GEOMETRIA DIFERENCIAL AFIN DE HIPERSUPERFICIES

por Germán Fernández, La Plata (Argentina)

Introducción. — Este trabajo, que comprende dos partes, se ha desarrollado utilizando el llamado *método de la «repère mobile»* y el *cálculo diferencial exterior* de E. Cartan.

En la primera parte se estudia la geometría diferencial afin de hipersuperficies, en la que se generalizan a espacios de n dimensiones, E_n, contenidos en E_{n+1}, conocidos resultados obtenidos por Blaschke y otros para superficies del espacio ordinario.

En la segunda parte, se aplica la fórmula de Stokes generalizada a hipersuperficies cerradas orientables, para obtener varias fórmulas integrales y algunas desigualdades de forma muy análoga a las que se conocen para superficies.

1. *Ecuaciones de estructura.* — Consideremos el grupo de las afinidades unimodulares

$$[1] \qquad x_i^* = a_i^k x_k + b_i, \ \det \|a_i^k\| = 1, \ (i, k = 1, 2, \dots, n+1),$$

actuando sobre el espacio de $n+1$ dimensiones.

En [1] y en todo lo que sigue usamos la notación corriente, sobreentendiendo que un índice repetido presupone una suma de 1 a $n+1$ respecto dicho índice.

Consideremos en dicho espacio una familia continua de $(n+1)$-édros, donde cada uno de ellos está definido por un origen X y $n+1$ vectores, I_i, linealmente independientes. Podemos suponer a estos vectores normalizados de manera que su determinante valga la unidad, y escribiremos:

$$[2] \qquad \det I_1, I_2, \dots, I_{n+1} = (I_1, I_2, \dots, I_{n+1}) = 1.$$

Los vectores dX y dI_i se pueden expresar como combinación lineal de los vectores I_i:

$$[3] \qquad dX = \omega^i I_i, \quad dI_i = \omega_i^k I_k;$$

donde ω^i y ω_i^k, que representan, respectivamente, las componentes de dX y dI_i, son formas diferenciales de primer orden (formas de Pfaff).

A partir de [3] y teniendo en cuenta [2], se obtienen los valores de ω^i y ω_i^k en función de dX y dI_i:

$$[4] \qquad \begin{aligned} \omega^i &= (I_1, I_2, \ldots, I_{i-1}, dX, I_{i+1}, \ldots, I_{n+1}) \\ \omega_i^k &= (I_1, I_2, \ldots, I_{k-1}, dI_i, I_{k+1}, \ldots, I_{n+1}), \end{aligned}$$

que aplicados a la diferencial de [2] conduce a la expresión

$$[5] \qquad \sum_{i=1}^{n} \omega_i^i = 0.$$

Finalmente, las diferenciales exteriores de las formas ω^i, ω_i^k satisfacen a las siguientes *ecuaciones de estructura* del grupo afín

$$[6] \qquad d\omega^i = \omega^k \wedge \omega_k^i, \quad d\omega_i^j = \omega_i^k \wedge \omega_k^j,$$

que se obtienen por diferenciación exterior de [3]. El símbolo $\wedge$ indica: entre formas diferenciales, multiplicación exterior y entre vectores, producto vectorial.

2. *El $(n+1)$-édro afín de Frénèt de una hipersuperficie.* — Supongamos una hipersuperficie E_n de ecuación vectorial $X = X(u_1, u_2, \ldots, u_n)$, sumergida en el espacio de $n+1$ dimensiones, E_{n+1}, y agreguemos a cada punto X de E_n un $(n+1)$-édro, («repère mobile» de Darboux-Cartan), elegido, como veremos, de manera de hacer intervenir los elementos geométricos de E_n que sean invariantes por transformaciones del grupo afín.

Comenzaremos por tomar los vectores $I_1, \ldots, I_n$ tangentes a E_n. Esto significa que los vectores $I_1, \ldots, I_n, dX$ se encuentran en el hiperplano tangente a $\dot{E}_n$, y por tanto se tiene:

[7] $$(I_1, I_2, \ldots, I_n, dX) = \omega^n = 0.$$

Puesto que $d\omega^n = 0$, resulta, teniendo en cuenta [6], que:

[8] $$\omega^i \wedge \omega_i^{n+1} = 0, \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Las formas ω^i son independientes; luego, cualquier otra forma será combinación lineal de las ω^i y podemos escribir

[9] $$\omega_i^{n+1} = a_{ij}\,\omega^j, \quad (i, j = 1, 2, \ldots, n).$$

Reemplazando [9] en [8] obtenemos

$$a_{ij}\,\omega^i \wedge \omega^j = 0,$$

de donde resulta

$$(a_{ij} - a_{ji})\,\omega^i \wedge \omega^j = 0, \quad (j > i);$$

es decir,

[10] $$a_{ij} = a_{ji}, \quad (i \neq j).$$

Ahora vamos a determinar el vector I_{n+1}, de manera que su dirección sea invariante por transformaciones del grupo afín. Un cambio de «repère» de la forma

$$I_{n+1}{}^* = p^i I_i + I_{n+1}, \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

conduce, mediante [4], a la expresión

[11] $$(\omega_{n+1}{}^{n+1})^* = (I_1, I_2, \ldots, I_n, dI_{n+1}{}^*) = p^i\,\omega_i^{n+1} + \omega_{n+1}{}^{n+1}.$$

La misma razón que condujo a la expresión [9], permite escribir

$$\omega_{n+1}{}^{n+1} = q_i\,\omega^i.$$

Reemplazando esta igualdad y las relaciones [10] en [11], se obtiene:

$$(\omega_{n+1}{}^{n+1})^* = p^i \omega_i{}^{n+1} + q_i \omega^i = p^i a_{ij} \omega^j + q_i \omega^i =$$

$$= p^i a_{ik} \omega^k + q_k \omega^k = (p^i a_{ik} + q_k) \omega^k.$$

Si $\det \|a_{ij}\| \neq 0$, podemos determinar p^i de manera que se tenga $(\omega_{n+1}{}^{n+1})^* = 0$. Tendremos así un $(n+1)$-édro con la dirección de I_{n+1} bien determinada (*normal afín*) y para la cual se tiene

$$[12] \qquad \omega_{n+1}{}^{n+1} = 0.$$

Ya determinada la normal afín I_{n+1}, solo resta elegir las *direcciones* de $I_1, I_2, \ldots, I_n$ sobre el hiperplano tangente de manera que se mantengan invariantes por transformaciones afines. Esto se logra con el auxilio de las *líneas de curvatura afín*, que se pueden determinar por la condición que las rectas $Z = X - \rho\, I_{n+1}$ formen superficies desarrollables. Así tenemos:

$$dZ = dZ - d\rho \,.\, I_{n+1} - \rho \,.\, dI_{n+1} = (\omega^i - \rho\, \omega^i_{n+1})\, I_i - d\rho \,.\, I_{n+1}.$$

La superficie será desarrollable, si se puede determinar ρ de manera que dZ e I_{n+1} tengan la misma dirección; es decir, si se tiene:

$$\omega^i - \rho\, \omega^i_{n+1} = 0, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

De aquí resulta el sistema de ecuaciones diferenciales de las líneas de curvatura afín de E_n:

$$[13] \qquad \omega^i \omega^k_{n+1} - \omega^k \omega^i_{n+1} = 0, \qquad (i \neq k;\ i, k = 1, 2, \ldots, n).$$

Si hacemos $\omega^i_{n+1} = \alpha_{ij}\, \omega^j$, y reemplazamos en [13], resulta:

$$[14] \qquad \alpha_{kj}\, \omega^i \omega^j = \alpha_{ih}\, \omega^k \omega^h = 0.$$

Si elegimos $I_1, I_2, \ldots, I_n$ tangentes a las líneas de curvatura afín y dejamos de lado el caso en que [14] sea una identidad, esto no cambia la condición [12] y [13] debe ser equivalente a

$$\omega^k \omega^h = 0 \quad \text{que implica} \quad \begin{matrix} \alpha_{kj} = 0 \\ \alpha_{hj} = 0 \end{matrix}\; ; \quad k \neq h \neq j.$$

Luego, se puede poner

[15] $$\omega^i{}_{n+1} = \alpha_{ii}\, \omega^i.$$

Los coeficientes α_{ii} son las *curvaturas principales afines* De [3] sabemos que

$$d\omega_{n+1}{}^{n+1} = \omega^i{}_{n+1} \wedge \omega_i{}^{n+1},$$

pero teniendo en cuenta [9] y [15], resulta:

$$d\omega_{n+1}{}^{n+1} = \alpha_{ii}\, \omega^i \wedge a_{ij}\, \omega^j = \alpha_{ii}\, a_{ij}\, (\omega^i \wedge \omega^j) =$$
$$= (\alpha_{ii}\, a_{ij} - \alpha_{jj}\, a_{ji})\, \omega^i \wedge \omega^j = 0;, \qquad j > i.$$

Pero [10] dice que $a_{ij} = a_{ji}$, y como hemos excluído los casos $\alpha_{ii} = \alpha_{jj}$, se tiene $a_{ij} = 0$, $i \neq j$; es decir:

[16] $$\omega_i{}^{n+1} = a_{ii}\, \omega^i.$$

Las direcciones de $I_1, I_2, \ldots, I_n, I_{n+1}$ son fijas, es posible efectuar una sustitución de la forma:

$$I_i^* = \lambda_i I_i; \qquad (i = 1, 2, \ldots, n+1),$$

con $\prod_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1$. Si a_{ii}^* son los coeficientes de [16] después de la sustitución, se encuentra la relación $\prod_{i=1}^{n} a_{ii}^* = \prod_{i=1}^{n} (\lambda_i)^{n+1} a_{ii}$. Se puede entonces elegir $\prod \lambda_i = \mu$ de manera que $\prod_{i=1}^{n} a_{ii} = 1$. Las ecuaciones [16] son ahora:

[17] $$\omega_1{}^{n+1} = a_{11}\, \omega^1,\ \omega_2{}^{n+1} = a_{22}\, \omega^2, \ldots, \omega_{n-1}{}^{n+1} =$$
$$= a_{n-1,n-1}\, \omega^{n-1},\ \omega_n{}^{n+1} = \frac{1}{\prod_{i=1}^{n-1} a_{ii}}\, \omega^n.$$

El valor $\lambda_{n+1} = \frac{1}{\mu}$ nos dá el módulo de I_{n+1} y es solo posible efectuar una sustitución de la forma

$$I_1^* = \lambda_1 I_1, I_2^* = \lambda_2 I_2, \ldots, I_{n-1}^* = \lambda_{n-1} I_{n-1}, I_n^* = \frac{1}{\prod_{i=1}^{n-1} \lambda_i} I_n.$$

Por esta sustitución se obtiene

$$a_{ii}^* = (\lambda_i)^2 a_{ii}, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1),$$

y se puede elegir λ_i de suerte que se tenga $a_{ii}^* = 1$, y las ecuaciones [17] son:

$$[18] \qquad \omega_i^{n+1} = \omega^i, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Hemos determinado completamente la «repère» (X, I_i), que llamaremos la *«repère» afín de Frénèt de la hipersuperficie E_n.* Teniendo en cuenta [7], [9], [15] y [16] tendremos las ecuaciones siguientes:

$$[19] \qquad \begin{aligned} dX &= \omega^i I_i \\ dI_i &= \omega_i^k I_k + \omega^i I_{n+1} \\ dI_{n+1} &= \alpha_{ii} \omega^i I_i; \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n). \end{aligned}$$

3. *Invariantes afines de una hipersuperficie.* — Todas las combinaciones entre los coeficientes o las formas diferenciales de [19], son invariantes afines de la hipersuperficie E_n. Por ejemplo:

Elemento de área afín:

$$[20] \qquad d\Omega = \omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \ldots \wedge \omega^n.$$

Curvaturas medias afines:

[21]
$$\binom{n}{1} H_1 = \sum_i \alpha_{ii} \quad , \quad (i, j, k, h, l = 1, 2, \ldots, n),$$

$$\binom{n}{2} H_2 = \sum_{i,j} \alpha_{ii}\, \alpha_{jj} \quad , \quad (i \neq j \neq k \neq h \neq l),$$

$$\binom{n}{3} H_3 = \sum_{i,j,k} \alpha_{ii}\, \alpha_{jj}\, \alpha_{kk},$$

$$\vdots$$

$$\binom{n}{n-1} H_{n-1} = \sum_{i,j,\ldots,h}^{n-1} \alpha_{ii}\, \alpha_{jj} \ldots \alpha_{hh}.$$

Curvatura total afín:

[22] $$K = \binom{n}{n} H_n = H_n = \sum_{i,j,\ldots,l}^{n} \alpha_{ii}\, \alpha_{jj} \ldots \alpha_{ll} = \alpha_{11} \,.\, \alpha_{22} \ldots \alpha_{nn}.$$

Vamos a tener en cuenta otros invariantes afines que se definen directamente.

a) *Distancia afín.* No se puede definir una distancia afín entre dos puntos aislados del espacio. En cambio, es posible definir la distancia afín de un punto Z a un punto X de una hipersuperficie dada. Tomaremos como distancia afín una función cualquiera del hipervolumen sustendido por los vectores $I_1, I_2, \ldots, I_n$ y el vector $Z - X$. Eligiremos por dicha distancia la expresión

$$W(Z) = X - Z, I_1, \ldots, I_n),$$

y si Z es el origen de coordenadas:

[23] $$W = (X, I_1, \ldots, I_n).$$

b) *Volumen afín.* Como elemento de hipervolumen se puede tomar el formado por el origen y los vectores infinitesimales

$I_1 \omega^1, I_2 \omega^2, \ldots, I_n \omega^n$, de origen X. Entonces resulta:

$$dV = \frac{1}{n}(X, I_1 \omega^1, I_2 \omega^2, \ldots, I_n \omega^n) =$$

$$[24] \qquad = \frac{1}{n}(X, I_1, I_2, \ldots, I_n)(\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \ldots \wedge \omega^n) = \frac{1}{n} W \cdot d\Omega.$$

$$V = \frac{1}{n} \int_{E_n} W \cdot d\Omega$$

Si W_M y W_m son los valores máximo y mínimo de la distancia afín W de O á la hipersuperficie del cuerpo, se tienen las desigualdades:

$$W_m \Omega \leqq n V \leqq W_M \Omega.$$

4. *Fórmulas integrales.* — Consideremos la integral curvilínea de orden $n-1$, extendida a la forma diferencial ω de grado $p-1$. La fórmula de Stokes generalizada nos dice:

$$[25] \qquad \int_{E_{n-1}} \omega = \int_{E_n} d\omega.$$

Usaremos [25] para obtener algunas fórmulas integrales.

a) Comenzaremos aplicando la fórmula de Stokes a los siguientes casos:

$$\int_{E_{n-1}} (X, \overbrace{dX, \ldots, dX}^{h}, \overbrace{dI_{n+1}, \ldots, dI_{n+1}}^{k}, I_{n+1}) =$$

$$[25'] \qquad = \int_{E_n} (\overbrace{dX, \ldots, dX}^{h+1}, \overbrace{dI_{n+1}, \ldots, dI_{n+1}}^{k}, I_{n+1}) +$$

$$+ \int_{E_n} (X, \overbrace{dX, \ldots, dX}^{h}, \overbrace{dI_{n+1}, \ldots, dI_{n+1}}^{k+1}); \quad \begin{pmatrix} h, k = 0, 1, \ldots, n-1 \\ h + k = n - 1 \end{pmatrix}$$

Teniendo en cuenta [19], [20], [21], [22] y [23], las expresiones [25′] se reducen a las siguientes:

[26] $$I_k = n!\int_{E_n} H_k\,d\Omega - n!\int_{E_n} H_{k+1}\,W\,d\Omega, \quad (k = 1, 2, \ldots, n-1),$$

donde hemos indicado con I_k el primer miembro de [25′].

Si admitimos que $H_0 = 1$, la fórmula [26] vale también para $k = 0$.

Si E_n es una hipersuperficie cerrada orientable y aplicamos las fórmulas [26] para cada celda en que se puede considerar descompuesta y sumamos, resulta:

[27] $$\int_{E_n} H_k\,d\Omega = \int_{E_n} H_{k+1}\,W\,d\Omega, \quad (k = 0, 1, 2, \ldots, n-1).$$

Llamaremos al primer miembro la *k-ésima integral de curvatura media* y lo indicaremos

[28] $$M_k = \int_{E_n} H_k\,d\Omega,$$

y [27] se puede escribir así:

[29] $$M_k = \int_{E_n} H_{k+1}\,W\,d\Omega.$$

Si $H_{k+1}{}^{(M)}$ y $H_{k+1}{}^{(m)}$ son los valores máximo y mínimo de la $(k+1)$-ésima curvatura media afín y tenemos en cuenta [24] y [29] resulta:

[30] $$n\,H_{k+1}{}^{(m)}\,V \leqq M \leqq n\,H_{k+1}{}^{(M)}\,V.$$

En particular, para $k = 0$ y $k = 1$ se obtienen de [28] y [30] fórmulas análogas a las conocidas para superficies del caso métrico.

b) Otras fórmulas integrales resultan introduciendo el vector

$$Y = I_1 \wedge I_2 \wedge \ldots \wedge I_n.$$

Aplicando la fórmula de Stokes, se obtiene:

$$[31] \quad \int_{E_{n-1}} X \wedge dX \wedge \overset{n-1}{\ldots} \wedge dX = \int_{E_n} dX \wedge dX \wedge \overset{n}{\ldots} \wedge dX = n! \int_{E_n} Y\, d\Omega,$$

de donde, para una hipersuperficie *cerrada* E_n, resulta:

$$\int_{E_n} Y\, d\Omega = 0.$$

También se puede poner

$$[32] \quad \int_{E_{n-1}} I_{n+1} \wedge dX \wedge \overset{n-1}{\ldots} \wedge dX = \int_{E_n} dI_{n+1} \wedge dX \wedge \overset{n-1}{\ldots} \wedge dX = n! \int_{E_n} H_1\, Y\, d\Omega$$

que en particular, para hipersuperficie mínimas afines $(H_1 = 0)$ nos da:

$$\int_{E_{n-1}} I_{n+1} \wedge dX \wedge \overset{n-1}{\ldots} \wedge dX = 0,$$

y para cualquier hipersuperficie cerrada orientable E_n es:

$$\int_{E_n} H_1\, Y\, d\Omega = 0.$$

BIBLIOGRAFIA

1. W. Blaschke, *Differentialgeometrie*, vol. II, Berlin 1923.
2. E. Cartan, *La théorie des groupes finis e continues et la géométrie différentielle*, Paris 1927.
3. L. Berwald, *Monatshefte fur Mathematik*, *32* (1922).
4. L. A. Santaló, *Cuestiones sobre geometría diferencial afín de superficies.* Segundo Symposium de Matemática, UNESCO. Villavicencio-Mendoza. Julio 1954.
5. L. A. Santalo, *Géométrie différentielle affine et corps convexes. Colloque Henri Poincaré.* Paris. Octubre 1954.