GEOMETRIA DIFERENCIAL GLOBAL EN LAS MEDICIONES FISICAS

por Federico Grabiel
Facultad de Ciencias Físicomatemáticas de La Plata y Laboratorio IMET de investigaciones metalúrgicas, Buenos Aires

Si observamos una bola de billar con un microscopio, observaremos rugosidades en su superficie; si la observamos a simple vista, nos parecerá perfectamente esférica. Semejante diferencia notaremos si observamos una pelota de caucho a muy corta, o a una mayor distancia; o la luna, con o sin telescopio muy potente. Lo que determina si en estos casos observamos o no la esfericidad considerada en la geometría analítica de funciones de punto es: 1) el tamaño de las rugosidades o irregularidades en la superficie; 2) la potencia de los medios empleados para la observación; 3) la distancia del observador al objeto. En términos generales, la geometría analítica y diferencial emplea como patrón de medida el punto matemático, mientras que las ciencias naturales en toda circunstancia usan un patrón de medida finito con exactitud también finita. El primero representa una idealización matemática con respecto a los segundos, y, como toda idealización matemática, no en todo caso es justificable. Al igual que las ciencias naturales no pueden distinguir entre dos porciones de espacio o superficies que se diferencian por un conjunto de puntos de medida nula, tampoco pueden distinguir en curvas y superficies variaciones que requieren, para ser percibidas, un patrón de medida puntual (con la consiguiente exactitud «infinitesimal»). En todo caso el patrón de medida es un intervalo o una porción equivalente.

Con el auxilio de la teoría de tensores extensivos recientemente desarrollada (ver [1], [2]), en el presente trabajo daremos un planteo matemático introductorio a las consideraciones formuladas en el párrafo anterior. Nos limitaremos al espacio tridimensional, ya que ése parecer ser el caso de mayor interés para este tipo de problema.

Considérese un espacio amorfo de puntos en el cual se introduce un sistema de coordenadas X. Las coordenadas del punto P se denotarán por x^i $(i=1,2,3)$. Sea S un conjunto de medida $\omega(S)$. Diremos que por medio de X hemos asociado a S una subdivisión regular $(S.R.)$ cuando X genera una familia de intervalos $\{S_i\}$ con las siguientes propiedades:

1. La intersección de dos intervalos cualesquiera es vacía.
2. Todos los intervalos tienen la misma medida $\omega(S_i)$.
3. S está contenido en la unión $\bigcup S_i$.
4. Para ningún valor de i es vacía la intersección $S \cap S_i$.
5. Los intervalos de la familia $\{S_i\}$ están ordenados.

Después se define el operador normalizador N_S como sigue:

a) Si F es una función extensiva (de conjunto), es $N_s(F)=F(S)$; b) Si f es una función de punto

$$N_S(f)=\lim_{n\to\infty}(S.R.)\, \Sigma \frac{1}{n} f(P_k)$$

donde lím $(S.R.)$ indica que el paso al límite se realiza bajo las condiciones de subdivisión regular.

Introduzcamos ahora en el espacio una transformación admisible de coordenadas $\bar{x}^i=\bar{x}^i(x^j)$ $(i,j=1,2,3)$ de jacobiano no nulo y cuyas funciones tienen segundas derivadas continuas. Supóngase que a cada conjunto o porción le sea asignado un conjunto de tres números $T^i(S)$. Al pasar de S a $\bar{S}$ por medio de una transformación admisible, $T^i(S)$ tendrá a $\bar{T}^i(S)$ por correspondiente. En los trabajos citados [1], [2] hemos definido a tres funciones extensivas T^i como componentes de un tensor extensivo, contravariante de primer rango, cuando bajo una transformación admisible sus elementos se transforman de acuerdo a cierta ley que generaliza la ley análoga para tensores de punto.

A partir de esta definición fundamental, toda la teoría de los tensores de punto es generalizable a las funciones extensivas.

Supongamos que al punto x_0 de la porción S de espacio se le hace recorrer una curva C que puede representarse paramétricamente por $x_0{}^i = x_0{}^i(t)$. La definición de desplazamiento global implica que al desplazamiento puntual $dx_0{}^i$ corresponde un desplazamiento global Dx^i de S y que todos los punttos de S tienen la misma representación paramétrica en términos del parámetro t cuando x_0 recorre C. A la banda alabeada recorrida por S la llamaremos $\bar{C}$.

Con estos instrumentos podemos establecer una geometría diferencial correspondiente a $\bar{C}$; así Dx^i/Ds es la tangente global y las fórmulas de Frenet son inmediata generalización de las correspondientes en la geometría diferencial puntual.

Todas las curvas puntuales C que son subconjuntos de puntos de la banda alabeada $\bar{C}$ formada por S serán *equivalentes bajo el patrón* $(S, \bar{C})$, y son curvas indistinguibles entre sí cuando el patrón de medida *física* empleado no tiene una exactitud superior a S y es empleado para observaciones en la banda $\bar{C}$. Evidentemente esta equivalencia tiene las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva.

El sistema de coordenadas a emplear está dictado por la naturaleza de las observaciones físicas que han de hacerse. Así, si las observaciones se realizan sobre un plano perpendicular a la línea de observación, y de dimensiones relativamente pequeñas en comparación con la distancia entre el observador y el plano, el sistema cartesiano será apropiado, siendo S un círculo en la mayoría de los casos, o un cuadrado. Si, por el contrario, las observaciones se hacen en función de la distancia del objeto al observador (objetos a diferentes distancias, como, por ejemplo, en astronomía o agrimensura), y el aparato de observación pierde exactitud aproximadamente en función lineal de la distancia, entonces el sistema más apropiado (reduciéndolo a un *plano* de observación) sería el polar.

Se podrá notar que, empleando tensores extensivos, consideraciones atinentes a limitaciones impuestas por los instrumentos de medición son implícitamente incluídas en el aparato matemático. Empleando tensores puntuales, por el contrario, todas esas consideraciones han de hacerse a posteriori.

BIBLIOGRAFIA

[1] GRABIEL, F., *Set Functions and Tensors*, de próxima publicación.
[2] — — *Tensors on Sets*, de próxima publicación en "Tensor".