GENERALIZACION DE UNA DESIGUALDAD GEOMETRICA DE FELLER

por L. A. SANTALÓ

SUMMARY. – Using some results of integral geometry a direct and simple proof of the following inequality of Ueno-Hombu-Naito is obtained. Let D be a measurable domain of the n-dimensional space S_n of constant curvature $K=k^2$ contained in the non-euclidean sphere of radius α. Suppose that the intersection of D with any r-space L_r has a measure not exceeding a fixed constant δ. Then the inequality (9) holds, where M is the measure of D and O_{n-r-1}, $H_{r,n-r-1}$ are given by (3) and (2) respectively.

This generalizes a geometric inequality of Feller which corresponds to $r=1$, $K=0$. For the case $r=1$ a more general inequality is given by (13) which holds for any riemannian space not necessarily of constant curvature (F = area of a convex hypersurface wich constains D).

1. *Introducción.* Sea D un dominio del espacio n-dimensional S_n de curvatura constante $K=k^2$, contenido en una esfera geodésica de radio α. Supongamos que la intersección de D con todo subespacio lineal L_r de r dimensiones de S_n tenga una medida no superior a un valor constante δ. Ueno-Hombu-Naito [4] han considerado el problema de hallar una acotación de la medida M de D en función de δ y α, generalizando de esta manera un problema análogo considerado por Feller [1], el cual se refería únicamente al caso $r=1$ y al espacio euclidiano $K=0$.

El objeto de esta nota es ver como se puede llegar al resultado de Ueno-Hombu-Naito de manera mucho más rápida que la seguida por estos autores utilizando fórmulas conocidas de geometría integral.

Además en el N.º 4 generalizamos el caso considerado por Feller ($r=1$) a un espacio de Riemann cualquiera, no necesariamente de curvatura constante.

2. *Fórmulas conocidas.* Las fórmulas que necesitamos recordar de geometría integral son las siguientes:

a) La medida de los subespacios lineales L_r de S_n que tienen punto común con una esfera geodésica E_α de radio α, vale [2, pág. 24].

$$\int\limits_{L_r \cap E_\alpha \neq 0} dL_r = \frac{O_{n-1}\, O_{n-2} \cdots O_{n-r-1}}{2\, O_1\, O_2 \cdots O_{r-1}} H_{r,n-r-1} \tag{1}$$

habiendo puesto

$$H_{r,n-r-1} = k^{r+1-n} \int_0^\alpha \cos^r k\rho \, \mathrm{sen}^{n-r-1} k\rho \, d\rho \tag{2}$$

y representando O_i el área de la esfera euclidiana i-dimensional, o sea,

$$O_i = \frac{\Gamma((i+1)/2)}{2\pi^{(i+1)/2}}. \tag{3}$$

b) Llamando σ_r a la medida de la intersección de un dominio D con un L_r, vale [2, pág. 27]

$$\int \sigma_r \, d\, L_r = \frac{O_{n-1}\, O_{n-2} \cdots O_{n-r}}{2\, O_1\, O_2 \cdots O_{r-1}} M \tag{4}$$

donde la integración está extendida a todos los L_r que cortan a D y M es la medida (volumen) de D.

c) Para un espacio de Riemann n-dimensional cualquiera, llamando σ a la longitud de la intersección del dominio D con una geodésica G y siendo dG la densidad para medir conjuntos de geodésicas, vale [3, pág. 6]

$$\int \sigma \, dG = \frac{1}{2} O_{n-1} M \tag{5}$$

donde la integración está extendida a todas las geodésicas que cortan a D.

Además, si m es el número de puntos de intersección de la geodésica G con una hipersuperficie de área F, vale

$$\int m \, d\, G = \frac{O_{n-2}}{n-1} F. \tag{6}$$

3. *La desigualdad buscada.* Con las fórmulas anteriores la

acotación de M en función de δ y α es ya inmediata. En efecto, si por hipótesis se verifica

$$\sigma_r \leqq \delta \tag{7}$$

y D está contenido en E_α, se tendrá

$$\int\limits_{L_r \cap D \neq 0} \sigma_r \, d L_r \leqq \delta \int\limits_{L_r \cap E_\alpha \neq 0} d L_r \tag{8}$$

y por tanto, de (4) y (1) se deduce

$$M \leqq \delta \, O_{n-r-1} \, H_{r,n-r-1} \tag{9}$$

que es la desigualdad buscada.

Se tiene así, en una sola fórmula, y con una misma demostración los tres casos $K=0$, $K=1$, $K=-1$ que Ueno-Hombu-Naito consideran por separado.

Tanto Feller como Ueno-Hombu-Naito consideran el caso, un poco más general, en el cual en vez de σ_r, se considera el valor de la integral $\int f(x) \, d\sigma_r$ de una función $f(x)$ definida en los puntos x de D, donde $d\sigma_r$ indica el elemento de volumen r-dimensional sobre L_r y la integración está extendida sobre la intersección σ_r de L_r con D. En este caso, en lugar de (4) hay que considerar la fórmula

$$\int\limits_{D \cap L_r \neq 0} \int\limits_{\sigma_r} \left(f(x) \, d\sigma_r \right) d L_r = \frac{O_{n-1} \ldots O_{n-r}}{2 \, O_1 \ldots O_{r-1}} \int\limits_D f(x) \, dx \tag{10}$$

donde dx indica el elemento de volumen del espacio S_n.

Esta fórmula se deduce inmediatamente de las mismas consideraciones por las cuales se demuestra (4).

Entonces, si se supone que en lugar de (7) se verifica

$$\int f(x) \, d\sigma_r \leqq \delta \tag{11}$$

y se sigue representando por M la última integral de (10), resulta la misma acotación (9).

4. *El caso* $r=1$. En el caso de cortar D por geodésicas puede considerarse en un espacio de Riemann cualquiera, no necesariamente de curvatura constante.

Solo hace falta suponer que D está contenido en el interior de una hipersuperficie Q *convexa* [3, pág. 5], es decir, una hipersuperficie tal que. a) toda geodésica solo pueda tener con ella o bien dos puntos comunes, o bien un arco entero; b) ella es contorno de una parte simplemente conexa del espacio tal que cualquier geodésica que tiene punto interior a esta parte, corta al contorno Q.

Con esta condición sea F el área (o medida $(n-1)$ dimensional) de la hipersuperficie Q que contiene a D. Si la intersección σ de cualquier geodésica G con D es $\leqq \delta$, será

$$\int_{G \cap D \neq 0} \sigma \, dG \leqq \delta \int_{G \cap Q \neq 0} dG \tag{12}$$

y por tanto, de (5) y de (6) para el caso actual en que $m=2$ por ser Q convexa, se deduce

$$M \leqq \frac{\delta}{n-1} \frac{O_{n-2}}{O_{n-1}} F. \tag{13}$$

Para el caso de ser Q una esfera geodésica de radio a y el espacio de curvatura constante K, esta fórmula coincide naturalmente con el caso particular $r=1$ de la desigualdad general (9).

BIBLIOGRAFIA

[1] W. FELLER, *Some Geometric inequalities,* Duke Mathematical Journal, vol. 9, págs. 885-892, 1942.

[2] L. A. SANTALÓ, *Geometría Integral en espacios de curvatura constante,* publicaciones de la Comisión Nacional de la Energía Atómica, vol. I, nº 1, 1952.

[3] — — *Measure of sets of geodecis in a Riemannian space and applications to integral formulas in elliptic and hyperbolic spaces,* Summa Brasiliensis Mathematicae, vol. 3, fasc. 1, 1952.

[4] S. UENO - H. HOMBU - J. NAITO, *Some integral-geometric inequalities,* Memoirs of the Faculty of Sciences, Kyusyu University, Ser. A., vol. VI, Nº 1, 1951.

COMISIÓN NACIONAL DE LA ENERGÍA ATÓMICA

Buenos Aires.