\mu} = c\,\tau.$$

Application numérique.

D'après les statistiques de *Peppler,* le vent moyen dans la couche de 7 à 13 km (pour laquelle nous avons calculé c), est aux latitudes 45° à 55° N:

$$u_0 = 16{,}2 \text{ m/sec} = 58{,}5 \text{ km/h}.$$

Prenant $c = 47$ m/sec $= 170$ km/h, il en résulte $\varkappa = \frac{1}{2{,}9}$. D'autre par, à la latitude $\varphi = 50°$ (sen $\varphi = 0{,}766$), on a:

$$\tau = 15{,}7 \text{ heures}.$$

D'où:

$$L = 170 \times 15{,}7 = 2670 \text{ km},$$

Quant à la période, elle est (pour un observateur terrestre):

$$T = \frac{\tau}{\varkappa} = 2{,}9 \times 15{,}7 = 45{,}5 \text{ heures}.$$

Ces valeurs sont en bon accord avec celles qui correspondent aux cyclones extratropicaux, à la latitude de 50°, dans l'hémisphère nord.

16. *Ondes stationnaires - Les grands centres d'action permanents.*

Cherchons maintenant une solution des équations (E_1), (E_2), de la forme, *stationnaire* (6) (par rapport au globe terrestre):

$$r(h,k) = f(h)\,g(k).$$

---

(6) Il est clair que l'adjectif "stationnaire" est pris ici dans son sens classique et non dans le sens aléatoire.

On obtient:

$$\frac{f''}{f} + 2u_0\frac{f'g'}{fg} + (u_0{}^2 \pm c^2)\frac{g''}{g} + \lambda^2 = 0.$$

La séparation des variables ne se produit que si:

a) f' ou g' est nul.

b) u_0 est nul.

Le premier cas est à rejeter comme ayant peu de réalité physique, car il lui correspond des coefficients de corrélation $f(h)$ et $g(k)$ égaux à l'unité (*constantes aléatoires*). On ne peut l'admettre que comme *cas limite* du cas b).

On arrive donc à cette conclusion que: *Des ondes stationnaires de corrélation ne peuvent exister que dans les zones des calmes* ($u_0 = 0$).

Nous allons déduire de là une théorie des zones de calmes ou encore, ce qui est la même chose, des grands *centres d'action* permanents de l'atmosphère.

D'abord, que nous apprend l'expérience à ce sujet?

Outre la zone des calmes équatoriaux, la distribution est la suivante:

a) Les zones subtropicales de chaque hémisphère sont occupées par de grands anticyclones permanents: *deux* dans l'hémisphère nord (sur l'Est du Pacifique et sur l'Atlantique au sud des Açores); *trois* dans l'hémisphère sud (Pacifique, Atlantique et Océan indien). Leurs axes sont situés à une latitude un peu supérieure à 30°.

b) Dans l'hémisphère nord, existent des centres d'action négatifs (dépressionnaires) aux latitudes élevées. Leur position est fortement influencée par les continents et les mers. Dans l'hémisphère où l'on pourrait espérer davantage de régularitè, on n'est malheureusement pas assez bien renseigné pour les hautes latitudes.

Ces centres d'action qui forment autour du globe terrestre des ceintures plus ou moins réguliéres, interrompues et morcelées par les continents, sont universellement considérés par les météorologistes comme des traits essentiels de la circulation générale de l'atmosphère, qui existeraient aussi bien (et sous une forme plus symétrique) si le globe terrestre était *poli et unifor-*

me. On les imagine comme des masses d'air inertes, douées d'une circulation propre et se mélangeant peu avec les perturbations qui se déplacent autour d'eux. Du point de vue de la corrélation par conséquent, il doit leur correspondre (qu'ils soient positifs ou negatifs) des noyaux de corrélation positive centrés autour de la valeur $+1$. Dans le cas d'une circulation de pure rotation autour de l'axe des pôles, il doit correspondre aux centres d'action des ondes de corrélation *zonales* et *stationnaires* (par rapport au globe). Nous nous proposons de déterminer leurs latitudes *possibles*.

Pour une circulation zonale, les équations (E_1) et (E_2) valent encore, car le facteur de Coriolis ne change pas le long d'un paralléle, et pour les zones de calmes ces équations deviennent:

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\partial^2}{\partial h^2} + c^2 \dfrac{\partial^2}{\partial k^2}\right) r = 0 & (E'_1) \\ \left(\dfrac{\partial^2}{\partial h^2} - c^2 \dfrac{\partial^2}{\partial k^2}\right) r = 0 & (E'_2) \end{cases}$$

k étant ici un arc de paralléle.

Posant:

$$r(h, k) = f(h)\, g(k),$$

la séparation des variables se produit et l'on obtient:

$$\frac{f''(h)}{g(h)} = -\alpha^2 \qquad \pm c^2 \frac{g''(k)}{g(k)} = \mp \beta^2,$$

α et β étant deux constantes (réelles) soumises à l'une ou l'autre des conditions:

$$\begin{cases} \alpha^2 + \beta^2 = \lambda^2 & (D_1) \\ \alpha^2 - \beta^2 = \lambda^2 & (D_2). \end{cases}$$

En conséquence, la solution générale sera:

$$r(h,k) = \nu_1 \int_0^\infty \cos \alpha h \cos \frac{\sqrt{\lambda^2 - \alpha^2}}{c} k \, dF_1(\alpha) +$$

$$+ \nu_2 \int_0^\infty \cos \alpha h \cos \frac{\sqrt{\lambda^2 - \alpha^2}}{c} k \, dF_2(\alpha),$$

où $\nu_1 + \nu_2 = 1$

et où $F_1(\alpha)$ et $F_2(\alpha)$ sont des fonctions de répartition, soumises aux limitations suivantes:

$$dF_1(\alpha) = 0 \quad \text{pour} \quad \alpha > \lambda$$

et $dF_2(\alpha) = 0$ pour $\alpha < \lambda$.

La premiére composante de r représente donc de petites fréquences (grandes périodes), tandis que la seconde correspond à de grandes fréquences (petites périodes).

Mais nous allons réduire maintenant l'indétermination des spectres par des considérations d'ordre *quantique*.

17. *Quantification du spectre des ondes stationnaires.*

a) Il est bien clair d'abord que k est une variable *quantifiée*, car après avoir fait une ou plusieurs fois le tour du paralléle, le coefficient de corrélation $g(k)$ doit reprendre la même valeur.

D'où:

$$2\pi R \cos \varphi \frac{\beta}{c} = 2\pi m,$$

R, étant le rayon de la Terre;

φ, la latitude géographique et m, un nombre entier. On en déduit:

$$\beta = \frac{2\pi m}{T_c \cos \varphi},$$

T_c désignant $\frac{2\pi R}{c}$, soit le temps nécessaire aux ondes de vitesse c pour boucler un grand cercle du globe terrestre.

b) Nous allons introduire aussi une quantification par rapport au temps. La cause *physique* du mouvement de l'atmosphère est la *radiation solaire* et cette cause présente une symétrie statistique de révolution autour de l'axe des pôles, car dans le cours d'une année disparait l'influence de l'inclinaison de l'écliptique sur l'équateur. Or cette cause présentant pour un méridien donné une période (statistique) de 24 heures, il nous semble nécessaire que cette période de 24 H soit la période *fondamentale* de $r(h)$. Et ceci nous améne à considérer aussi h comme une variable quantifiée, et à poser:

$$\alpha = \frac{2\pi n}{24} \quad (n, \text{ entier}).$$

18. *Application des conditions quantiques à l'équation* (E'_1).

En se rappelant que $\lambda = \frac{4\pi}{24} \sin \varphi$, la condition (D_1) se traduit, appliquant les conditions quantiques, par l'équation suivante, par rapport aux inconnues *entiéres* m et n:

$$\left(\frac{24}{T_c \cos \varphi}\right)^2 m^2 + n^2 = 4 \sin^2 \varphi \qquad (D'_1).$$

Il en résulte immédiatement l'inégalité:

$$n \leqq 2 \sin \varphi.$$

Hormis le pôle (où $\sin \varphi = 1$) et l'équateur (où $\sin \varphi = 0$), la seule valeur acceptable pour n es $n = 1$.

Pour le pôle: $n = 0$, 1 ou 2 et il en résulte $m = 0$.

Pour l'équateur: $n = 0$ et aussi $m = 0$.

Pour toute autre latitude: $n = 1$, et alors m a une borne supérieure, qui est:

$$\frac{T_c}{24} \cos \varphi \sqrt{3 - 4 \cos^2 \varphi}.$$

Le maximum de cette expression s'obtient pour

$$\cos^2 \varphi = \frac{3}{8}, \text{ et sa valeur est } \frac{3}{4} \frac{T_c}{24}.$$

La valeur expérimentale de c (déduite des sondages aérologiques § 12) est: $c=170$ km/h. Nous adopterons la valeur très légérement différente: $c=168$ km/h, parce qui elle va nous conduire à des valeurs *numériques exactement* égales à celles qui correspondent à l'idée de quantification.

De cette valeur de c, va résulter:

$$T_c = \frac{40.000}{168} = 238 \text{ heures.}$$

On doit avoir alors:

$$m \leqq 7{,}4 \ldots$$

D'où les valeurs entiéres possibles de m: $m=0,1,2,3,4,5,6,7$.

Finalement, les latitudes possibles des ceintures de calmes correspondant à l'équation (E_1) sont les racines des équations:

$$\cos^4\varphi - \frac{3}{4}\cos^2\varphi + \left(\frac{12m}{238}\right)^2 = 0 \qquad (D''_1),$$

où $m=0,1,2,\ldots,7$.

C'est à dire en résolvant:

$$\cos\varphi = \sqrt{\frac{3}{8}\left[1 \pm \sqrt{1-0{,}0181\,m^2}\right]}.$$

Il faut leur ajouter d'autre part l'équateur $(\varphi=0)$ avec lequel elles n'ont pas de solution de continuité. Ces latitudes sont reproduites dans le tableau ci-dessous.

m	0	1	2	3	4	5	6	7
φ_1	30°	30°15'	30°55'	32°5'	33°45'	36°10'	39°30'	45°
φ_2	90°	86°20'	83°15'	79°20'	75°55'	71°45'	66°55'	60°

Ces résultats sont bien conformes aux grands traits de la circulation générale, telle qu'on pourrait la concevoir si le globe terrestre était poli et uniforme. A savoir (outre les calmes équatoriaux formant un anneau continu):

a) une zone de calmes subtropicaux, pouvant couvrir la zone 30°—45° de latitude.

b) une zone de calmes aux latitudes élevées (possibilités: 60°—90°).

c) une zone (zone tempérée: 45°—60°) où la circulation générale est *toujours active* et qui doit être par conséquent la zone perturbée par excellence.

d) une zone équatoriale (0°—30°) à circulation toujours active et par suite, possiblement perturbée.

A remarquer que la zone équatoriale et la zone tempérée, séparées par une zone de calmes doivent avoir nécessairement des circulations de *sens contraires* (en fait: vents d'Est et vents d'Ouest, respectivement).

Nous ne pouvons nous empêcher de souligner les valeurs *rondes* des latitudes: 0°, 30°, 45°, 60°, 90°, qui délimitent les différentes zones et paraissent correspondre aussi à une certaine régle de quantification. La valeur numérique de c (168 km/h) est visiblement liée à cette circonstance, ce qui constitue une seconde confirmation de l'existence physique de cette vitesse de propagation.

19. *Sens physique de la Théorie. Cas du globe réel.*

Il est bon de s'arrêter un moment sur le sens physique qu'il convient de donner à la présente théorie. Nous avons déterminé par une méthode de quantification les latitudes *possibles* des ceintures de calmes; ce n'est pas dire qu'elles soient réalisées *à la fois* sur le même astre fluide, mais que si nous pouvions étudier une *collection* de planétes, nous trouverions ces différents aspects avec une fréquence proportionnelle à leurs probabilités respectives. De même, la Physique atomique détermine les diverses structures possibles des atomes et chaque configuration correspond à un corps simple. Par analogie avec ce qui se passe en physico-chimie, on peut penser que ce sont les édifices les plus complexes qui sont les plus rares (ou encore les moins stables). On devrait donc s'attendre de préférence ici à des calmes subtropicaux et polaires, ce qui n'est d'ailleurs pas loin de la vérité.

De plus, il faut admettre que l'atmosphère puisse, sous l'influence d'actions extérieures, passer provisoirement d'une configuratión stable à une autre (concept analogue à celui de la *transmutation* des éléments chimiques); c'est ce qui constitue la succession des *régimes météorologiques*. Il est intéréssant de noter, à ce sujet, que les anticyclones subtropicaux tendent à se morceler quand ils s'élévent en latitude (conformément à la loi de croissance de m avec φ, prévue par la Théorie).

Venons en maintenant au globe terrestre *réel*. Il est bien clair que la répartition des continents et des mers, sur chaque paralléle, exerce une influence (permanente et même saisonniére) sur la structure des ceintures de calmes. De sorte que ne se peuvent réaliser que les états quantifiés qui sont adaptés à la structure de la croûte terrestre. Ainsi, pourquoi y-a-t il précisément *trois anticyclones* permanents dans l'hémisphère sud? C'est vraisemblablement parce qu'il y a *trois continents*, distribués d'ailleurs selon une symétrie *equilatérale*. Cette symétrie doit s'imposer à la circulation générale sur un globe uniforme, de maniére que l'état quantifié stable qui seul peut s'établir correspond à la latitude pour laquelle $m = 3$, c'est à dire:

$$\varphi = 32^{o}\,5'.$$

Cette valeur est en *très* bon accord avec les faits expérimentaux.

Dans l'hémisphère nord où il n'y a, aux latitudes subtropicales, que *deux* continents (d'ailleurs non symétriquement distribués) on doit attendre une latitude légérement plus basse ($\varphi = 31^{o}$).

Pour les régions polaires australes, la symétrie de révolution est assez bien réalisée par le seul continent antarctique ($m = 1$), de sorte que la zone des calmes se constituerait vers 86° de latitude sud.

Dans les régions boréales les inégalités de la répartition des terres et des mers et son absence de symétrie de révolution, font évidemment penser que la position et la stabilité des calmes doit s'écarter beaucoup du cas d'un globe uniforme. Tout ce que l'on peut diré c'est qu'étant donné la complexité de la situation, les calmes doivent tendre à s'établir à des latitudes plus basses que dans la calotte polaire australe, jusqu'à s'approcher de leur plus extrême limite: 60°.

20. *Discussion de l'équation* (E'_2).

La méthode de quantification appliquée à l'équation (E'_2) ne donne pas, comme pour l'équation (E'_1) des résultats conformes à la réalité expérimentale. Nous n'avons cependant pour le moment aucune raison d'ordre physique pour l'éliminer.

Avec l'equation (E'_2) — qui est l'équation des ondes classique — nous parvenons à l'équation en nombre entiers (analogue à D'_1):

$$n^2 - \left(\frac{24}{T_c \cos \varphi}\right)^2 m^2 = 4 \operatorname{sen}^2 \varphi .$$

On trouve:

a) la solution équatoriale ($m = 0$, $n = 0$), comme auparavant.

b) la solution: $n = 1$; $m = 0, 1, 2 \ldots 10$, qui limite les latitudes de calmes entre 0° et 30° (le cas $m = 3$ correspondant à $\varphi = 28°$, qui n'est pas en accord avec l'expérience qui exige φ un peu supérieur à 30°).

c) les solutions: $n = 2, 3 \ldots \infty$; $m(n) = 0, 1, 2 \ldots 10\,n$, qui sont valables pour toutes les latitudes.

Sans doute, les conditions à la surface de la Terre empêchent — elles qu'elles se réalisent, ou bien représentent — elles une autre classe de phénomènes que ceux avec lesquels nous cherchons à les confronter?

21. *Conclusion.*

Ce travail n'est qu'une esquisse et indique surtout une nouvelle voie à suivre.

Il nous paraít intéressant par la suite:

1.°) de traiter des ondes atmosphèriques dans le sens *vertical*, s'appuyant sur la formule hydrostatique aléatorisée.

2.°) d'attaquer le probléme dans toute sa généralité en introduisant la forme sphèrique du globe, ce qui pose avant tout la question de définir une stationnarité appropriée aux groupes de transformation cinématiques d'une sphère en rotation.

BIBLIOGRAPHIE

J. E. MOYAL, *Stochastics processes and statistical physics.* Journal of the Royal Statistical Society, Series B, vol. XI, Nº 2, 1949.

HADAMARD, *Leçons sur l'hydrodynamique et la théorie des ondes.* Paris, (Gauthier-Villars ed.).

BERRY, BOLLAY, BEERS, *Handook of Meteorology.*

KARMAN and HOWARTH, *Proc. Roy. Soc., A., 164,* 192 (1938).

W. H. DINES, *The caracteristics of the free atmosphere* (Geophysical Mémoirs, Nº 13, 1919).

PEPPLER, *Die Windverhältnisse der Atmosphäre* (Arbeiten des Preussischen Aeronautischen Observatoriums bei Lindenberg, XIII, Band).

G. DEDEBANT et R. DI MAIO, *Isocorrelación bárica aplicada a la República Argentina* (Meteoros, enero-julio 1952, Nos. 1 y 2).

CRONICA

CREACION DE UN INSTITUTO DE MATEMATICA EN LA UNIVERSIDAD DE CUYO

La Universidad Nacional de Cuyo ha creado un Instituto de Matemática en Mendoza, como nueva rama de su Departamento de Investigaciones Científicas.

Sus objetivos son: la investigación, la formación de investigadores y la difusión de los conocimientos matemáticos, colaborando con las otras instituciones similares en nuestro país y América Latina.

El Instituto cuenta ya con el siguiente personal: Mischa Cotlar, Director del Instituto, M. Gutiérrez Burzaco, G. Klimovsky, A. Monteiro, R. Ricabarra, O. Varsavsky, O. Villamayor, D. Voelker y E. Zarantonello, más un pequeño grupo de estudiantes provenientes de las Universidades de Buenos Aires, Cuyo y Eva Perón.

Se mantendrán diversos seminarios sobre los temas:

1. Operadores no acotados.
2. Conos y aplicaciones al análisis.
3. Transformaciones de Laplace.
4. Grupos de homotopía.
5. Hidrodinámica matemática.
6. Teoría de la estrategia.
7. Teoría de anillos.
8. Lógica matemática.

El Instituto publicará una revista y hará editar fascículos conteniendo el material básico de los seminarios. Se ha comenzado a adquirir el material bibliográfico especializado indispensable.

Esta acertada iniciativa se debe a la visión y energía del Rector de la Universidad de Cuyo, Dr. I. Fernasdo Cruz y a la colaboración de los matemáticos y físicos cuyanos, en especial al asesoramiento del distinguido matemático Dr. Antonio Monteiro.

El Instituto inició sus actividades regulares en marzo pasado.