# SOBRE LA TEORIA ALGEBRAICA DE LA MEDIDA Y EL TEOREMA DE HAHN-BANACH (*)

por MISCHA COTLAR, Mendoza (Argentina)

En un trabajo fundamental [1], von Neumann, continuando investigaciones anteriores de Hausdorff y Banach, estudió el problema de la existencia de medidas finitas invariantes respecto de un grupo $G$ de transformaciones, y definidas sobre todos los conjuntos del espacio $R$. En particular v. Neumann demostró que tales medidas existen si $R = G$ y si el grupo $G$ es conmutativo o, más generalmente, resoluble. Todavía Banach [2] ha señalado, en casos más particulares, la relación de este problema con el teorema de Hahn-Banach de extensión de funcionales lineales. Esta idea de Banach ha sido desarrollada por Agnew y Morse [3] quienes han trasladado el resultado mencionado de v. Neumann a funcionales lineales invariantes $f(x)$, que además verifican $f(x) \leqq p(x)$, donde $p(x)$ es una funcional semilineal dada. Agnew [4] dió además criterios generales para la existencia de tales funcionales. Por otra parte Tarski [5] consideró el problema de la existencia de medidas invariantes desde el punto de vista algebráico.

En la presente nota damos una forma general del teorema de

(*) Este artículo ha surgido de las conversaciones que tuvimos con R. A. Ricabarra, y como apéndice a nuestro trabajo sobre medidas invariantes [6]. Los resultados principales han sido expuestos por el autor en una reunión de la Unión Matemática Argentina (dedicada a A. Zygmund) en 1948. Desde entonces han aparecido varios trabajos sobre el tema, sin embargo creemos que nuestro trabajo contiene algunas novedades, en cuanto la idea fundamental es considerar funcionales que verifican $f(x) \leqq p(x)$ (Cfr. [9]).

Hahn-Banach que unifica, y que permite deducir de un modo uniforme y simple, los resultados mencionados de v. Neumann, Agnew-Morse y Tarski, así como algunas otras propiedades que creemos nuevas.

La lectura de esta nota no presupone, pues, conocimiento alguno del tema.

Sea $X = \{x, y, z, \ldots\}$ un semigrupo: en $X$ está definida una suma $x + y$, comutativa y asociativa, con un cero 0, $0 + x = x$. Si $n \geqq 0$ es un entero escribiremos $nx = x + \ldots + x$, $0x = 0$. Supondremos además que $X$ es un semigrupo ordenado, en el sentido siguiente: En $X$ está definida una relación de orden $x \prec y$, tal que

a) $x \prec x$, b) $x \prec y$, $y \prec z$ implica $x \prec z$,

c) $x \prec y$ implica $x + z \prec y + z$.

De estas propiedades se deduce que

$$x \prec x', y \prec y' \text{ implica } x + y \prec x' + y'. \tag{1}$$

Una función real $f(x)$ definida en $X$ se dirá *aditiva* si es *finita* y si $f(x + y) = f(x) + f(y)$, para todo par $x, y$ de $X$. Ella se dirá monótona, si $x \prec y$ implica $f(x) \leqq f(y)$. En virtud de a), se ve fácilmente que condición necesaria y suficiente para que $f$ sea aditiva y monótona es que ella verifique la siguiente condición:

$$\Sigma\, x_i \prec \Sigma\, y_j \text{ implica } \Sigma\, f(x_i) \leqq \Sigma\, f(y_j).$$

Una función real $p(x)$ definida en $X$ se dirá *subaditiva* si ella es finita y verifica $p(0) = 0$, $p(x + y) \leqq p(x) + p(y)$. En particular, $p(n\,x) \leqq n\,p(x)$, para todo $n \geqq 0$ entero. Sea $c \in X$ un elemento fijo de $X$, $p(x)$ una función subaditiva en $X$, y $a$ un número real. Escribiremos $f(x) \in [X, f(e) = a;\, p]$, si $f(x)$ es aditiva y monótona en $X$, $f(x) \leqq p(x)$ para todo $x \in X$, y $f(e) = a$. Si $f \in [X, f(e) = a;\, p]$ entonces es evidente que

$$\Sigma\, x_i \prec \Sigma\, y_i + z \text{ implica } \Sigma\, f(x_i) \leqq \Sigma\, f(y_i) + p(z). \tag{2}$$

Recíprocamente, si $f$ verifica (2) y $f(e)=a$, entonces $f\in[X,f(e)=a;\,p]$. En efecto, haciendo $z=0$ se obtiene de (2) que $f$ es aditiva y monótona, y haciendo $i=1, y_i=0, x_1=z$, se obtiene $f(z)\leqq p(z)$ para todo $z$. Así pues, (2) junto con $f(e)=a$ puede tomarse como definición de $f\in[X,f(e)=a;\,p]$. De acuerdo a esto damos la siguiente definición.

*Definición 1.* Sea $Y\subset X$ un subconjunto de $X$ tal que $e\in Y$. Escribiremos $f\in[Y,f(e)=a;\,p]$, si $f$ está definida sobre $Y$, $f(e)=a$, y si $f$ verifica (2) para $x_i\in Y, y_i\in Y, z\in X$.

En particular si $Y=X$ obtenemos la definición anterior de $f\in[X,f(e)=a;\,p]$. Diremos que $x$ es *comparable* con $e$ si existen los enteros $m',n',n''\geqq 0$, y los elementos $z',z''$, tales que

$$m'e\prec n'x+z' \quad \text{y} \quad x\prec n''e+z''. \tag{3}$$

Designaremos con $Y(e)$ al conjunto de todos los $x$ comparables con $e$. Diremos que $x$ es *fuertemente comparable con* $e$, si existen $n',n'',m'\geqq 0$, tales que

$$x\prec n''e, \qquad m'e\prec n'x, \tag{4}$$

es decir, si (3) vale con $z'=z''=0$. Designaremos con $Y'(e)$ al conjunto de los elementos comparables fuertemente con $e$. Se ve enseguida que $Y(e)$, $Y'(e)$ son sub-semigrupos de $X$, y que $ne\in Y(e)\cap Y'(e)$ para todo $n\geqq 0$.

*Definición 2.* Escribiremos $f(x)\in[Y'(e),f(e)=a]$ si $f$ está definida sobre $Y'(e), f(e)=a$, y si

$$\Sigma x_i\prec\Sigma y_i \quad \text{implica} \quad \Sigma f(x_i)\leqq\Sigma f(y_i), \tag{5}$$

para todo sistema $x_i, y_i\in Y'(e)$.

*Teorema 1. Sea $e\in Y\subset Y(e)$ y $f_0\in[Y,f_0(e)=a;\,p]$. Entonces existe una $f\in[Y(e),f(e)=a;\,p]$ tal que $f=f_0$ sobre $Y$.*

*Teorema 2. Para que exista una $f\in[X(e),f(e)=a;\,p]$ es necesario y suficiente que se verifique:*

$$ne\prec me+z \quad \textit{implica} \quad (n-m)\,a\leqq p(z) \tag{I}$$

*es decir,* $$\inf_{z;\, ne < me + z} p(z) \geqq (n-m)\, a. \qquad \text{(I bis)}$$

*Corolario 1. Para que exista una* $f \in [Y'(e), f(e) = a]$ *es necesario y suficiente que se verifique*

$$ne \prec me \quad \textit{implica} \quad na \leqq ma \qquad \text{(II)}$$

*Demostración del Teorema 1.* Sea $\alpha \in Y(e)$ y sea $Z = Y \cup \alpha$ el conjunto que contiene un elemento más que $Y$. Vamos a probar la existencia de una $f \in [Z, \mathrm{f}(e) = a;\, p]$ tal que $f = f_0$ sobre $Y$. Por hipótesis vale (2) con $x_i, y_i \in Y, z \in X$. Definimos

$$f(\alpha) = \sup \frac{\Sigma f_0(x_i) - \Sigma f_0(y_i) - mp(z)}{k} \qquad (6)$$

para todos los $x_i, y_i \in Y$, $z \in X$, tales que

$$\Sigma\, x_i \prec \Sigma\, y_i + k\, \alpha + mz. \qquad (7)$$

Veamos ante todo que $f(\alpha)$ es un número finito. Siendo $\alpha \in Y(e)$, es $m' e \prec n' \alpha + z', \alpha \prec n'' e + z''$, luego por definición de $f(\alpha)$ es $f(\alpha) \geqq [m' f_0(e) - p(z')]/n' > -\infty$, además cada vez que $\Sigma\, x_i \prec \Sigma\, y_i + k\,\alpha + mz$ será $\Sigma\, x_i \prec \Sigma\, y_i + mz + kn'' e + kz''$, y puesto que $x', y_i, e \in Y$, resulta que

$$\Sigma\, f_0(x_i) \leqq \Sigma\, f_0(y_i) + kn'' f_0(e) + m\, p(z) + k\, p(z''),$$

luego

$$[\Sigma\, f_0(x_i) - \Sigma\, f_0(y_i) - m\, p(z)]/k \leqq n'' f_0(e) + p(z''),$$
$$\therefore \quad f(\alpha) \leqq n'' f_0(e) + p(z'') < +\infty.$$

Sea ahora $f(x)$ definida sobre $Z = Y \cup \alpha$ de modo tal que para $x \in Y$ es $f(x) = f_0(x)$, y para $x \doteq \alpha$ es $f(\alpha)$ dada por (6). Entonces solo falta probar que

$$\Sigma\, x_i + k\, \alpha \prec \Sigma\, y_i + l\, \alpha + z \qquad (8)$$

implica

$$\Sigma\, f(x_i) + k\, f(\alpha) \leqq \Sigma\, f(y_i) + l\, f(\alpha) + p(z), \qquad (8a)$$

si $x_i, y_i \in Y$. Para ello, como $f(\alpha)$ es finito, dado $\varepsilon > 0$, existen $x_i^*, y_i^* \in Y, k^*, z^*$ tales que

$$\Sigma\, x_i^* \prec \Sigma\, y_i^* + k^* \alpha + z^* \tag{6a}$$

y

$$\frac{\Sigma f_0(x_i^*) - \Sigma f_0(y_i^*) - p(z^*)}{k^*} = \mathrm{f}(\alpha) + \varepsilon_1, \varepsilon_1 < \varepsilon. \tag{7a}$$

De (8) y (6a) obtendremos, usando (1),

$$\Sigma\, k\, x_i^* + \Sigma\, k^* x_i \prec \Sigma\, k\, y_i^* + \Sigma\, k^* y_i + k^* l\, \alpha + k^* z + k\, z^*,$$

luego por definición de $f(\alpha)$,

$$[\Sigma\, k\, f_0(x_i^*) + \Sigma\, k^* f_0(x_i) - \Sigma\, k\, f_0(y_i^*) -$$
$$- \Sigma\, k^* f_0(y_i) - p(k^* z + k\, z^*]/(k^* l) \leqq f(\alpha)$$

$$\therefore\quad [\Sigma\, k\, f_0(x_i^*) - \Sigma\, k\, f_0(y_i^*) - k\, p(z^*) +$$
$$+ \Sigma\, k^* f_0\,(x_i) - \Sigma\, k^* f_0(y_i) - k^* p(z)]/k^* \leqq l\, f(\alpha),$$

y teniendo en cuenta (7a),

$$k\, f(\alpha) + k\, \varepsilon_1 - \Sigma\, f(y_i) + \Sigma\, f(x_i) - p(z) \leqq l\, f(\alpha)$$

$$\therefore\quad \Sigma\, f(x_i) + k\, f(\alpha) \leqq \Sigma\, f(y_i) + l\, f(\alpha) + p(z).$$

Así pues, hemos probado que existe una $f_1 \in [Y \cup \alpha, f(e) = a;\, \mathrm{p}]$ tal que $f_1 = f_0$ sobre $Y$. Si $\beta$ es otro elemento de $Y(e)$, resulta de aquí que existe una $f_2 \in [Y \cup \alpha \cup \beta;\, f(e) = a;\, p]$ tal que $f_2 = f_1$ sobre $Y \cup \alpha$. Siguiendo de esta manera, probaremos el teorema por inducción transfinita.

*Demostración del Teorema 2.* La hipótesis (I) significa que poniendo $Y = \{ne\}$ y $f_0(ne) = na$, es $f_0 \in [Y, f_0(e) = a;\, p]$. Luego por el Teorema 1 existe una $f \in [Y(e), f(e) = a;\, p]$.

*Demostración del Corolario 1.* Como para todo $x \in Y'(e)$ existe un $n'$ con $x \prec n' e$, definimos $p(x) = \inf \{n'\, a\}$, para todos los $x \prec n'e$. Evidentemente $p(x+y) \leqq p(x)+p(y), p(0)=0$, y por la hipótesis (II) es $p(ne)=na$. Luego $p$ es una $p$-función sobre el semigrupo $X=Y'(e)$. Sea $ne \prec me+x, x \in Y'(e)$, y veamos que $p(x) \geqq (n-m)a$. En efecto, sea $x \prec n'e$, luego $ne \prec (m+n')e$ y por (II) $na \leqq (m+n')a, (n-m)a \leqq n'a$, luego $p(x)=\inf\{n'a\} \geqq (n-m)a$. Por tanto es aplicable el teorema 1, y obtenemos una $f \in [Y'(e), f(e)=a; p]=[Y'(e) f(e)=a]$.

Aplicación 1. (Tarski [5]. Supongamos que el orden $\prec$ está definido así: $x \prec y$ si existe un $z$ con $x+z=y$. En este caso para todo $x$ es $x \succ 0$, luego toda $f$ monótona verifica $f(x) \geqq 0$. En este caso la noción «$x$ comparable con $e$» equivale a la de «acotado-$e$» de Tarski. Para este caso particular el Corolario 1 se convierte en el siguiente teorema de Tarski:

*Teorema A. Para que exista una $f(x) \geqq 0$, aditiva, monótona, con $f(e)=a$, definida sobre los $x$ acotados-$e$, y finita, es necesario y suficiente que $ne \prec me$ implique $n \leqq m$.*

Aplicación 2. (Hahn-Banach [2]). Sea $X=\{x, y, \ldots\}$ un espacio vectorial, es decir, en $X$ están definidas las dos operaciones $x+y$ y $\lambda x$ para todo $\lambda$ real. Definimos $x \prec y$, si y solo si, $x=y$. Entonces todo $x$ es comparable con $e$, y $Y'(e)=X$. Supongamos ahora que $p(x)$ tiene además la propiedad $p(\lambda x)=\lambda p(x)$ para todo $\lambda \geqq 0$, y que $f \in [X, f(e)=a; p]$. Entonces será

$$f(x) \leqq p(x), f(-x)=-f(x) \geqq -p(x),$$

$$-p(-x) \leqq f(x) \leqq p(x), -\lambda p(-x) \leqq f(\lambda x) \leqq \lambda p(x) \ (\lambda \geqq 0),$$

y resulta que $f(\lambda_n x) \rightarrow 0$ para $\lambda_n \rightarrow 0$. Como $f(x)$ es aditiva, la relación $f(\lambda x)=\lambda f(x)$ vale para los $\lambda$ racionales, y de la propiedad que acabamos de deducir resulta que esta relación vale para todo $\lambda$ real. Es decir, $f(x)$ resulta ser una funcional lineal. Además, si $ne \prec me+x, ne=me+x$, es $np(e) \leqq mp(e)+p(x)$; luego, existe $f \in [X, f(e)=a; p]$ si, y solo si, $a \leqq p(e)$. En particular, siempre existe una $f \in [X, f(e)=p(e); p]$. Así pues, en este caso, los teoremas 1 y 2 se reducen al siguiente teorema de Hahn-Banach:

*Teorema B. Si $X$ es un espacio vectorial, $p(x)$ definida en todo $X$ tal que $p(x+y) \leqq p(x)+p(y), p(\lambda x)=\lambda p(x)$ para $\lambda \geqq 0$, $Y$ un subespacio vectorial de $X, f_0(x)$ definida y lineal sobre $Y$ con $f_0(y) \leqq p(y)$, entonces existe una funcional $f(x)$ lineal sobre todo $X$ tal que $f(x) \leqq p(x)$, y $f=f_0$ sobre $Y$. En particular siempre existe una $f$ lineal en $X$, tal que $f(x) \leqq p(x)$ y $f(x_0)=p(x_0)$ para un $x_0$ prefijado.*

Aplicación 3. (v. Neumann [1]). Sea $R=\{t\}$ un conjunto de puntos, $G=\{g\}$ un grupo de transformaciones $g=gt$: cada $g$ hace corresponder a cada punto $t$ de $R$ otro punto $gt$ de $R$ de modo que $(g' g'' t)=g'(g'' t), e\,t=t$, si $e$ es la unidad del grupo $G$. En particular, $g^{-1} g\, t=t$. Para todo conjunto $A \subset R, g A$ designa el conjunto de los puntos $g\, t, t \in A$. Por ser $G$ un grupo debe ser $g\, R=R$, porque para todo $t$ es $t=g(g^{-1} t)$. Para cada conjunto $A$ designaremos con $x_A(t)$ la función característica de $A$. Luego

$$x_{gA}(t)=x_A(g^{-1} t).$$

Sea $S \subset R$ un conjunto fijo. Diremos que $A$ es *acotado* respecto de $S$, si $A \subset \bigcup_{i=1}^{n} g_i S$ con $g_i \in G$. Designaremos con $B(S)$ al conjunto de los acotados respecto de $S$. Escribiremos $\mu(A) \in [R, S, G]$ si $\mu(A)$ es una medida definida para todo conjunto $A \subset B(S)$, finita, no negativa, simplemente aditiva, invariante respecto de $G$, y con $\mu(S)=1$. En particular consideraremos medidas $\mu \in [R, R, G]$, lo que significa que $\mu(A)$ está definida para todo $A \subset R$, es invariante respecto de G, y $\mu(R)=1$.

Sea $X=X(R)=\{x, y, \ldots\}$ el conjunto de todas las funciones $x(t)$ de la forma

$$x(t)=\sum_{1}^{n} \lambda_i x_{A_i}(t).$$

$X$ es un semigrupo (un grupo) respecto de la operación de suma ordinaria. Definimos ahora en $X$ la relación de orden $\prec$ como sigue: $x(t) \prec y(t)$ si existen $\lambda_1, \ldots \lambda_n, g_1, \ldots g_n, A_1, \ldots A_n$ tales que

$$x(t)+\sum_{i=1}^{n} \lambda_i(x_{A_i}(t)-x_{g_i A_i}(t) \leqq y(t).$$

Se comprueba fácilmente que esta relación de orden verifica las condiciones a), b), c). De esta definición resulta en particular que $x_{gA}(t) \prec x_A(t)$, y que $x_A(t) \prec x_{gA}(t)$ para todo conjunto $A$ y todo $g$. También se tiene $x_A(t) \succ 0$, $x_A \prec x_R = 1$, para todo $A$.

Además $x_A$ es comparable fuertemente con $e = x_S$, si y solo si $A \in B(S)$. Si $f(x)$ es aditiva y monótona sobre $X$, será

$$f(x_A + x_B) = f(x_A) + f(x_B) \text{ y } f(x_{gA}) = f(x_A),\ f(x_A) \geqq 0.$$

Por tanto, poniendo $\mu(A) = f(x_A)$ obtendremos una medida invariante respecto de $G$. Luego toda $f$ aditiva monótona genera una medida $\mu$ invariante, y viceversa. Del Corolario 1 obtendremos entonces este teorema.

*Teorema C. Sea $N(G) = \{u\}$ el conjunto de todas las funciones $u \in X$ de la forma*

$$u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (x_{A_i} - x_{g_i A_i}),\ g_i \in G. \tag{III}$$

*Entonces para que exista una medida $\mu \in [R, S, G]$ es necesario y suficiente que no exista una desigualdad de la forma*

$$x_S(t) \prec u(t), \quad u \in N(G). \tag{IIIa}$$

En efecto, la condición: $m\, x_S \prec n\, x_S$ implica $m \leqq n$, equivale ahora a: $(m-n)\, x_S \prec 0$ implica $m-n \leqq 0$, y eso equivale a la condición: $x_S$ no es $\prec 0$.

Si, en cambio, definimos $x(t) \prec y(t)$ si, y solo si,

$$x + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (x_S - x_{g_i S}) \leqq y,$$

obtendremos el siguiente teorema de v. Neumann:

*Teorema D. Para que exista una $m(A)$ definida y finita para todo $A \in B(S)$ aditiva simplemente, con $m(gS) = m(S)$,* *es necesario y suficiente que no existan* $\lambda_i, g_i \in G$ *tales que*

$$x_S + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (x_S - x_{g_i S}) \leqq 0. \qquad \text{(IIIb)}$$

Además la condición (IIIb) equivale a la siguiente:

$$\Sigma \lambda_i x_{g_i S} \leqq 0 \quad \text{implica} \quad \Sigma \lambda_i \leqq 0. \qquad \text{(IIIc)}$$

Para ver la equivalencia de las condiciones (IIb) y (IIIc), basta observar que si $\lambda_1 + \ldots + \lambda_n = \lambda > 0$, $\lambda_1 x_{g_1 S} + \ldots \lambda_n x_{g_n S} \leqq 0$ entonces poniendo $\nu_i = \lambda_i / \lambda$, será $\Sigma \nu_i = 1$ y $x_S + \nu_1 (x_{g_1 S} - x_S) + \ldots \nu_n (x_{g_n S} - x_S) \leqq 0$.

Recíprocamente, la última desigualdad puede escribirse

$$1\, x_S - \nu_1 x_S + \nu_1 x_{g_1 S} - \ldots - \nu_n x_S + \nu_n x_{g_n S} \leqq 0$$

con

$$1 - \nu_1 + \nu_1 - \ldots - \nu_n + \nu_n = 1 > 0.$$

En particular podemos considerar el caso en que $R = G$ y $g\, t = g\, g'$, si $t = g'$. En tal caso se puede hablar de las medidas $\mu \in [G, S, G]$ y $\mu \in [G, G, G]$I

Un grupo $G$ se llama *medible* (según v. Neumann) si existe una medida $\mu \in [G, G, G]$.

Del teorema D, v. Neuman deduce este otro:

*Teorema D'. Si G es un grupo medible, la condición* (IIIb) *es necesaria y suficiente para que exista una medida* $\mu \in [R, S, G]$.

En efecto, si $m(S)$ es la medida dada por el teorema D, y si $\nu$ es la medida sobre $G, \nu \in [G, G, G]$, definiendo para todo $A$,

$$\mu(A) = \int_G m(g\, A)\, d\, \nu(g),$$

la condición $m(gS) = m(S) = 1$ da $\mu(S) = 1$, y la condición de invariancia de la $d\, \nu(g)$ da $\mu(gA) = \mu(A)$ para todo $A$.

Sea ahora $G'$ el grupo *derivado* de $G$, es decir el subgrupo de $G$ formado por los elementos de la forma $g\, h\, g^{-1} h^{-1}$, donde $g, h \in G$; si $G$ es comutativo entonces $G' = \{e\}$. En general sea

$G^n$ el derivado de $G^{n-1}$. $G$ se dice *resoluble* si existe un $n$ tal que $G^n = \{e\}$. Si $G' = \{\gamma\}$ es el grupo derivado, designaremos con $N(G') = N'$ al conjunto de todas las funciones $z \in X$ de la forma

$$z = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (x_{A_i} - x_{\gamma_i A_i}), \quad \gamma_i \in G'.$$

Se comprueba que N' es un subespacio vectorial $G$-invariante, es decir:
si $z \in N(G')$ entonces $z(gt) = g\,z \in N(G')$, para todo $g \in G$. (8)
En efecto, $z(g^{-1} t)$ puede escribirse en la forma

$$\sum \lambda_i (x_{Bi} - x_{\gamma_i Bi}) + \sum \lambda_i (x_{\delta_i C_i} - x_{C_i}),$$

donde

$$B_i = g\,A_i, C_i = g\,\gamma_i\,A_i, \quad \delta_i = \gamma_i\,g\,\gamma_i^{-1}\,g^{-1} \in G'.$$

De (8) y del teorema $C$ se deduce fácilmente este otro teorema fundamental de v. Neumann:

*Teorema E. Si existe una medida* $\mu \in [R, R, G']$ *entonces existe también una* $\mu \in [R, R, G]$. *Luego, si* $G$ *es comutativo, o si* $G$ *es resoluble, entonces existe una* $\mu \in [R, R, G]$. *En particular, todo grupo* $G$ *resoluble es medible.*

*Demostración.* De la propiedad (8) se deduce que si vale una desigualdad de la forma

$$1 \leqq \sum_{i=1}^{n} [x_i(t) - x_i(g_i\,t)] + z(t), \qquad (8a)$$

donde $x_i \in X, z \in N(C')$, entonces vale otra desigualdad del mismo tipo pero con $n-1$ sumandos, en la sumatoria, en lugar de $n$. En efecto, haciendo $t = t, t = g_1\,t, \ldots, t = g_1{}^{m-1}\,t$, y sumando, tendremos, en virtud de (8),

$$m \leqq [x_1 - g_1{}^m\,x_1] + \sum_{i=2}^{n} \sum_{j=0}^{m-1} [g_1{}^j\,x_i - g_1{}^j\,g_i\,x_i] + z_1,$$

donde $z \in N(G')$, y $g\,x(t) = x(gt)$. Como $x_1(t)$ es una función acotada, tomando $m$ suficientemente grande será

$$|x_1(t) - x_1(g^m t)| < m/2,$$

y obtenemos

$$m/2 \leqq \sum_{i=2}^{n} \sum_{j=0}^{m-1} [g_1{}^j x_i - g_i g_1{}^j x_i] + \sum_{i=2}^{n} \sum_{j=0}^{m-1} [g_i - g_1{}^j x_i - g_1{}^j g_i x_i].$$

Como $g_1{}^j g_i = \gamma_i g_i g_1{}^j$ con $\gamma_i \in G'$, la segunda sumatoria, de la última desigualdad, da una función de $N(G')$, luego obtenemos una desigualdad de la forma

$$1 \leqq \sum_{i=2}^{n} (y_i - g_i y_i) + z_2, \quad z_2 \in N(G'),$$

donde la sumatoria tiene $n-1$ términos en vez de $n$. De aquí resulta enseguida que si no existe una $\mu \in [R, R, G]$ entonces tampoco existe una $\mu \in [R, R, G']$. En efecto, por el teorema C, si no existe $\mu \in [R, R, G]$ entonces tiene lugar (8a) con $z = 0$.

Aplicando $n$ veces la propiedad recién demostrada, se llega a una desigualdad de la forma $1 \leqq z(t)$, $z \in \mathrm{N}(G')$, lo que indica, por el teorema C, que no exista una $\mu \in [R, R, G']$, lo que prueba el teorema.

Los teoremas C, D y E los hemos deducido del Corolario 1. Usando en lugar de éste el teorema 2, se obtendrán generalizaciones de estos teoremas de v. Neumann para medidas invariantes $\mu$ que además cumplen la condición $\mu(A) \leqq p(A)$, donde $p(A)$ es una medida exterior prefijada.

A p l i c a c i ó n 4. El teorema C permite deducir también el siguiente criterio interesante para que un grupo $G$ sea medible.

*Teorema F.* a) *Para que un grupo $G$ sea medible es necesario que exista una $\mu \in [G, H, G]$ para todo subgrupo normal $H$ de $G$;* b) *Si para todo subgrupo $H = \{g_1, \ldots, g_n\}$, generado por número finito de elementos $g_1, \ldots, g_n$, existe una $\mu \in [G, H \cap E, G]$, $E \subset G$, entonces existe también una $\mu \in [G, E, G]$.*

*Demostración.* a) Si no existe una $\mu \in [G, H, G]$ entonces, por el teorema D', será

$$x_H(g) \leqq \lambda_1(x_H(g) - x_{g_1H}(g)) + \dots + \lambda_k(x_H(g) - x_{g_kH}(g)),$$

luego para todo $\sigma \in G$,

$$x_{\sigma H} \leqq \lambda_1 (x_{\sigma H} - x_{\sigma g_1 H}) + \dots + \lambda_k(x_{\sigma H} - x_{\sigma g_k H}).$$

Sea $\{\sigma^\alpha\}$ un conjunto que contiene uno y sólo un elemento de cada clase módulo $H$, de modo que los conjuntos $H_\alpha = \sigma^\alpha H$ son disjuntos dos a dos. Los conjuntos $\sigma^\alpha g_i H = H_{\alpha,i}$ son también disjuntos dos a dos, para cada $i = 1, \dots, k$. Por tanto, las sumas

$$\Sigma_\alpha\, x_{\sigma_\alpha H}(g), \quad \Sigma_\alpha\, x_{\sigma_\alpha g_i H}(g),$$

son finitas, para cada $g$. Luego haciendo, en la última desigualdad, $\sigma = \sigma^\alpha$ y sumando en $\alpha$, obtendremos

$$\Sigma_\alpha\, x_{\sigma_\alpha H}(g) \leqq \Sigma_i \lambda_i [\Sigma_\alpha\, x_{\sigma_\alpha H}(g) - x_{\sigma_\alpha g_i H}(g)]$$
$$\therefore \quad 1 = x_G \leqq \Sigma\, \lambda_i [x_G - x_{g_i G}] = 0,$$

y llegamos a una contradicción.

b) Supongamos que no exista $\mu \in [G, E, G]$. Por el teorema C,

$$x_E(\sigma) \leqq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i [x_{E_i}(\sigma) - x_{g_i E_i}(\sigma)],$$

donde los $E_i$ son acotados respeto de $E$, es decir $E_1 \cup \dots \cup E_n \subset (h_1 E) \cup \dots \cup (h_k E)$. Sea $H = \{g_1, \dots, g_n, h_1, \dots, h_k\}$, el subgrupo generado por los elementos $g_1, \dots, g_n, \dots, h_k$, y sean $C = H \cap E$, $C_i = H \cap E_i$. Para $\sigma \neq H$, tenemos, puesto que $C \subset H, C_i \subset H$, $g_i C_i \subset H$,

$$\Sigma_i \lambda_i [x_{C_i}(\sigma) - x_{g_i C_i}(\sigma)] = 0, \quad x_C(\sigma) = 0.$$

Para $\sigma \in H$, es

$$x_C(\sigma) = x_E(\sigma), \quad x_{C_i}(\sigma) = x_{E_i}(\sigma), \quad x_{g_i C_i}(\sigma) \leqq x_{g_i E_i}(\sigma),$$

luego

$$\sum_i \lambda_i [x_{Ci}(\sigma) - x_{g_iC_i}(\sigma)] \geqq \Sigma \lambda_i [x_{Ei}(\sigma) - x_{g_iEi}(\sigma)] \geqq x_E(\sigma) = x_C(\sigma).$$

Por tanto, cualquiera sea $\sigma \in G$, se verifica

$$x_C(\sigma) \leqq \Sigma_i \lambda_i [x_{Ci}(\sigma) - x_{g_iC_i}(\sigma)]. \tag{9}$$

Pero como

$$E_1 \cup \ldots \cup E_n \subset h_1 E \cup \ldots \cup h_k E,$$

se tiene

$$C_1 \cup \ldots \cup C_n = (H \cap E_1) \cup \ldots (H \cap E_n) \subset$$

$$(H \cap h_1 E) \cup \ldots (H \cap h_k E)$$

$$= (h_1 H \cap h_1 E) \cup \ldots = h_1(H \cap E) \cup \ldots \cup h_k(H \cap E),$$

$$\therefore \quad C_1 \cup \ldots \cup C_n \subset (h_1 C) \cup \ldots \cup (h_k C),$$

es decir, los $C_i$ son acotados respecto de $C$. Luego, de (9) resulta que no existe una $\mu \in [G, C, G] = [G, H \cap E, G]$.

*Corolario A. Si para todo subgrupo $H$ generado por un número finito de elementos, existe $\mu \in [G, H, G]$ entonces $G$ es medible.*

*Corolario B. Si todo subgrupo $H$ generado por un número finito de elementos, es finito, entonces $G$ es medible. Si para tal subgrupo $H$ es $H \cap E$ finito, entonces existe una $\mu \in [G, E, G]$.*

*Corolario C. Existe una base de $G, B \subset G$, tal que existe una $\mu \in [G, B, G]$.*

Aplicación 5. Sea $X = \{x\}$ un espacio vectorial, $G = \{g\}$ un grupo de transformaciones lineales de $X$ en $X$: $g(\lambda_1 x' + \lambda_2 x'') = \lambda_1 g x' + \lambda_2 g x''$, y $p(x)$ una funcional subaditiva tal que $p(\lambda x) = \lambda p(x)$ si $\lambda \geqq 0$, y $p(g x) = p(x)$ para todo $g$.

Escribiremos $f \in [X, G, p]$ si $f(x)$ es una funcional lineal finita sobre $X$ tal que $f(x) \leqq p(x), f(g x) = f(x)$, para todo $x \in X$

y todo $g \in G$. Definimos en $X$ la relación $\prec$ como sigue: $x \prec y$ si y solo si

$$x + \Sigma\,(x_i - g_i\,x_i) = y, \qquad g_i \in G.$$

Como en Aplicación 2 veremos que $f$ es aditiva sobre $X$ e invariante relativo a $G$ si, y solo si ella es aditiva y monótona respecto de la relación $\prec$. Luego, si $e = 0$, $f \in [X, G, p]$ equivale a $f \in [X, f(e) = 0, p]$. Del teorema 2 obtenemos enseguida el siguiente teorema de Agnew [4]:

*Teorema H. Para que exista $f \in [X, G, p]$ es necesàrio y suficiente que se verifique $p(z) \geqq 0$ para todo $z$ de la forma $z = \Sigma\,(x_i - g_i\,x_i)$. Otra condición, es que para algún $z \in X$ se verifique*

$$\inf_{gi,\,xi}\; p(z + \Sigma\,(x_i - g_i\,x_i)) = a > -\infty,$$

*y en tal caso la $f \in [X, G, p]$ verifica además $f(z) = a$.*

Con iguales razonamientos de arriba obtendremos del teorema H este otro teorema de Agnew-Morse [3]:

*Teorema I. Si existe una $f \in [X, G', p]$ entonces también existe una $f \in [X, G, p]$. Luego si $G$ es resoluble existe una $f \in [X, G, p]$.*

*Demostración.* Vamos a probar que si vale

$$p(u) = p\,[\sum_{i=1}^{n} (x_i - g_i\,x_i) + z] = a < 0,$$

donde $z \in N(G')$, entonces vale una desigualdad análoga con $n-1$ sumandos, en la sumatoria en lugar de $n$. En efecto, como $p(u) = p(g\,u)$, tendremos

$$p(u + g_1\,u + \ldots + g_1{}^{m-1}\,u) \leqq p(u) +$$

$$+ p(g_1\,u) + \cdots p(g_1{}^{m-1}\,u) = m\,a \leq 0.$$

Como en el teorema $E$, usando (8), veremos que

$$u + g_1 u + \dots g_1^{m-1} u = (x_1 - g_1^{m-1}) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n-1} (y_i - h_i y_i) + z_1, \quad z_1 \in N(G').$$

Tomando $m$ suficientemente grande, obtendremos

$$p(\sum_{i=1}^{n-1} (y_i - h_i y_i) + z_1) \leqq m\,a + p(x_1) + p(g_1^m x_1) < ma/2 < 0,$$

con $n-1$ sumandos en vez de $n$. El resto de la demostración se hace exactamente como en el teorema $E$.

Observemos, que puesto que todo espacio vectorial puede representarse como espacio de funciones $x(t)$ definidas sobre un conjunto $R$, el procedimiento de v. Neumann, indicado en el teorema D′, permite reducir la demostración de los teoremas H e I, al caso considerado en la Aplicación 3.

En forma análoga, pueden deducirse de los teoremas 1 y 2, otros teoremas de Agnew [4] y algunas generalizaciones posteriores [7].

Observemos, todavía, que los teoremas 1 y 2, pueden ser interpretadas desde el punto de vista de funcionales positivas respecto de un cono en un espacio normado (o con escalares enteros) (cfr. Stone [8], Krein-Rutman [10]).

Finalmente, de los teoremas anteriores pueden deducirse aplicaciones a la construcción de medidas invariantes que se anulan en los puntos, en espacios métricos. Por ejemplo si $R$ es un espacio métrico, toda función $f(r) \geqq 0, r \geqq 0$, define una medida exterior invariante $\rho_f(A)$ definida como sigue: consideramos las posibles desigualdades de la forma

$$x_A \leqq \sum_1^n \lambda_i x_{g_i E_i},$$

donde $E_i$ es una esfera de radio $r_i$, y pongamos

$$\rho_f(A) = \inf \sum_1^n \lambda_i f(r_i).$$

Los teoremas anteriores permiten demostrar fácilmente el siguiente teorema:

*Teorema J. Si G es medible, para que exista una medida* $\mu$ *de Radón, G-invariante, nula en los puntos y con* $\mu(R)=1$, *es necesario y suficiente que exista una* $f$ *tal que* $\rho_f(R)=1$.

Esperamos ocuparnos de este tipo de problemas en un futuro trabajo.

BIBLIOGRAFIA


1. J. VON NEUMANN, *Zur allgemeinen Theorie des Masses*. Fund. Math. 13 (1929).
2. S. BANACH, *Theorie de Opérations Linéaires*. Varsava, 1932.
3. R. AGNEW y A. P. MORSE, *Extensions of linear functionals, etc.* Ann. of Math. 39 (1938).
4. R. AGNEW, *Linear functionals and prescribed conditions*. Duke Math. J. 4, 1 (1938).
5. A. TARSKI, *Algebraische Fassung des Massproblems*. Fund. Math. XXXI, (1938).
6. M. COTLAR y R. A. RICABARRA, *Sobre un teorema de É. Hopf*. Revista UMA, XIV (1949).
7. V. V. KLEE Jr., *Invariant extensions of linear functionals*. Pacific Journal of Math. 4 (1954).
8. M. H. STONE, *Algebraic formulation of the problem of measure*. Acta Sc. Math. Szeged. XII (1950).
9. W. NEF, *Zerlegungs äquivalenz von Mengen und invariant Inhalt*. Math. Annalen, 128 (1954).
10. KREIN-RUTMAN, *Operaciones lineales con conos invariantes*. Uspehi Mat. Nauk., 3, 1, (1948).