SOPRA UNA LARGA ESTENSIONE DI UNA CLASSICA PROPRIETA DELLE FUNZIONI ARMONICHE

di GUIDO ASCOLI, Torino (Italia)

Un teorema ben noto afferma che se una funzione di n variabili è armonica in un insieme aperto e limitato A e continua sul suo contorno $\mathrm{F}A$, essa assume i suoi valori estremi sul contorno, sicchè ogni intervallo che contiene i valori della funzione in $\mathrm{F}A$ contiene altresì i suoi valori in A.

Sotto questa forma la proprietà ammette una facile estensione, che non pare sia stata esplicitamente notata, e che consente qualche utile applicazione. Inoltre tale estensione, per le ipotesi che essa implica, è possibile in un campo ben più vasto, potendo riguardare opportune classi di funzioni reali, definite in insiemi di natura qualunque. All'esposizione di tale risultato, che ritengo possa interessare numerosi campi di ricerca, e a qualche suo caso particolare notevole, è dedicato il presente scritto.

1. Sia I un insieme, K una sua parte, f una funzione reale degli elementi di I. Diremo che f è *estremata in* K quando l'estremo inferiore e l'estremo superiore di $f(x)$, per x variabile in I, coincidono con l'estremo inferiore e con l'estremo superiore di $f(x)$, per x variabile in K. Con simboli oggi assai diffusi scriveremo:

$$(1) \qquad \inf f(\text{in } I) = \inf f(\text{in } K), \ \sup f(\text{in } I) = \sup f(\text{in } K).$$

Diremo poi, come di consueto, che una classe (L) di funzioni reali definite in I è *lineare* se, presi due elementi di (L), appartiene ad (L) anche ogni loro combinazione lineare a coefficienti reali. Per esprimere che le funzioni f di una classe lineare (L) sono estremate in K (o, come anche diremo, che (L) è estremata in K) basta scrivere per esse una delle (1), ottenendosi l'altra da questa col mutamento di f in $-f$.

2. *Sia* (L) *una classe di funzioni reali definite in* I, *lineare ed estremata in* K *ed* $f_1, f_2 \dots f_n$, n *suoi elementi qualsiasi. Se per ogni* x *di* K *il punto* $Q \equiv (f_1(x), f_2(x) \dots f_n(x))$ *di* S_n *appartiene ad un corpo convesso* C (¹), *tale punto apparterrà a* C *anche per ogni* x *di* I.

La cosa è banale se C è l'intero spazio S_n; in caso opposto esisterà almeno un semispazio Σ di S_n, definito da

$$a_1 y_1 + a_2 y_2 + \dots + a_n y_n \geqq b$$

che contiene C. Per l'ipotesi si avrà allora:

$$a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x) + \dots + a_n f_n(x) \geqq b \tag{2}$$

per $x \in K$. Ma il primo membro della (2) è un elemento di (L), quindi è estremato in K; ne segue che la (2) vale anche per ogni $x \in I$, cioè che anche in tale ipotesi Q sta in Σ.

Ma è noto che un corpo convesso è intersezione completa dei semispazi che lo contengono; dunque Q sta in C per ogni $x \in I$, come si voleva.

In particolare si potrà affermare che *l'inviluppo convesso di* Q, *per* $x \in I$, *coincide con l'inviluppo convesso di* Q *per* $x \in K$. Infatti i due inviluppi si contengono vicendevolmente.

3. Dall'enunciato precedente, variando il corpo C, se ne possono ottenere quanti altri si vogliano; ne scegliamo qualcuno, di particolare interesse.

a) Si dimostra facilmente che se $G(y_1, y_2, \dots, y_n)$ è una forma quadratica definita o semidefinita positiva, l'insieme definito da

$$G(y_1, y_2, \dots, y_n) \leqq R^2.$$

(¹) Per le poche nozioni qui necessarie sui corpi convessi v.: Bonnesen, T. und Fenchel, W., *Theorie der konvexen Körper* (Ergebnisse der Mathematik, Bd. III, H. 1; Berlin, Springer, 1934).

è un corpo convesso (²). Ne segue che se (con le notazioni del n. 2) la relazione:

$$G(f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)) \leqq R^2$$

vale in K, essa vale in I. E di qui, al variare di R,

$$\sup G(f_1, f_2, \ldots, f_n) \text{ (in } I) = \sup G(f_1, f_2, \ldots, f_n) \text{ (in } K).$$

Come caso particolare, considerando il vettore f di componenti $f_1, f_2 \ldots f_n$ e prendendo $G = \Sigma f_i^2$ risulta che

$$\sup |\mathrm{f}| \text{ (in } I) = \sup |f| \text{ (in } K).$$

b) Le diseguaglianze

$$y_1^{\alpha_1}\, y_2^{\alpha_2} \ldots y_n^{\alpha_n} \geqq R^2, \quad y_i \geqq 0, \quad \alpha_i \geqq 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

definiscono pure un corpo convesso (³). Ne risulta che se per $x \in K$ le f_i sono positive o nulle e tali che

$$[f_1(x)]^{\alpha_1}\, [f_2(x)]^{\alpha_2} \ldots [f_n(x)]^{\alpha_n} \geqq R^2$$

(²) Posto $G(Y_1, Y_2 \ldots Y_n) = G(Y) = \Sigma\, a_{ik}\, y_i\, y_k$, $g(y, z) = \Sigma\, a_{ik}\, y_i\, z_k$ $(a_{ik} = a_{ki})$ si ha, per λ e μ reali qualunque:

$$G(\lambda y + \mu z) = \lambda^2 G(y) + 2\lambda\mu\, g(y, z) + \mu^2 G(z) \geq 0$$

e quindi $g^2(y, z) \leq G(y) G(z)$. Ne segue, per $\lambda = t$, $\mu = 1 - t$, con $0 \leq t \leq 1$

$$G(ty + (1-t)z) \leq (t\sqrt{G(y)} + (1-t)\sqrt{G(z)})^2.$$

Di qui, se $G(y) \leq R^2$, $G(z) \leq R^2$ segue $G(ty + (1-t)z) \leq R^2$ che esprime la asserita convessità.

(³) Per $0 \leq t \leq 1$ vale (cfr. HARDY, LITTLEWOOD and POLYA, *Inequalities* (Cambridge, 1934), n° 37 la diseguaglianza

$$ty_i + (1-t)z_i \geq y_i^t\, z_i^{1-t}$$

donde segue

$$\Pi\, (ty_i + (1-t)z_i)^{\alpha_i} \geq (\Pi\, y_i^{\alpha_i})^t (\Pi\, z_i^{\alpha_i})^{1-t}$$

e di qui, ammettendo che si abbia:

$$\Pi\, y_i^{\alpha_i} \leq R^2 \quad , \quad \Pi\, z_i^{\alpha_i} \leq R^2$$

risulta subito l'asserto.

le stesse proprietà varranno anche in I. In altre parole, per $f_i \geqq 0$ in K,

$$\inf(f_1^{\alpha_1} f_2^{\alpha_2} \dots f_n^{\alpha_n}) \text{ (in } I) = \inf(f_1^{\alpha_1} f_2^{\alpha_2} \dots f_n^{\alpha_n}) \text{ (in } K).$$

c) E' ancora convesso l'insieme piano definito da:

$$y_2 \geqq R^2 y_1^{\alpha}, \quad y_1 \geqq 0, \quad \alpha \geqq 1 \ (^4).$$

Ne segue che se la diseguaglianza

$$f_2(x) \geqq R^2[f_1(x)]^{\alpha}$$

è valida in K, essa è valida in I. Di qui, per f_1, f_2 positive in K:

$$\inf \frac{f_2}{f_1^{\alpha}} \text{ (in } I) = \inf \frac{f_2}{f_1^{\alpha}} \text{ (in } K).$$

d) Nel caso $\alpha = 1$ si può dare un risultato più preciso, che consente anzi una immediata dimostrazione diretta. Qualunque sia M, la funzione $f_2(x) - M f_1(x)$ è estremata in K, quindi se è in K

$$f_2(x) \geqq M f_1(x) \quad \text{oppure} \quad f_2(x) \leqq M f_1(x)$$

le stesse relazioni valgono in I. Sia ora $f_1 > 0$; ne segue che se è in K

$$f_2(x)/f_1(x) \geqq M \quad \text{oppure} \quad f_2(x)/f_1(x) \leqq M$$

lo stesso vale pure in I. In altre parole: se $f_1 > 0$ in K, f_2/f_1 *è estremata in* K.

---

(4) La cosa può dedursi dalla concavità in alto della curva $y_2 = R^2 y_1^{\alpha}$; direttamente ricordando la diseguaglianza (cfr. l. c. nota (3), n° 16), valida per $0 \leq t \leq 1$,

$$[t y_1^{\alpha} + (1-t) z_1^{\alpha}]^{1/\alpha} \geq t y_1 + (1-t) z_1$$

da cui, supponendo $y_2 \geq R^2 y_1^{\alpha}$, $z_2 \geq R^2 z_1^{\alpha}$ segue:

$$t y_2 + (1-t) z_2 \geq R^2 (t y_1^{\alpha} + (1-t) z_1^{\alpha}) \geq R^2 (t y_1 + (1-t) z_1)^{\alpha}$$

cioè la tesi.

e) Dalla concavità verso il basso della curva

$$e^{y_1} + e^{y_2} = M,$$

che porta alla convessità dell'insieme definito da

$$e^{y_1} + e^{y_2} \leqq M,$$

segue nello stesso modo:

$$\sup(e^{f_1} + e^{f_2}) \text{ (in } I) = \sup(e^{f_1} + e^{f_2}) \text{ (in } K).$$

4. Le applicazioni dei risultati precedenti possono essere molto varie; ma per il momento le sole importanti ci sembrano essere quelle in cui, A essendo un insieme aperto di uno spazio topologico, $\mathrm{F}A$ il suo contorno, si assume $I = A + \mathrm{F}A$, $K = A$. Si parlerà allora di *sistemi lineari di funzioni estremate al contorno*. Si potrà poi scendere al caso degli spazi cartesiani; e si presentano allora come esempi salienti quello delle funzioni armoniche, da cui sbbiamo preso le mosse, o più generalmente quello delle soluzioni di equazioni lineari omogenee alle derivate parziali, di tipo ellittico, in campi sufficientemente ristretti. Per dare un esempio particolarmente espressivo ci riferiremo qui appunto al caso di *funzioni f_i armoniche nell'insieme aperto e limitato A di un S_k, continue al contorno.*

Dal n. 3, a) abbiamo allora: *Se $G(y_1, y_2 \dots y_n)$ è una forma definita o semidefinita positiva, la funzione $G(f_1, f_2 \dots f_n)$ assume il suo valore massimo sul contorno di A.* (Non possiamo escludere a priori che tale massimo possa essere assunto anche in punti di A).

In particolare: *se le componenti di un vettore sono armoniche, il suo modulo assume il suo valore massimo al contorno di A.* E se come componenti si assumono le derivate parziali di una funzione armonica, supposte continue al contorno, si ha che *il modulo del gradiente di una funzione armonica assume il suo massimo sul contorno.*

Dal n. 3, b) abbiamo poi: *se le funzioni armoniche f_i e i numeri α_i sono positivi o nulli, la funzione $f_1^{\alpha_1} f_2^{\alpha_2} \dots f_n^{\alpha}$ raggiunge il suo minimo al contorno.* E dal n. 3, c) segue che raggiunge pure il suo minimo al contorno la funzione f_1/f_2^{α}, per $f_2 \geqq 0$, $f_1 > 0$ e $\alpha \geqq 1$.

Più completo è il risultato del n. 3, d): *il rapporto di due funzioni armoniche, la seconda delle quali è positiva, è estremato al contorno.* Infine dal n. 3, e) otteniamo che se f_1 e f_2 sono armoniche, la funzione $e^{f_1}+e^{f_2}$ raggiunge il suo minimo al contorno.

Osserviamo, per concludere, che quando le conclusioni si applicano, come in questo caso, anche ad ogni parte aperta di A, si possono facilmente ricavare dimostrazioni per l'impossibilità di un massimo, oppure di un minimo in senso stretto in un punto di A per le funzioni considerate. Direttamente, la questione è stata trattata da Colucci (5) del caso $(f_1^2+f_2^2)^{1/2}$, da me (6) nel caso f_1/f_2, il quale consente applicazioni di un certo rilievo.

(5) Colucci (A.), *Sulle funzioni armoniche complesse* (Giornale di Matematiche, 65 (1927), 135-38).

(6) Ascoli (G.), *Sull'unicità della soluzione nel problema di Dirichlet* (Rend. Accad. Naz. Lincei (6), 8, 2º sem. 1928, 348-51); *Sulle singolarità isolate delle funzioni armoniche* (Boll. Unione Mat. Italiana, 7 (1928), 230-37).