SUR LES POINTS DE DIRAMATION TRIPLES D'UNE SURFACE MULTIPLE

par LUCIEN GODEAUX, Liége (Belgique)

Dans des travaux antérieurs, nous avons étudié les involutions cycliques, n'ayant qu'un nombre fini de points unis, appartenant à une surface algébrique et les surfaces qui représentent ces involutions ([1]). Soient F une surface contenant une involution I d'ordre premier $p>2$ de ce type et Φ une surface normale image de cette involution, sur laquelle les points de diramation soient isolés. Nous avons indiqué la singularité d'un point de diramation pour la surface Φ dans le cas général. Nous nous proposons d'étudier ici un cas particulier: celui d'un point de diramation triple pour la surface Φ, le cône tangent étant décomposé en un cône quadratique et un plan coupant ce cône suivant une génératrice. Nous supposons de plus qu'au point de dramation considéré fait suite une série de points doubles biplanaires.

Rappelons tout d'abord la méthode utilisée. Soient A un point uni dans le voisinage duquel l'involution ne donne pas l'identité et A' le point de diramation correspondant sur Φ. Nous considérons le système des courbes C qui correspondent sur F aux sections hyperplanes Γ de Φ. Nous construisons une suite

([1]) *Les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique* (Actualités Scientifiques, N° 270, Paris, Hermann, 1935); *Mémoire sur les surfaces multiples* (Mémoires in-8° de l'Acad. roy. de Belgique, 1952); *Les singularités des points de diramation isolés des surfaces multiples* (Deuxième Colloque de Géométrie algébrique, Liége, 1952; Paris, Masson et Liége, Thone, 1952); *Sur l'ordre d'une involution cyclique appartenant à une surface algébrique* (Bulletin de la Société roy. des Sciences de Liége, 1953).

de systèmes linéaires tirés du précédent en imposant aux courbes C des multiplicités de plus en plus élevées en A. Soient $|C'|$, $|C''|, \ldots$ ces systèmes et $\Phi_1, \Phi_2, \ldots$ les surfaces, projections de Φ, dont les sections hyperplanes correspondent aux courbes de ces systèmes respectivement. Nous analysons les singularités des courbes $C', C'' \ldots$ au point A.

Dans les domaines des différents ordres du point A sur F, il existe des points unis pour l'involution, formant une sorte d'arbre. Dans le domaine de chacun de ces points unis, l'involution détermine l'identité (points unis de première espèce) ou non (points unis de seconde espèce). Dans le second cas, il existe deux points unis dans le domaine du premier ordre du point considéré. Une suite de points unis infiniment voisins successifs de A est formée de points unis de seconde espèce et se termine par un point uni de première espèce. Dans nos travaux cités, nous avons montré que le point A est l'origine de deux branches dont nous désignons les points respectivement par $(\alpha, 1)$, $(\alpha, 2), \ldots, (\alpha, \alpha-1)$ et $(\beta, 1), (\beta, 2), \ldots, (\beta, \beta-1)$. Les points $(\alpha, \alpha-1)$, $(\beta, \beta-1)$ sont unis de première espèce, les autres de seconde espèce. Le point (α, i), par exemple, uni de seconde espèce si $i < \alpha - 1$, possède dans son domaine du premier ordre le point uni $(\alpha, i+1)$ et un point que nous dénoterons par $(\alpha, i, 1)$. Si ce dernier n'est pas uni de première espèce, les points unis infiniment voisins seront dénotés par $(\alpha, i, 2), (\alpha, i, 1, 1)$. Et ainsi de suite. Déterminer la singularité des courbes $C', C'', \ldots$ au point A revient à déterminer le comportemant de ces courbes aux points unis du domaine de A.

Cette détermination permet de voir quelle est la structure du point de diramation A', c'est-à-dire la configuration des courbes dont l'ensemble est équivalent, au point de vue des transformations birationnelles, à ce point.

Dans le cas particulier que nous envisageons ici, la singularité de A' pour la surface Φ est déterminée à priori. Le point A' est précisément équivalent à un ensemble de courbes rationnelles

$$\sigma_\alpha, \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_b, \sigma_\beta.$$

Les composantes de A' apparaissent successivement sur les surfaces $\Phi_1, \Phi_2, \ldots$, d'abord σ_α et σ_β, puis ρ_1 et ρ_b, puis ρ_2 et

$\rho_{i-1}, \ldots$ jusqu'à une certaine surface. A partir de celle-ci apparaissent les courbes ρ qui n'ont pas encore été rencontrées, une par une, associées aux courbes $\rho_1, \rho_2, \ldots$ dejà rencontrées. Ce fait nous a paru assez curieux pour être signalé et c'est l'origine de cette note.

1. Considérons une surface algébrique F contenant une involution cyclique I d'ordre premier impair p, n'ayant qu'un nombre fini de points unis. Nous pouvons prendre, comme modèle projectif de la surface F une surface normale, appartenant à un espace linéaire S_R de dimension R aussi grande qu'on le veut, sur laquelle l'involution I est déterminée par une homographie cyclique T, d'ordre p, ayant p axes ponctuels $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_{p-1}$ dont le premier seul rencontre F (aux points unis de l'involution). Les hyperplans de S_R passant par les axes de T sauf par ξ_i, découpent sur F des courbes C_i formant un système partiel $|C_i|$ composé au moyen de I. De ces p systèmes, le premier $|C_0|$, est dépourvu de points-base.

Rapportons projectivement les courbes C_0 aux hyperplans d'un espace S_r ayant la dimension r de ξ_0. A la surface F correspond dans S_r une surface normale Φ image de l'involution I, sur laquelle les points de diramation sont isolés.

Soit A un point uni de l'involution, simple pour la surface F. Le plan tangent η à F en A est uni pour l'homographie T et nous supposerons qu'il ne rencontre pas l'espace ξ_0 en dehors du point A. Nous dirons que A est un point uni de première espèce si T détermine dans η une homologie de centre A et qu'il est de seconde espèce dans le cas contraire.

Si A est un point uni de première espèce, le point de diramation A' qui lui correspond sur Φ est multiple d'ordre p pour cette surface, le cône tangent étant rationnel et irréductible. Le point A' ne peut donc être triple pour Φ que si $p=3$. Nous laisserons ce cas de côté.

Si A est un point uni de seconde espèce, le point de diramation correspondant A' peut être multiple d'ordre

$$a+m+n+b'<p$$

pour la surface Φ, le cône tangent se décomposant en quatre cônes rationnels réspectivement d'ordres a, m, n, b', chacun de ces cônes rencontrant le précédent et le suivant suivant une génératrice, mais ne rencontrant pas les autres en dehors du sommet. Les cônes d'ordre m, n peuvent d'ailleurs manquer.

Nous nous proposons d'étudier ici le cas où les cônes d'ordres m, n manquent et où le point est multiple d'ordre trois, c'est-à-dire où l'on a $a=2$; $b'=1$.

2. Dans le faisceau des tangentes à F au point A, point uni de seconde espèce, l'homographie T détermine une homographie qui peut être représentée par

$$\lambda' : \mu' = \varepsilon \lambda : \varepsilon^{\alpha} \mu, \qquad (1 < \alpha < p)$$

où ε est une racine primitive d'ordre p de l'unité. Comme nous l'avons montré, la connaissance de α suffit pour déterminer la structure du point A et celle du point de diramation correspondant A'.

Introduisant l'entier positif β, compris entre 1 et p, tel que $\alpha\beta - 1$ soit multiple de p. Nous posons

$$p = a\alpha + b = b'\beta + a', \qquad (b < \alpha, a' < \beta),$$

donc, actuellement,

$$p = 2\alpha + b = \beta + a'.$$

Si nous posons $p = 2\nu + 1$, nous avons $\alpha = \nu$, $b = 1$, $\beta = 2\nu - 1$, $a' = 2$.

Désignons par C_0' les courbes C_0 passant par A. Nous avons montré que ces courbes ont un point triple en A et passent deux fois par $\alpha - 1$ points $(\alpha, 1), (\alpha, 2), \ldots, (\alpha, \alpha - 1)$ infiniment voisins successifs de A et simplement par $\beta - 1$ points $(\beta, 1), (\beta, 2), \ldots, (\beta, \beta - 1)$ infiniment voisins successifs de A dans une autre direction. Ces points sont unis de seconde espèce pour l'involution, sauf les deux derniers $(\alpha, \alpha - 1), (\beta, \beta - 1)$ qui sont unis de première espèce.

Projetons la surface Φ du point A' sur un hyperplan de l'espace ambient; nous obtenons une surface normale Φ_1, d'ordre $n - 3$ si n est l'ordre de Φ, dont les sections hyperplanes Γ_0' correspondent aux courbes C_0'. Sur Φ_1, au domaine du point

$(\alpha, \alpha-1$ correspond une conique σ_α et au domaine du point $(\beta, \beta-1)$, une droite σ_β. Cette droite rencontre la conique σ_α en un point A_1'.

Le point A_1' peut être simple ou double pour Φ_1. Dans le cas général, il est équivalent à t courbes rationnelles de degré -2, courbes que nous désignerons provisoirement par $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_t$. Si Γ_0 désignent les sections hyperplanes de Φ, on a

$$\Gamma_0 \equiv \Gamma_0' + \sigma_\alpha + \rho_1 + \rho_2 + \ldots + \rho_t + \sigma_\beta.$$

Parmi les courbes $C_1, C_2, \ldots, C_{p-1}$, il en existe, par exemple les courbes C_1, qui passent simplement par les points A, $(\alpha, 1), \ldots$, $(\alpha, \alpha-1)$. Les courbes Γ_1 qui leur correspondent sur Φ satisfont à la relation fonctionnelle

$$p\Gamma_0 \equiv p\Gamma_1 + \eta_0 \sigma_\alpha + \eta_1 \rho_1 + \ldots + \eta_t \rho_t + \eta_{t+1} \sigma_\beta,$$

où les η sont des entiers positifs. Les courbes Γ_1, sur la surface Φ_1, rencontrent la conique σ_α en un point variable. Si l'on exprime ce fait, en tenant compte que σ_α et σ_β sont de degrés respectifs virtuels -3, -2, on trouve

$$\eta_t = 2\eta_{t+1}, \eta_{t-1} = 3\eta_{t+1}, \ldots, \eta_{t-i} = (i+2)\ \eta_{t+1}, \ldots, \eta_1 = (t+1)\ \eta_{t+1},$$

$$\eta_0 = (t+2)\ \eta_{t+1}, \quad p = (2t+5)\ \eta_{t+1}.$$

Comme p est premier, on a $\eta_{t+1} = 1$ et $t = \nu - 2$.

3. Nous désignerons par C_0'' les courbes C_0' assujetties à toucher en A une droite ne contenant pas les points $(\alpha, 1), (\beta, 1)$; par C_0''' les courbes C_0'' assujetties à toucher une drotte analogue, et ainsi de suite. Nous formons ainsi une suite de systèmes linéaires

$$|C_0'|, |C_0''|, \quad |C_0'''|, \ldots |C_0^{(\nu+1)}|$$

dont les multiplicités en A vont en croissant. Le dernier système, $|C_0^{(\nu+1)}|$, a en A un point multiple d'ordre p à tangentes variables.

D'une manière précise, les courbes $C_0^{(i)}$ ont en A la multiplicité $\lambda_i + \mu_i$, avec λ_i tangentes confondues avec la droite joignant les points A et $(\alpha, 1)$ et μ_i tangentes confondues avec la droite joignant A et $(\alpha, 1)$, λ_i et μ_i satisfaisant aux congruences

$$\lambda_i + \alpha\,\mu_i \equiv 0, \quad \mu_i + \beta\,\lambda_i \equiv 0, \qquad (\text{mod. } p).$$

Actuellement, on a

$$\lambda_i + \nu\,\mu_i \equiv 0, \quad \mu_i + (2\nu - 1)\,\lambda_i \equiv 0, \qquad (\text{mod. } p).$$

La première solution $\lambda_1 = 1$, $\mu_1 = 2$ donne $|C_0'|$. Les autres solutions sont

$$\lambda_i = k, \mu_i = 2k, \qquad (3k < 2\nu + 1),$$

$$\lambda_i = \nu + k, \mu_i = 2k - 1, \quad (3k < \nu + 2).$$

Nous devons ranger ces solutions dans l'ordre croissant des $\lambda + \mu$. On peut avoir, p étant premier, $\nu = 3\nu'$ ou $\nu = 3\nu' + 2$.

Pour simplifier l'écriture, nous remplacerons ν' par ν. Nous avons à considérer deux cas:

a) $p = 6\nu + 1$. On a les solutions

$$\lambda_2 = 2, \mu_2 = 4;\ \lambda_3 = 3, \mu_3 = 6;\ \ldots, \lambda_\nu = \nu, \mu_\nu = 2\nu;$$

$$\lambda_{\nu+1} = 3\nu + 1, \quad \mu_{\nu+1} = 1; \quad \lambda_{\nu+2} = \nu + 1,$$

$$\mu_{\nu+2} = 2\nu + 2;\ \ldots;\ \lambda_{3\nu} = 2\nu, \quad \mu_{3\nu} = 4\nu.$$

b) $p + 6\nu + 5$. Les solutions sont:

$$\lambda_2 = 2, \mu_2 = 4;\ \ldots;\ \lambda_{+\nu 1} = \nu + 1,$$

$$\lambda_{\nu+1} = 2\nu + 2; \quad \lambda_{\nu+2} = 3\nu + 3, \quad \mu_{\nu+2} = 1;$$

$$\lambda_{\nu+3} = \nu + 2, \quad \mu_{\nu+3} = 2\nu + 4;\ \ldots;\ \lambda_{3+\nu 2} = 4\nu + 3, \quad \mu_{3+\nu 2} = 2\nu + 1.$$

Rappelons que la somme des multiplicités des courbes $C_0^{(i)}$ soit aux points $A, (\alpha, 1), \ldots, (\alpha, \alpha-1)$, soit aux points $A, (\beta, 1), \ldots, (\beta, \beta-1)$ doit être égale à p.

4. Plaçons-nous dans le premier cas: $p = 6\nu + 1$ et considérons les courbes C_0''.

Les courbes C_0'' passant six fois par A, ne peuvent plus passer par $(\beta, \beta-1)$. Supposons qu'elles passent deux fois par les points $(\beta, 1), \ldots, (\beta, x)$ et y fois par le point $(\beta, x+1)$. On doit avoir

$$6+2x+y=6\nu+1,$$

d'où $x=3\nu-3, y=1$. Les courbes C_0'' passent deux fois par les points $(\beta, 1), \ldots, (\beta, 3\nu-3)$, une fois par le point $(\beta, 3\nu-2)$ et, nécessairement, une fois par le point $(\beta, 3\nu-2, 1)$, infiniment voisin du précédent.

Les courbes C_0'' ne peuvent plus passer qu'une fois par le point $(\alpha, \alpha-1)$. Supposons qu'elles passent quatre fois par les points $(\alpha, 1), \ldots, (\alpha, x)$, y fois par le point $(\alpha, x+1)$ et une fois par les points $(\alpha, x+2), \ldots, (\alpha, \alpha-1)$. Nous devons avoir

$$6+4x+y+\alpha-x-2=6\nu+1,$$

c'est-à-dire $x=\nu-2, y=3$. Les courbes C_0'' passent quatre fois par les points $(\alpha, 1), \ldots, (\alpha, \nu-2)$, trois fois par $(\alpha, \nu-1)$, une fois par $(\alpha, \nu), \ldots, (\alpha, \alpha-1)$ et, nécessairement, une fois par les points $(\alpha, \nu-1, 1), (\alpha, \nu-1, 1, 1)$, infiniment voisins successifs de $(\alpha, \nu-1)$.

On vérifie que dans l'intersection de deux courbes C_0'', le point A absorbe $30\nu+5=5p$ points d'intersection.

Projetons la surface Φ_1 du point A_1' sur un hyperplan; nous obtenons une surface Φ_2 dont les sections hyperplanes Γ_0'' correspondent aux courbes C_0''. Cette surface est d'ordre n—5. Aux domaines des points unis de première espèce $(\alpha, \alpha-1)$, $(\alpha, \nu-1, 1, 1)$, $(\beta, 3\nu-2, 1)$ correspondent respectivement une droite σ_α, une droite ρ_{11} rencontrant σ_α en un point et une droite ρ_{12} rencontrant ρ_{11} en un point A_2'. Les courbes ρ_{11}, ρ_{12} sont les courbes désignées plus haut par ρ_1, ρ_l.

5. Considérons maintenant les courbes C_0'''; elles passent neuf fois par le point A et un raisonnement analogue au précédent montre que ces courbes passent trois fois par les points $(\beta, 1), \ldots, (\beta, 2\nu-3)$, une fois par le point $(\beta, 2\nu-2)$ et une fois par les points $(\beta, 2\nu-2, 1)$, $(\beta, 2\nu-2, 2)$ infiniment voisins successifs du précédent, six fois par les points $(\alpha, 1), \ldots$,

(α, x), y fois par $(\alpha, x+1)$ et une fois par les points $(\alpha, x+2), \ldots,$ $(\alpha, \alpha-1)$, enfin par une suite de points infiniment voisins successifs de $(\alpha, x+1)$ dont nous désignerons le dernier par P. On doit avoir

$$5x + y = 3\nu - 6.$$

Nous avons montré que la multiplicité de P est égale au plus grand commun diviseur de la différence des multiplicités des points (α, x), $(\alpha, x+1)$ et de la différence de celles des points $(\alpha, x+1)$ et $(\alpha, x+2)$, c'est-à-dire des nombres $6-y$ et $y-1$. Les nombres $6-y$ et $y-1$, ou encore les nombres 5 et $y-1$ sont premiers entre eux, car y ne peut prendre que les valeurs $2, 3, 4, 5$. Donc P est simple pour les courbes C_0'''.

Soit ϕ_3 la projection de ϕ_2 à partir de A_2'. C'est une surface d'ordre $n-7$ sur laquelle sont tracées trois droites: la droite σ_α qui représente le domaine de $(\alpha, \alpha-1)$, la droite ρ_{21} qui représente le domaine de P et recontre la précédente en un point, la droite ρ_{22} qui représente le domaine de $(\beta, 2\nu-2, 2)$ et rencontre la précedente en un point A_3'.

6. Envisageons les courbes $C_0^{(k)}$, où $k \leqq \nu$.

Reprenons le raisonnement précédent. Les courbes $C_0^{(k)}$ passent $3k$ fois par A, k fois par les points $(\beta, 1), \ldots, (\beta, x')$ et y' fois par le point $(\beta, x'+1)$. On a

$$k x' + y' = 6\nu + 1 - 3k. \tag{1}$$

Les courbes $C_0^{(k)}$ passent en outre par une suite de points infiniment voisins successifs de $(\beta, x'+1)$ dont le dernier sera désigné par P_β. La multiplicité de P_β est égale au plus grand commun diviseur de k et de y'. Or, si ces deux nombres n'étaient pas premiers, $p = 6\nu + 1$ ne le serait pas non plus. Le point P_β est donc simple pour les courbes $C_0^{(k)}$.

Les courbes $C_0^{(k)}$ passent $2k$ fois par les points $(\alpha, 1), \ldots,$ (α, x), y fois par $(\alpha, x+1)$ et une fois par les points $(\alpha, x+2), \ldots,$ $(\alpha, \alpha-1)$. On doit avoir

$$(2k-1)x + y = 3\nu - 3k + 3. \tag{2}$$

En outre, les courbes $C_0^{(k)}$ passent par une suite de points infiniment voisins successifs de $(\alpha, x+1)$ dont le dernier sera désigné par P_α. La multiplicité de P_α pour les courbes $C_0^{(k)}$ est le plus grand commun diviseur de $2k-y$ et de $y-1$, c'est-à-dire de $2k-1$ et de $y-1$. L'égalité précédente peut s'écrire

$$(2k-1)(x+1)+y-1=3\nu-k+1,$$

ou encore

$$2(2k-1)(x+1)+2(y-1)=p-(2k-1).$$

Il en résulte que $2k-1$ et $y-1$ sont premiers entre eux et que P_α est simple pour les courbes $C_0^{(k)}$.

Si l'on désigne par ϕ_k une surface dont les sections hyperplanes $\Gamma_0^{(k)}$ correspondent aux courbes $C_0^{(k)}$, cette surface est d'ordre $n-2k-1$ et contient une droite σ_α représentant le domaine de $(\alpha, \alpha-1)$, une droite $\rho_{k-1,1}$ représentant le domaine de P_α, une droite $\rho_{k-1,2}$ représentant le domaine de P_β. Les droites σ_α et $\rho_{k-1,1}$ se coupent en un point et les droites $\rho_{k-1,1}$ et $\rho_{k-1,2}$ en un points A_k'.

Donnons à k la valeur maximum $k=\nu$. Les courbes $C_0^{(\nu)}$ passent 3ν fois par A, ν fois par les points $(\beta, 1), (\beta, 2), (\beta, 3)$, une fois par $(\beta, 4)$ et une fois par une suite de points $(\beta, 4, 1)$, $(\beta, 4, 2), \dots, (\beta, 4, \nu-1)$, infiniment voisins successifs de $(\beta, 4)$. Elles passent en outre trois fois par $(\alpha, 1)$, deux fois par les points $(\alpha, 1, 1), (\alpha, 1, 2,), \dots, (\alpha, 1, \nu-2)$, infiniment voisins successifs de $(\alpha, 1)$, une fois par les points $(\alpha, 1, \nu-1), (\alpha, \nu-1, 1, 1)$ infiniment voisins successifs de $(\alpha, 1, \nu-2)$.

On vérifie aisément que la surface ϕ_ν est d'ordre $n-2\nu-1$. Elle contient trois droites: σ_α qui représente le point $(\alpha, \alpha-1)$, $\rho_{\nu-1,1}$ qui représente $(\alpha, 1, \nu-1, 1)$ et $\rho_{\nu-1,2}$ qui représente $(\beta, 4, \nu-1)$. Les deux premières droites se coupent en un point A_ν'' et les deux dernières en un point A_ν'.

6. Passons à l'examen des courbes $C_0^{(\nu+1)}$. Ces courbes ont la multiplicité $3\nu+2$ en A et passent simplement par les points $(\alpha, 1), \dots, (\alpha, \alpha-1)$. Elles ne peuvent plus passer par les points $(\alpha, 1, \nu-1, 1)$ et $(\beta, 4, \nu-1)$, par conséquent les courbes $\Gamma_0^{(\nu+1)}$ homologues des courbes $C_0^{(\nu+1)}$ sont découpées sur ϕ_ν par les hyperplans passant par le point A_ν'. Or, ce point doit être dou-

ble biplanaire pour la surface ϕ_ν. Il en résulte que sur la surface $\phi_{\nu+1}$, on a trois droites: la droite σ_α qui représente $(\alpha, \alpha-1)$ et deux droites ρ', ρ'', la première rencontrant σ_α en un point $AA''_{\nu+1}$ et la seconde rencontrant ρ' en $A'_{\nu+1}$.

Les courbes $C_0^{(\nu+2)}$ ne peuvent plus passer par $(\alpha, \alpha-1)$, donc les courbes homologues $\Gamma_0^{(\nu+2)}$ sont découpées sur $\phi_{\nu+1}$ par les hyperplans passant par $A''_{\nu+1}$. Les courbes $C_0^{(\nu+2)}$ ont la multiplicité $3(\nu+1)$ en A et passent $\nu+1$ fois par les points $(\beta,1), (\beta,2), \nu-4$ fois par le point $(\beta,3)$ et un certain nombre de fois par une suite de points infiniment voisins successifs de $(\beta,3)$. La multiplicité du dernier de ces points est le plus grand commun diviseur de $\nu+1$ et de $\nu-4$, c'est-à-dire de 5 et de $\nu-4$. Ces nombres sont premiers entre eux (pour ν assez grand), le point considéré est simple pour les courbes $C_0^{(\nu+2)}$. A son domaine correspond la droite ρ'' de $\phi_{\nu+1}$, droite que nous désignerons dorénavant par $\rho_{\nu 2}$.

La droite ρ' sera désignée par $\rho_{\nu,1}$. Les courbes $C_0^{(\nu+1)}$ passent $\nu+2$ fois par $(\beta,1), \nu+1$ fois par $(\beta,2), \nu-4$ fois par $(\beta,3)$ et se comportent comme les courbes $C_0^{(\nu+2)}$ aux points infiniment voisins de $(\beta,3)$. En outre, elles passent simplement par une suite de points $(\beta,1,1), (\beta,1,2), \ldots, (\beta,1,2\nu-1)$ infiniment voisins successifs de $(\beta,1)$. Sur la surface $\phi_{\nu+1}$, au domaine du point $(\beta,1,2\nu-1)$ correspond la droite $\rho'=\rho_{\nu,1}$.

7. Nous étudierons en même temps les courbes $C_0^{(\nu+2)}$ et $C_0^{(\nu+3)}$.

Les courbes $C_0^{(\nu+3)}$ ont la multiplicité $3\nu+5$ en A et ne peuvent plus passer par le point $(\alpha, \alpha-1)$. On a $\mu_{\nu+3}=3$ et nous supposerons que les courbes passent trois fois par les points $(\alpha,1), \ldots, (\alpha,x)$, y fois par le point $(\alpha, x+1)$. On doit avoir

$$3x+y=3\nu-4,$$

d'où $x=\nu-2$, $y=2$. Les courbes $C_0^{(\nu+3)}$ passent donc trois les points $(\alpha,1), \ldots, (\alpha,\nu-2)$, deux fois par $(\alpha,\nu-1)$ et par suite une fois par les points $(\alpha,\nu-1,1), (\alpha,\nu-1,1,1)$. On retrouve donc le point par lequel passent les courbes C_0'', point qui donne naissance, sur la surface ϕ_2, à la droite ρ_{11}.

Sur la surface $\phi_{\nu+1}$ se trouvent tracées trois droites: la droite σ_α, la droite $\rho_{\nu,1}$ coupant σ_α en $A''_{\nu+1}$, la droite $\rho_{\nu,2}$ coupant $\rho_{\nu,1}$ en $A'_{\nu+1}$. On passe de $\phi_{\nu+1}$ à $\phi_{\nu+2}$ en projetant la première de $A''_{\nu+1}$, puisque σ_α ne peut plus se trouver sur $\phi_{\nu+2}$. Sur cette dernière surface $\rho_{\nu,2}$ existe encore, mais elle ne peut plus se trouver sur $\phi_{\nu+3}$. Il en résulte que l'on passe de $\phi_{\nu+2}$ $\phi_{\nu+3}$ en projetant la première d'un point $A'_{\nu+2}$ se trouvant sur $\rho_{\nu,2}$. Par conséquent, la droite ρ_{11}, qui provient du point $(\alpha, \nu-1, 1, 1)$ existe sur $\phi_{\nu+2}$. Il est alors facile de voir que les courbes $C_0^{(\nu+2)}$ passent $3\nu+3$ fois par A, cinq fois par $(\alpha, 1)$, trois fois par $(\alpha\, 2), \ldots, (\alpha, \nu-2)$, deux fois par $(\alpha, \nu-1)$, une fois par $(\alpha, \nu-1, 1), (\alpha, \nu-1, 1, 1)$, deux fois par les points $(\alpha, 1, 1), \ldots, (\alpha, 1, \nu-2)$, une fois par $(\alpha, 1, \nu-1), (\alpha, 1, \nu-1, 1)$. On retrouve ainsi le point qui donne naissance à la droite $\rho_{\nu-1,1}$.

Sur la surface $\phi_{\nu+2}$, d'ordre $n-2\nu$, se trouvent tracées trois droites: ρ_{11}, $\rho_{\nu-1,1}$ qui rencontre ρ_{11} en un point $A''_{\nu+2}$, $\rho_{\nu,2}$ qui rencontre $\rho_{\nu-1,1}$ en un point $A'_{\nu+2}$.

Pour étudier le comportemant des courbes $C_0^{(\nu+3)}$ au point A, il convient de considérer les courbes $C_0^{(\nu+4)}$; nous étudierons directement le cas général.

8. Parmi les systèmes $|C_0^{(\nu+2)}|, \ldots$, on rencontre le système $|C_0^{(\nu+2k-1)}|$ qui correspond à

$$\lambda_{\nu+2k-1} = 3\nu + k, \qquad \mu_{\nu+2k-1} = 2k-1, \qquad (k>1).$$

Les courbes de ce système ne peuvent plus passer par le point $(\alpha, a-1)$. Supposons qu'elles passent $2k-1$ fois par les points $(\alpha, 1), \ldots, (\alpha, x_1)$ et y_1 fois par le point (α, x_1+1). On doit avoir

$$(2k-1)\, x_1 + y_1 = 3\nu - 3k + 2.$$

Comparons cette relation à l'égalité (2),

$$(2k-1)\, x + y = 3\nu - 3k + 3.$$

On a $x_1 = x, y_1 = y-1$. Si l'on tient compte du fait que les courbes $C_0^{(k)}$ passent une fois par le point $(\alpha, x+2)$, on voit que les branches des courbes $C_0^{(\nu+2k-1)}$ passant par $(\alpha, 1)$ ont le même comportement que celles des courbes $C_0^{(k)}$, en dehors des points $(\alpha, x+2), \ldots, (\alpha, a-1)$. En particulier, elles passent simplement par le point P_α auquel correspond la droite $\rho_{k-1,1}$ sur la surface ϕ_k.

On en conclut que sur la surface $\phi_{\nu+2k-1}$ dont les sections hyperplanes correspondent aux courbes $C_0^{(\nu+2k-1)}$, se trouve tracée une droite $\rho_{k-1,1}$.

9. Considérons maintenannt le système $C_0^{(\nu+2k-2)}$, qui correspond à la solution

$$\lambda_{\nu+2k-2}=\nu+k-1, \quad \mu_{\nu+2k-2}=2(\nu+k-1).$$

Les courbes de ce système passent $3(\nu+k-1)$ fois par A, $\nu+k-1$ fois par les points $(\beta,1),\dots,(\beta,x')$ et y' fois par $(\beta,x'+1)$. On doit avoir

$$(\nu+k-1)\,x'+y'=3\,\nu-3\,k+4.$$

On voit facilement que si $\nu+k-1$ et y' avaient un facteur commun, ce facteur diviserait p. Donc, les courbes $C_0^{(\nu+2k-2)}$ ont en commun une suite de points infiniment voisins successifs de $(\beta,x'+1)$ dont le dernier est simple pour les courbes. Au domaine de ce dernier point correspond sur la surface $\phi_{\nu+2k-2}$ une droite que nous désignerons par ρ_{k-2}.

Les courbes $C_0^{(\nu+2k-2)}$ passent $2\,k+1$ fois par $(\alpha,1)$, $2\,k-1$ fois par $(\alpha,2),\dots,(\alpha,x_1)$, y_1 fois par (α,x_1+1), par une suite de points, infiniment voisins successifs de (α,x_1+1) dont le dernier est simple et correspond à ρ_{k-1}, enfin deux fois par $(\alpha,1,1),\dots,(\alpha,1,\nu-2)$, une fois par $(\alpha,1,\nu-1),(\alpha,1,\nu-1,1)$.

On en conclut que sur la surface $\phi_{\nu+2k-2}$, trois droites sont tracées: les droites $\rho_{k-1,1}$ et $\rho_{\nu-1,1}$ se coupant en un point $A''_{\nu+2k-2}$, la droite ρ_{k-2} coupant $\rho_{\nu-1,1}$ en un point $A'_{\nu+2k-2}$.

On passe de $\phi_{\nu+2k-2}$ à $\phi_{\nu+2k-1}$ en projetant la première de $A'_{\nu+2k-2}$.

10. Les courbes $C_0^{(\nu+2k)}$ se traitent comme les courbes $C_0^{(\nu+2k-2)}$. On voit qu'elles passent $3\,\nu+3\,k$ fois par A, $\nu+k$ fois par les points $(\beta,1),\dots,(\beta,x''),y''$ fois par $(\beta,x''+1)$, où l'on a

$$(\nu+k)\,x''+y''=3\,\nu-3\,k+1.$$

Le dernier point commun à ces courbes sur la branche passant par $(\beta, 1)$ est simple et donne naissance, sur la surface $\phi_{\nu+2k}$, à une droite ρ_{k-1}.

Retournons aux courbes $C_0^{(\nu+2k-1)}$. Ces courbes passent $3\nu+3k-1$ fois par A, $\nu+k+1$ fois par $(\beta, 1)$, $\nu+k$ fois $(\beta, 2), \ldots$, se comportant ensuite comme les courbes $C_0^{(\nu+2k)}$, puis une fois par les points $(\beta, 1, 1), \ldots, (\beta, 1, 2\nu-1)$.

Il en résulte que sur la surface $\phi_{\nu+2k-1}$ se trouvent tracés trois droites: la droite $\rho_{k-1,1}$, la droite $\rho_{\nu,1}$ coupant la précédente en un point $A''_{\nu+2k-1}$, et la droite ρ_{k-1} coupant la précédente au point $A'_{\nu+2k-1}$.

On a ainsi la formation des différentes surfaces $\phi_1, \phi_2, \ldots$ images de l'involution I et la structure du point de diramation A'. Cependant, pour achever cette étude, il convient de considérer les dernières surfaces obtenues.

Considérons tout d'abord les courbes $C_0^{(3\nu-2)}$. Elles passent $6\nu-3$ fois par A, quatre fois par les points $(\alpha, 1)$, $(\alpha, 1, 1), \ldots, (\alpha, 1, \nu-2)$, deux fois par les points $(\alpha, 1, \nu-1)$, $(\alpha, 1, \nu-1, 1)$, quatre fois par $(\beta, 1)$ et par une suite de points infiniment voisins successifs de $(\beta, 1)$ se terminant pas un point simple.

Sur la surface $\phi_{3\nu-2}$, nous avons une conique $\rho_{\nu-1,1}$ et une droite $\rho_{\nu-2}$ coupant la conique en un point $A'_{3\nu-2}$.

Les courbes $C_0^{(3\nu-1)}$ passent deux fois par les points $(\alpha, 1)$, $(\alpha, 1, 1), \ldots, (\alpha, 1, \nu-1)$, une fois par les points $(\alpha, 1, \nu-1)$, $(\alpha, 1, \nu-1, 1)$, deux fois par les points $(\beta, 1), (\beta, 1, 1), \ldots$, $(\beta, 1, 2\nu-1)$. Sur la surface $\phi_{3\nu-1}$, qui est la projection de $\phi_{3\nu-2}$ à partir de $A'_{3\nu-2}$, on a une droite $\rho_{\nu-1,1}$ et une conique $\rho_{\nu,1}$ se rencontrant en un point. La surface $\phi_{3\nu-1}$ est d'ordre $n-6\nu+1$.

Les courbes $C_0^{(3\nu)}$ passent 6ν fois par A, une fois par les points $(\alpha, 1), (\alpha, 1, 1), \ldots, (\alpha, 1, 4\nu-1)$, une fois par les points $(\beta, 1), (\beta, 1, 1), \ldots, (\beta, 1, 2\nu-1)$. Sur la surface $\phi_{3\nu}$, se trouvent tracées une droite ρ, représentant le domaine du point $(\alpha, 1, 4\nu-1)$ et la droite $\rho_{\nu,1}$. Cette surface est d'ordre $n-6\nu$, donc $A'_{3\nu-1}$ est simple pour $\phi_{3\nu-1}$ et ρ est une droite exceptionnelle.

Nous avons ainsi retrouvé les $t=3\nu-2$ composantes du point double biplanaire A_1' de la surface Φ_1; ce sont les droites

$$\rho_{11}, \ldots, \rho_{\nu 1}, \rho_1, \ldots, \rho_{\nu-2}, \ \rho_{\nu 2}, \ldots, \rho_{12},$$

dont chacune rencontre la précédente et la suivante en un point, mais ne rencontre pas les autres.

11. Il resterait à traiter le second cas, $p = 6\nu + 5$. Il suffirait de calquer les raisonnements qui viennent d'être faits. On trouverait d'ailleurs une configuration tout à fait analogue à celle du premier cas. Nous ne nous attarderons pas à cette question.

Liége, le 20 juin 1955.