SOBRE LOS CEROS DE LOS POLINOMIOS ORTOGONALES CLASICOS, EN EL CASO ASINTOTICO

por CARLOS E. DIEULEFAIT, Rosario (Argentina)

1. - Hemos demostrado que: si se tienen dos números reales ρ_1 y ρ_2, $(\rho_1 < \rho_2)$, dos números positivos α_1 y α_2 y n variables $z_1, z_2, \ldots, z_n$ tales que

$$\rho_1 < z_i < \rho_2 \quad \text{con} \quad z_i < z_{i+1},$$

y si Δ_n es el determinante de Vandermonde formado con las z_i siendo

$$\eta(z) = (z - \rho_1)^{\alpha_1} (\rho_2 - z)^{\alpha_2}$$

la expresión

$$V_n = \frac{1}{n} \log \Delta_n \prod_{i=1}^{n} \eta(z_i)$$

adquiere un valor máximo para $z_i = x_{i,n}$ siendo estos últimos valores los ceros de un polinomio $P_n(x)$ que pertenece a la sucesión de polinomios ortogonales en el intervalo (ρ_1, ρ_2) con la función $\varphi(x)$ definida por la relación

$$(x - \rho_1)(x - \rho_2)\varphi'(x) - [(2\alpha_1 - 1)(x - \rho_2) + \\ + (2\alpha_2 - 1)(x - \rho_1)]\varphi(x) = 0.$$

2. - Si se toma igual a la unidad el coeficiente de x^n de $P_n(x)$ entonces, dicho polinomio admite las representaciones

hipergeométricas siguientes

$$P_n(x) =$$

$$= \frac{(-1)^n(\rho_2-\rho_1)^n[2\alpha_1;n]}{[n-1+2(\alpha_1+\alpha_2);n]} F\left(-n, n-1+2(\alpha_1+\alpha_2); 2\alpha_1; \frac{x-\rho_1}{\rho_2-\rho_1}\right)$$

$$P_n(x) =$$

$$= \frac{(\rho_2-\rho_1)^n[2\alpha_2;n]}{[n-1+2(\alpha_1+\alpha_2)n;n]} F\left(-n, n-1+2(\alpha_1+\alpha_2); 2\alpha_2; \frac{\rho_2-x}{\rho_2-\rho_1}\right)$$

con $[k;n] = k(k+1)\ldots(k+n-1)$,

de las cuales se sigue:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_1}{n} \log(-1)^n P_n(\rho_1) = \log\left(\frac{\rho_2-\rho_1}{4}\right)^{\alpha_1}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_2}{n} \log P_n(\rho_2) = \log\left(\frac{\rho_2-\rho_1}{4}\right)^{\alpha_2}.$$

En virtud de estos resultados se encuentran los siguientes:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \log(x_{i,n}-\rho_1)^{\alpha_1} =$$

$$= \int_{\rho_1}^{\rho_2} p(x) \log(x-\rho_1)^{\alpha_1} dx = \log\left(\frac{\rho_2-\rho_1}{4}\right)^{\alpha_1}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \log(\rho_2-x_{i,n})^{\alpha_2} =$$

$$= \int_{\rho_1}^{\rho_2} p(x) \log(\rho_2-x)^{\alpha_2} dx = \log\left(\frac{\rho_2-\rho_1}{4}\right)^{\alpha_2}$$

donde $p(x)$ indica la función de densidad de los $x_{i,n}$ cuando n crece indefinidamente. Si se agrega a las dos últimas ecuaciones la condición evidente:

$$\int_{\rho_1}^{\rho_2} p(x)\, dx = 1.$$

la solución, única, de este ssitema está dada por:

$$p(x)=\frac{1}{\pi\sqrt{(x-\rho_1)(\rho_2-x)}}$$

resultado que viene a precisar la conocida propiedad de densidad infinita de los ceros $x_{i\cdot\infty}$ en los extremos del intervalo [2].

3. - Teniendo en cuenta estos resultados se puede hallar, directamente, la expresión asintótica de un $x_{i,n}$. Si introduzco los valores

$$v_{i,n}=\rho_1+\frac{(\rho_2-\rho_1)i}{n+1}, \quad i=1,2,\dots,n,$$

entonces se tiene:

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\rho_1}^{x_{i,n}}\frac{dx}{\pi\sqrt{(x-\rho_1)(\rho_2-x)}}=\lim_{n\to\infty}\int_{\rho_1}^{v_{i,n}}\frac{dx}{\rho_2-\rho_1}.$$

De esta relación se deduce la siguiente:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{i,n}-X_0}{r\cos\frac{i\pi}{n+1}}=-1$$

con $X_0=\frac{\rho_1+\rho_2}{2}$ y $r=\frac{\rho_2-\rho_1}{2}$. Nuestro anterior resultado lleva a su última forma la propiedad de distribución uniforme asintótica de las proyecciones de los $x_{i,n}$ sobre la semicircunferencia de centro X_0 y radio r, estudiada por Szego, Polya y Weyl.

BIBLIOGRAFIA

G. Szego, *Orthogonal Polynomials.* Americ. Mathem. Soc., 1939, pág. 303.
C. E. Dieulefait, *Sulla legge di distribuzione degli zeri* , Giorn. Instit. Italiano Att., 1954.