POLÍGONOS INSCRIPTIBLES EN CURVAS CONVEXAS (1)

por G. Lumer, Montevideo (Uruguay)

Introducción. — A raíz del estudio de redes ortogonales en el plano, surgió el problema de si existían curvas convexas distintas de la circunferencia en las que se pudiera «dar vuelta» 360° un cuadrado de lado fijo de modo que sus vértices permanezcan sobre la curva convexa dada (2).

A continuación daremos un ejemplo en el sentido afirmativo y estudiaremos cuales son en general los polígonos tales que se pueden «dar vuelta» permaneciendo inscritos en alguna curva convexa dada. Alternativamente: ¿Cuáles son las curvas convexas en las que puede «darse vuelta» algún polígono de dimensiones fijas en las condiciones anteriormente consideradas?

La primera cuestión se resuelve simple y totalmente en el sentido de que los polígonos en cuestión son precisamente los inscriptibles en una circunferencia. La segunda cuestión no parece tan sencilla y se indican algunos resultados parciales.

Incidentalmente se muestra también que los polígonos regulares se pueden «dar vuelta» en curvas convexas que limitan un área menor que el área del círculo circunscrito al polígono considerado.

---

(1) Parte de lo expuesto aquí fué presentado en la reunión anual de la Unión Matemática Argentina, Buenos Aires, 1952.

(2) Más en general diremos simplemente que un polígono $P_1P_2 \ldots P_n$ puede "darse vuelta" en una curva convexa Γ, cuando existen puntos $P_1(t)$, $P_2(t)$, $\ldots P_n(t)$ funciones uniformes y continuas de $t, 0 \leq t \leq 1$; tales que $P_1(t)$ $P_2(t) \ldots P_n(t)$ sea un polígono directamente congruente con $P_1P_2 \ldots P_n$, $P_i(0) = P_i(1)$ para $i = 1, 2, \ldots, n$ y $P_i(t)$ describe Γ una sola vez cuando t pasa de 0 a 1.

Cuadrados. — Vamos a construir, cinemáticamente el ejemplo mencionado más arriba.

Sea O una circunferencia centrada en o y sea O' otra circunferencia centrada en o' y tangente interiormente a O. El radio de O' será igual a 4/5 del radio de O. Consideremos el movimiento rígido definido haciendo rodar sin deslizamiento, O' sobre O. Sea $ABCD$ un cuadrado contrado en o' y ligado al plano de O' en el movimiento rígido anteriormente considerado. Sea t_0 el punto de tangencia de O y O'. Consideramos el desplazamiento de t_0 sobre O y O', resultando que a un punto t' de O' que dista de t_0 en α' (medido en ángulos al centro) corresponde un punto t que dista de t_0 en $\frac{4}{5}\alpha' = \alpha$. Tales puntos correspondientes vienen a coincidir en el movimiento rígido considerado y al producirse esta coincidencia, y puesto que coincidirán entonces las tangentes a O' en t' y a O en t, habrá habido un giro de $\frac{\alpha'}{5}$ del plano móvil con respecto al fijo.

Cuando se tenga $\alpha = 2\pi$ y por lo tanto O' vuelva a su posición inicial con respecto al plano fijo, el plano móvil habrá girado 90° con respecto al plano fijo y por lo tanto B vino a sustituir a A, C a B, D a C, y A a D. Cada uno de estos puntos describió un arco, y los cuatro arcos forman una curva en la cual $ABCD$ puede «darse vuelta», la cual obviamente tiene tangente continua en todos los puntos. Falta ver que la curva anterior Γ es convexa, para una adecuada elección del tamaño del cuadrado. Para ello aplicamos el conocido teorema de Savary sobre centros de curvatura. Mediante esto se reconoce fácilmente que para cualquier posición de O y O' el lugar de los puntos de inflexión (para esta posición) es la circunferencia de diámetro t_0, con centro sobre $o\,o'$. Considerando el lugar de los puntos de inflexión como ligado al plano móvil y puesto que el movimiento relativo del cuadrado con respecto al plano móvil es un giro alrededor de O' se reconoce que Γ será convexa siempre que se tome $ABCD$ exterior o sobre la circunferencia centrada en O' y tangente exteriormente al lugar de los puntos de inflexión.

Triángulos isósceles. — El caso del cuadrado es un caso particular del más general de los triángulos isósceles $ABC, AB = AC$, que se pueden «dar vuelta» en una curva convexa Γ.

Teorema 1. — *Si el ángulo BAC es un submúltiplo irracional de* $2\pi, \Gamma$ *es necesariamente una circunferencia de lo contrario existen infinitas curvas convexas en las que ABC se puede «dar vuelta» y que son distintas de la circunferencia circunscrita.*

Demostración. — En efecto, si ABC está inscrito en Γ y el ángulo BAC es irracional con respecto a π, entonces cuando en su desplazamiento AB venga en BC, C dará en C' que por hipótesis pertenece a Γ pero evidentemente también a la circunscrita a ABC. Repitiendo el razonamiento para el triángulo BCC', $CC'C''$ y así sucesivamente resultará que Γ y la circunferencia circunscrita a ABC tienen en común un conjunto de puntos denso en esta última y por lo tanto coinciden.

Si el ángulo BAC es racional con respecto a π la construcción anterior engendra un conjunto de puntos que se disponen según un polígono regular y entonces por el procedimiento análogo al usado para el caso del cuadrado se construye una curva convexa en que este polígono, y por tanto el triángulo se pueden «dar vuelta».

Polígonos. — Acabamos de ver que existen polígonos que pueden «darse vuelta» en una curva convexa que no es una circunferencia, y otros para los que esto no es posible (triángulos isósceles de ángulo irracional con π). En los casos considerados los polígonos eran inscriptibles en la circunferencia. Vamos a obtener ahora el resultado general antes mencionado.

Teorema 2. — *Si un polígono se puede «dar vuelta» en alguna curva convexa, entonces es inscriptible en una circunferencia.*

En efecto, sea $x' o' y'$ un sistema de ejes ligado al plano móvil en el movimiento rígido que define el del polígono, y sea $x o y$ un sistema de ejes ligado al plano de la curva convexa (plano fijo). Se tiene las relaciones obvias:

$$x = x' \cos \alpha - y' \operatorname{sen} \alpha + a$$

$$y = x' \operatorname{sen} \alpha + y' \cos \alpha + b.$$

Puesto que la curva convexa Γ dada puede carecer de tangente en ciertos puntos, el movimiento no siempre es «derivable», pero por ser convexa Γ, $P_i(t)$, vértice genérico del polígono que la recorre es derivable a menos de un número numerable de puntos, y por lo tanto los $P_i(t)$ serán también simultáneamente derivables a menos de un número numerable de puntos. Por lo tanto, todo punto ligado al plano móvil es derivable salvo para un número numerable de valores de t. Sea D el conjunto de puntos t para los cuales sucede esto. Es fácil verificar que para $t \in D$, se verifica

$$xdy - ydx = (x'^2 + y'^2)\, d\alpha + (Ax' + By')\, dt + adb - bda$$

donde A y B son expresiones en sen α y cos α, y todo se expresa con derivadas con respecto a t. Tomando entonces las integrales de Lebesgue de ambos miembros se obtiene

$$\frac{1}{2} \oint (xdy - ydx) = \pi(x'^2 + y'^2) + K_1 x' + K_2 y' + \frac{1}{2} \oint adb - bda$$

pero obviamente existen las integrales de Stieltjes de $x\,dy - y\,dx$ y $a\,db - b\,da$, dan los áreas de Γ y de la curva descrita por el punto o', y coinciden con sus integrales de Lebesgue. Designando con $S(x', y')$ el área (con su signo) encerrada por la trayectoria del punto (x', y') en una vuelta completa del plano móvil se tiene

$$S(x', y') = \pi(x'^2 + y'^2) + K_1 x' + K_2 y' + S(o, o).$$

Mediante un cambio de ejes en el plano móvil se puede anular los términos en x' e y', vale decir que existe en el plano móvil un punto Ω tal que el área descrita por el punto $P(x', y')$ se expresa:

$$S(P) = \pi |P - \Omega|^2 + S(\Omega).$$

Ahora bien, puesto que los vértices del polígono describen en el movimiento considerado la misma curva se deduce inmediatamente que:

$$|P_1 - \Omega| = |P_2 - \Omega| = \ldots = |P_n - \Omega|.$$

Por lo tanto los P_i pertenecen todos a una circunferencia de centro Ω.

En cambio no sabemos prácticamente nada que permita caracterizar las curvas convexas en las que pueden «darse vuelta» polígonos. Ni siquiera en el caso particular del cuadrado. Unicamente hay alguna información auxiliar como por ejemplo la que da el siguiente

Teorema 3. — *Una curva convexa en la que pueda «darse vuelta» un cuadrado tiene tangente en todo punto.*

Demostración. — Sea $ABCD$ el cuadrado considerado cuyos vértices se mueven sobre la curva convexa Γ. Esta última, por ser convexa, tiene semitangentes en todos los puntos. Supongamos que las semitangentes en A, AT' y AT'' no pertenezcan a una misma recta, vale decir que no haya tangente en A. Sean BS' y BS'' las semitangentes en B.

A efectos de estudiar las semitangentes se puede considerar el movimiento infinitesimal del cuadrado a partir de la posición $ABCD$ en un sentido, haciendo que A se mueve sobre AT' y B sobre BS' donde es fácil ver que por la convexidad de Γ y la invariabilidad de la distancia AB el ángulo de AT' con BS' debe ser mayor de 90^o (esto determina la elección de semitangentes correspondientes en A y B).

Luego consideramos el movimiento del cuadrado en el otro sentido con A moviéndose sobre AT'' y B sobre BS''. Se construye los centros instántaneos de rotación para ambos movimientos. Se reconoce sin gran esfuerzo, estudiando las diversas posibilidades según la posición de estos en el cuadrado que las semitangentes en C(o D) correspondientes a ambos movimientos forman entre si un ángulo mayor de 180^o, del lado del cuadrado. Esto es absurdo por ser convexa.

Areas. — Venimos ahora a la cuestión mencionada al final de la introducción. Aplicando la fórmula antes deducida, resulta que siendo S el área encerrada por una curva convexa Γ en la que puede «darse vuelta» un polígono, y S_0 el área descrita por el centro del círculo circunscrito al polígono anterior (que existe en virtud del teorema 2), y siendo R el radio de este círculo, se tiene:

$$S = \pi R^2 + S_0.$$

Las áreas están tomadas con su signo y por lo tanto si S'_0 designa la medida del área descrita por el centro del círculo circunscrito en valor absoluto y contada una sola vez, y siendo n el número de veces que aquel centro describe su trayectoria en una vuelta completa del polígono se tendrá:

$$S = \pi R^2 \pm n S'_0$$

donde corresponde + o — según el sentido de recorrido del centro durante el movimiento.

En el caso del ejemplo considerado al principio, puesto que el punto O' gira alrededor de O en el sentido opuesto al giro del cuadrado se tendrá para el área de la curva convexa:

$$S = \pi \mathrm{R}^2 - 4\pi |O' - O|^2$$

y análogamente para los demás polígonos regulares.

Queda pendiente el problema de hallar una curva convexa en la que se pueda «dar vuelta» un cuadrado y cuya área sea mínima (con relación al área del círculo circunscrito). Es esta una pregunta natural, pero cuya respuesta ciertamente no aparece como sencilla.

INSTITUTO DE MATEMÁTICA,
UNIVERSIDAD DE MONTEVIDEO (Uruguay).