OUVERTS m-RÉGULIERS

par J. L. LIONS, Nancy (Francia)

En hommage à M. Beppo Levi

RÉSUMÉ: Un ouvert de R^n est m-régulier si toute fonction de carré sommable sur cet ouvert ainsi que toutes ses dérivées d'ordre exactement m (dérivées prises au sens des distributions sur l'ouvert) a toutes ses dérivées intermédiaires de carré sommable sur l'ouvert. On donne une condition suffisante pour qu'un ouvert non borné soit m-régulier.

1. *Position du problème.*

Soit Ω un ouvert pour l'instant quelconque de R^n; on désigne par $D(\Omega)$ l'espace des fonctions indéfiniment différentiables sur Ω, à valeurs complexes, à support compact dans Ω, muni de la topologie de limite inductive de Schwartz (cf. Schwartz [1], [2]); soit $D'(\Omega)$ l'espace dual de $D(\Omega)$, espace des distributions sur Ω. On désigne par $L^p(\Omega)$ l'espace des (classes de) fonctions de puissance p ème sommable sur Ω, muni de la norme $\|f\|_{L^p}$ usuelle:

$$\|f\|_{L^p} = \Big(\int_\Omega |f(x)|^p \, dx \Big)^{1/p}.$$

L'étude de certains problèmes aux limites (cf. Gårding [1], Deny Lions [1], Lions [1]) conduit à l'introduction des espaces suivants:

Espace $W^m(\Omega)$: ç'est l'espace des (classes de) fonctions $u \in L^2(\Omega)$, telles que $D^p u = \dfrac{\partial^{|p|}}{\partial x_1^{p_1} \dots \partial x_n^{p_n}} u$, $p = (p_1, \dots, p_n)$, $|p| = p_1 + \dots + p_n$, soit dans $L^2(\Omega)$ *pour tout* p *avec* $|p| \leq m$, *les dérivations étant prises au sens des distributions sur* Ω.

On pose:

(1, 1) $$\|u\|_k^2 = \sum_p \|D^p u\|_{L^2}, \qquad |p| = k,$$

puis

(1, 2) $$|||\, u \,|||_m^2 = \sum_{k=0}^{m} \|u\|_k^2$$

(avec ces notations:

$$\|u\|_0 = \|u\|_{L^2}).$$

On voit facilement que pour la norme $|||\, u \,|||_m$, l'espace *$W^m(\Omega)$ est un espace de Hilbert.*

Espace $E^m(\Omega)$: c'est l'espaces des $u \in L^2(\Omega)$ tels que $D^p u$ soit dans $L^2(\Omega)$ pour tout p avec $|p| = m$, *sans aucune hypothèse sur les dérivées intermédiaires.* On munit cet espace de la norme dont le carré est donné par

(1, 3) $$\|u\|^2_{E^m} = \|u\|_0^2 + \|u\|_m^2.$$

On constate encore facilement que pour la norme $\|u\|_{E^m}$ l'espace *$E^m(\Omega)$ est un espace de Hilbert.*

Espace $BL_m(\Omega)$: c'est l'espace des *distributions* $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ (et non plus des fonctions de carré sommable sur Ω) telles que $D^p u \in L^2(\Omega)$ pour tout p avec $|p| = m$. Cet espace est *l'espace de Beppo Levi d'ordre m*, sur Ω (si $m = 1$, c'est l'espace de Beppo Levi usuel). On munit $BL_m(\Omega)$ de la *semi norme* $\|u\|_m$; on montre (cf. Deny Lions [1]) que l'espace séparé associé est un espace de Hilbert.

Un problème utile et naturel est maintenant de comparer ces trois espaces. Il est évident que

(1, 4) $$W^m(\Omega) \subset E^m(\Omega) \subset BL_m(\Omega),$$

inclusions algébriques et topologiques. Ces inclusions peuvent être *strictes*. En effet notons d'abord que tout élément u de $BL_m(\Omega)$ est *localement* dans Ω de carré sommable ainsi que toutes ses dérivées d'ordre $\leq m$ (les dérivées d'ordre m étant par définition globalement de carré sommable), mais u *n'est pas forcément dans* $L^2(\Omega)$; cf. des contre exemples dans le cas $m=1$ dans Nikodym [1], Courant-Hilbert [1]. La deuxième inclusion dans (1,4) peut donc être stricte. De même, sur des ouverts du type de ceux considérés dans Courant-Hilbert [1], Chap. VII, § 8, N.º 2, on contruit facilement des fonctions u qui sont dans $E^2(\Omega)$ et ne sont pas dans $W^2(\Omega)$. La première inclusion (1,4) peut donc également être stricte.

Donnons maintenant un exemple général où l'on a l'égalité algébrique: $E^m(\Omega)=BL_m(\Omega)$. On a désigné dans Deny-Lions [1] par *ouvert de Nikodym* un ouvert connexe borné tel que tout élément de $BL_1(\Omega)=BL(\Omega)$ soit de carré sommable sur Ω. Il est évident que sous cette hypothèse, on a l'égalité $E^m(\Omega)=BL_m(\Omega)$ et également $W^m(\Omega)=E^m(\Omega)$; comme on a là deux espaces de Hilbert, dont le premier est muni d'une topologie à priori plus fine, cette dernière égalité est également topologique, d'après la théorème de Banach sur les isomorphismes (cf. Bourbaki [1]). (On peut munir $BL_m(\Omega)$ d'une structure d'espace de Hilbert; cf. Lions [2]; on a alors également $W^m(\Omega)=BL_m(\Omega)$, topologiquement). Résumons:

Proposition 1.1. *Si* Ω *est un ouvert de Nikodym, on a des égalités dans* (1,4).

On montre (cf. Deny Lions) que tout ouvert borné, de frontière assez régulière, est un ouvert de Nikodym.

Pours les ouverts de mesure infinie, on n'a jamais $E^m(\Omega)= =BL_m(\Omega)$; contre exemple: les polynomes de degré $<m$. On peut par contre avoir $W^m(\Omega)=E^m(\Omega)$; par exemple, on voit facilement, en utilisant la transformation de Fourier et le théorème de Plancherel, que si $\Omega=R^n$, il en est ainsi. Tout ceci conduit à poser la

Définition 1.1. Un ouvert Ω de R^n est dit *m-régulier* si les espaces $W^m(\Omega)$ et $E^m(\Omega)$ coincident (algébriquement, et alors topologiquement d'après le théorème de Banach).

On a donc déja

Proposition 1.2. *Si* Ω *est un ouvert m régulier, il existe des constantes* c_k, $0<k<m$, *telles que pour tout* $u \in W^m(\Omega)$

on ait:

$$\|u\|_k^2 \leqq c_k (\|u\|_0^2 + \|u\|_m^2). \tag{1,5}$$

Réciproquement, soit Ω dans R^n tel que (1,5) ait lieu pour tout u dans $W^m(\Omega)$; nous ignorons si alors Ω est m régulier; la question se ramène à voir si $W^m(\Omega)$ est dense dans $E^m(\Omega)$, ce qui n'est pas résolu dans le cas général.

L'objet essentiel de cette note est la démonstration du théorème suivant, donné sans démonstration dans Lions [1], p. 71(1). Posons d'abord la

Définition 1.1. On dira que l'ouvert Ω vérifie $(H\,i)$ lorsque toute parallèle à l'axe des x_i coupe Ω en un nombre fini ou non d'intervalles, de longueur finie ou non *mais supérieure* à $\mathrm{E}_i > 0$ (E_i étant indépendant de la parallèle considérée).

On veut alors démontrer le

Théorème 1.1. *Soit Ω un ouvert de R^n tel que $(H\,i)$ ait lieu pour tout $i = 1, \ldots, n$. Alors Ω est m-régulier.*

Remarque 1.1.

Le théorème 1.1 est utile pour les ouverts non bornés; pour les ouverts bornés, on sait (proposition 1.1) que les ouverts de Nikodym sont m-réguliers, et ceci quel que soit m.

2. *Lemmes.*

Demontrons le lemme suivant, certainement connu:

Lemme 2.1. *Soit I un intervalle quelconque sur R^n, de longueur finie ou non, supérieure à* $\mathrm{E} > 0$. *Soit m un entier fixé quelconque. Il existe une constante* $c(\mathrm{E})$, *dépendant de* E, *telle que pour toute fonction* $u \in W^m(I)$ *on ait*:

$$\int_I |u^{(k)}(x)|^2\, dx \leqq c(\mathrm{E}) \int_I (|u(x)|^2 + |u^{(m)}(x)|^2)\, dx \tag{2,1}$$

(1) Pour des raisons typographiques, des notations actuelles sont différentes de celles de cet article.

pour tout k avec $0<k<m$. $\left(u^{(k)}=\dfrac{d^k u}{dx^k}\right)$.

Démonstration.

a) Soit I un intervalle borné quelconque sur R; I est un ouvert de Nikodym, donc par la proposition 1.2 il existe une constante c_0 telle que

$$(2,2)\qquad \int_0^1 |v^{(k)}(x)|^2\,dx \leqq c_0 \int_0^1 (|v(x)|^2+|v^{(m)}(x)|^2)\,dx,$$

$0<k<m$, pour tout $v\in W^m(I)$, $I=]0,1[$ (cf. aussi Remarque 2.1).

b) Soit maintenant $I=]0,a[$, $a>0$ quelconque. Si u est dans $W^m(I)$, la fonction v définie par $v(x)=u(ax)$ est dans $W^m(]0,1[)$, donc donne lieu à (2, 2), d'où

(2, 3)

$$\int_I |u^{(k)}(x)|^2\,dx \leqq c_0\left(a^{-2k}\int_I |u(x)|^2\,dx + a^{2(m-k)}\int_I |u^{(m)}(x)|^2\,dx\right).$$

c) Soit maintenant $I=]0,A[$ (la propriété à démontrer étant invariante par translation, on peut toujours supposer que l'une des extrémités de I est 0). Soit n un entier quelconque; posons

$$(2,4)\qquad a=A/n.$$

On peut écrire

$$\int_I |u^{(k)}(x)|^2\,dx = \sum_{j=0}^{n-1}\int_{ja}^{(j+1)a} |u^{(k)}(x)|^2\,dx.$$

Pour chaque j on peut appliquer (2, 3):

$$\int_{ja}^{(j+1)a} |u^{(k)}(x)|^2\,dx \leqq c_0\left(a^{-2k}\int_{ja}^{(j+1)a} |u(x)|^2\,dx + a^{2(m-k)}\int_{ja}^{(j+1)a} |u^{(m)}(x)|^2\,dx\right)$$

d'où l'on déduit

(2, 5)

$$\int_I |u^{(k)}(x)|^2\, dx \leqq c_0\, (a^{-2k}\int_I |u(x)|^2\, dx + a^{2(m-k)}\int_I |u^{(m)}(x)|^2\, dx)$$

avec $I =]0, A[$.

d) Soit maintenant I quelconque, égal à $]0, A[$, avec $A \geqq \mathrm{E}$. Soit E_1 et E_2 tels que $0 < \mathrm{E}_1 < \mathrm{E}_2$ et

$$\mathrm{E}(1/\mathrm{E}_1 - 1/\mathrm{E}_2) \geqq 1. \tag{2, 6}$$

On peut alors choisir n tel que a donné par (2, 4) vérifie

$$\mathrm{E}_1 \leqq a \leqq \mathrm{E}_2. \tag{2, 7}$$

En effet ceci équivaut à $A/\mathrm{E}_2 \leqq n \leqq A/\mathrm{E}_1$ et il est possible de choisir un tel entier, puisque $A(1/\mathrm{E}_1 - 1/\mathrm{E}_2) \geqq 1$. Alors (2, 5) donne le lemme, pour tout I borné.

e) Si $I =]0, \infty[$, on considère $I(\rho) =]0, \rho[$; on a (2, 1) pour $I(\rho)$, $c(\mathrm{E})$ indépendant de ρ, et on fait tendre ρ vers $+\infty$. Même chose si $I = R$; on peut également dans ce cas utiliser la transformation de Fourier et le théorème de Plancherel.

Le lemme est démontré dans tous les cas.

Remarque 2. 1.

On peut bien entendu donner une démonstration élémentaire du a) de la démonstration précédente. En voici une. On considère dans $W^m(I)$ l'ensemble B des fonctions f telles que

$$\int_0^1 |f|^2\, dx + \int_0^1 |f^{(m)}|^2\, dx \leqq 1. \tag{2, 8}$$

Il faut montrer que $f^{(k)}$ demeure dans un borné de $L^2(I)$. Or si l'on pose: $f^{(m)} = g$, on en tire
$f = h + P_{m-1}, P_{m-1}$ polynome de degré $m-1$, et f donnée par

$$h(x) = (1/(m-1)!)\int_0^x (x-s)^{m-1}\, g(s)\, ds.$$

Par $(2,8)$, $f^{(m)}=g$ demeure dans un borné de $L^2(I)$, d'où suit que h et ses dérivées d'ordre $<m$ demeurent dans un borné de $L^2(I)$. Il en résulte aussi que P_{m-1} demeure dans un borné de $L^2(I)$ donc que tous ses coefficients sont dans un borné de C, donc que $P^{(k)}{}_{m-1}$ est dans un borné de $L^2(I)$, d'où le résultat. Cette méthode a l'avantage de pouvoir donner une évaluation de c_0.

Remarque 2.2.

On peut dans (2,7) choisir E_2 *aussi petit qu'on veut* d'où le

Lemme 2.2. *Soit I un intervalle de R, borné ou non, de longueur $\geqq \mathrm{E}>0$. Pour tout $\eta>0$ aussi petit qu'on veut, il existe une constante $c(\mathrm{E},\eta)$ telle que*

$$(2,9) \qquad \int_I |u^{(k)}(x)|^2\,dx \leqq \eta \int_I |u^{(m)}(x)|^2\,dx + c(\mathrm{E},\eta)\int_I |u(x)|^2\,dx$$

pour tout $u \in W^m(I)$, $0<k<m$.

Remarque 2.3.

Prenons dans le lemme 2.1, $m=2$, $k=1$, $u(x)=x$. Cet exemple montre que l'hypothèse «longueur de $I, \geqq \mathrm{E}$» est indispensable.

3. *Démonstration du théorème* 1.1; *variantes.*

Démonstration.

a) Considérons l'adhérence de $\mathrm{D}(\Omega)$ dans $E^m(\Omega)$; il est immédiat (par transformation de Fourier) que sur $\mathrm{D}(\Omega)$ les normes induites par $E^m(\Omega)$ et $W^m(\Omega)$ sont équivalentes; donc l'adhérence de $\mathrm{D}(\Omega)$ dans $E^m(\Omega)$ coincide avec l'adhérence $\mathrm{D}^m(\Omega)$ de $\mathrm{D}(\Omega)$ dans $W^m(\Omega)$ (cf. dans Schwartz [3] ou Lions [2] la condition nécessaire et suffisante pour que $\mathrm{D}(\Omega)$ ne soit pas dense dans $W^m(\Omega)$). Cherchons l'orthogonal de $\mathrm{D}^m(\Omega)$, soit H^m, dans $W^m(\Omega)$, pour la structure $(u,v)_m+$ $+(u,v)_0$. C'est l'espace des $u \in E^m(\Omega)$ tels que $(u,\varphi)_m+(u,\varphi)_0=0$ pour tout $\varphi \in \mathrm{D}(\Omega)$ donc tels que

$$(3,1) \qquad (-1)^m \Delta^m u + u = 0 \quad (\Delta = \text{Laplacien}).$$

Il en résulte, par un théorème de Schwartz [1], que toutes les fonctions de H^m sont (après modification éventuelle sur un ensemble de mesure nulle) indéfiniment différentiables dans Ω. Soit $E(\Omega)$, l'espace des fonctions indéfiniment différentiables sur Ω à support quelconque. On voit donc que *$E(\Omega) \cap E^m(\Omega)$ est dense dans $E^m(\Omega)$.*

b) Comme toute fonction de $D^m(\Omega)$ et dans $W^m(\Omega)$ on est ramené à démontrer le théoreme pour $u \in H^m$, donc en particulier indéfiniment différentiable dans Ω. Posons $x^* = (x_1, \ldots, x_{n-1})$ et désignons par $I(x^*)$ l'intersection de Ω avec la parallèle à l'axe des x_n passant par le point $(x^*, 0)$; $I(x^*)$ est réunion finie ou dénombrable d'intervalles $I^k(x^*)$.

D'après le théorème de Fubini, les intégrales

$$\int_{I(x^*)} |u(x^*, x_n)|^2 \, dx_n \quad \text{et} \quad \int_{I(x^*)} \left| \frac{\partial^m}{\partial x_n{}^m} u(x^*, x_n) \right|^2 dx_n$$

soint finies sauf peut être pour x^* appartenant à un ensemble exceptionnel X_n, de mesure nulle dans R^{n-1}. Soit $x^* \in X_n$; la fonction $x_n \to u(x^*, x_n)$ est dans $W^m(I(x^*))$. Grâce à $(H\, n)$ et le lemme 2.1, il existe une constante c telle que

$$(3,2) \qquad \int_{I(x^*)} \left| \frac{\partial^k}{\partial x_n{}^k} u(x^*, x_n) \right|^2 dx_n \leq c \left(\int_{I(x^*)} \left(|u|^2 + \left| \frac{\partial^m}{\partial x_n{}^m} u \right|^2 \right) dx_n \right)$$

(on applique le Lemme 2.1 pour chaque $I^k(x^*)$ puis l'on fait la somme). Donc en intégrant (3, 2) en x^*, on voit que $\dfrac{\partial^k}{\partial x_n{}^k} u$ est dans $L^2(\Omega)$. Comme on a $(H\, i)$ pour tout i, on a finalement

$$(3,3) \qquad \frac{\partial^k}{\partial x_i{}^k} u \in L^2(\Omega) \text{ pour tout } k, 0 < k < m \text{ et pour tout } i.$$

Soit maintenant à montrer que $\dfrac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x_1{}^{k_1} \partial x_2{}^{k_2}} u$ est dans $L^2(\Omega)$, $k_1 + k_2 < m$. On pose $v = \dfrac{\partial^{k_1}}{\partial x_1{}^{k_1}} u$. Par (3, 3), on sait que $v \in L^2(\Omega)$. Par ailleurs, $D^p v \in L^2(\Omega)$ pour tout p avec $|p| = m - k_1$. Il en résulte, en appliquant encore (3, 3), que $\dfrac{\partial^k}{\partial x_i{}^k} v$ est dans $L^2(\Omega)$.

pour tout k avec $0<k<m-k_1$, d'où en particulier le résultat.

Même chose pour $\frac{\partial^{k_1+\dots+k}}{\partial x_1^{k_1}\dots\partial x_n^{k}} u$, $k_1+\dots+k_n<m$, d'où le théorème.

Remarque 3. 1.

On peut montrer sans utiliser la structure hilbertienne de $E^m(\Omega)$ que $E(\Omega) \cap E^m(\Omega)$ est dense dans $E^m(\Omega)$. Ce résultat se généralise alors aux espaces construits comme $E^m(\Omega)$, mais en utilisant $L^r(O)$, $r \geqq 1$, fini quelconque, au lieu de $L^2(\Omega)$. Même chose pour $W^m(\Omega)$. Le théorème 1. 1 se généralise à ces espaces.

Remarque 3. 2.

On peut améliorer le théorème 1. 1 de la façon suivante:

Théorème 3. 1. *Sous les hypothèses du théorème* 1. 1, *pour tout* $\eta>0$, *il existe une constante* $c(\eta)$, *telle que pour tout* u *dans* $W^m(\Omega)=E^m(\Omega)$, *et pour tout* k *avec* $0<k<m$, *on ait:*

$$\|u\|_k^2 \leqq \eta \, \|u\|_m^2 + c(\eta) \, \|u\|_0^2. \tag{3, 4}$$

Démonstration.

a) Soit $u \in \mathrm{E}(\Omega) \cap W^m(\Omega)$; on opére comme dans la démonstration du théorème 1. 1; pour l'obtention de (3, 2), on utilise le Lemme 2. 2 au lieu du lemme 2. 1. On obtient ainsi:

$$(3, 5) \quad \begin{cases} \text{pour tout } \eta>0 \text{ il existe une constante } c_1 \text{ telle que} \\ \left\| \dfrac{\partial^k}{\partial x_i^k} u \right\|_{L^2}^2 \leqq \eta \left\| \dfrac{\partial^m}{\partial x_i^m} u \right\|_{L^2}^2 + c_1 \|u\|_0^2 \text{ pour tout } u \text{ dans} \\ \mathrm{E}(\Omega) \cap W^m(\Omega),\ 0<k<m,\ i=1,\dots,n. \end{cases}$$

On va maintenant majorer la norme de

$$\frac{\partial^{k_1+\dots+k_n}}{\partial x_1^{k_1}\dots\partial x_n^{k_n}} u = f,\ k_1+\dots+k_n=k<m.$$

On pose:

$$v_1 = \frac{\partial^{k_2+\cdots+k_n}}{\partial x_2^{k_2}\ldots\partial x_n^{k_n}}\, u\,;$$

la fonction v_1 est dans $W^{m_1}(\Omega)$, $m_1 = m - (k_2 + \ldots + k_n)$; désignons par K le nombre des opérateurs D^p d'ordre k. Appliquons (3, 5), η étant remplacé par η/K. Il existe une constante c_2 telle que

$$\left\| \frac{\partial^{k_1}}{\partial x_1^{k_1}} v_1 \right\|_{L^2}^2 \leqq \frac{\eta}{K} \left\| \frac{\partial^{m-(k_2+\cdots+k_n)}}{\partial x_1^{m-(k_2+\cdots+k_n)}} v_1 \right\|_{L^2}^2 + c_2 \|v_1\|_0^2$$

soit

$$\|f\|_0^2 \leqq \frac{\eta}{K} \|D^{p_1}\|^2_{L^2} + c_2 \|v_1\|_0^2, \quad |p_1| = m.$$

Posons maintenant

$$v_2 = \frac{\partial^{k_3+\cdots+k_n}}{\partial x_3^{k_3}\ldots\partial x_n^{k_n}}\, u.$$

On utilise (3, 5), η étant remplacé par η/c_2K. Il existe une constante c_3 telle que

$$\|v_1\|_0^2 = \left\| \frac{\partial^{k_2}}{\partial x_2^{k_2}} v_2 \right\|_0^2 \leqq \frac{\eta}{c_2 K} \left\| \frac{\partial^{m-(k_3+\cdots+k_n)}}{\partial x_2^{m-(k_3+\cdots+k_n)}} v_2 \right\|_0^2 + c_3 \|v_2\|_0^2$$

d'où

$$\|f\|_0^2 \leqq \frac{\eta}{K} (\|D^{p_1} u\|_0^2 + \|D^{p_2} u\|_0^2) + c_2\, c_3 \|v_2\|_0^2,$$

où $|p_1| = |p_2| = m$ et $p_1 \neq p_2$. Et ainsi de suite, d'où

$$\|f\|_0^2 \leqq \frac{\eta}{K} \|u\|_m^2 + c_4 \|u\|_0^2.$$

On choisit c_4 assez grand pour que ceci ait lieu pour tout $(k_1, \ldots, k_n)$, donc

$$(3,6) \qquad \|u\|_k^2 \leqq \eta \|u\|_m^2 + c_5 \|u\|_0^2$$

pour tout $u \in E(\Omega) \cap W^m(\Omega)$.

b) Si u est quelconque dans $W^m(\Omega)$, on l'approche par une suite u_k, $u_k \in E(\Omega) \cap W^m(\Omega)$; pour chaque u_k on a (3, 6) d'où le résultat dans le cas général.

Remarque 3. 3.

Nous ignorons si la propriété (3, 4) du théorème 3. 1 est valable pour *tout* ouvert m-régulier. Notons à ce sujet le résultat suivant. Faisons l'hypothèse:

Hypothèse 3. 1. L'ouvert Ω est m-régulier et il existe une application linéaire continue $u \to Pu$ de $W^m(\Omega)$ dans $W^m(R^n)$ telle que:

$Pu = u$ presque partout dans Ω,

$\|Pu\|_m^2 \leqq c(\|u\|_0^2 + \|u\|_m^2)$, $c =$ constante,

$\|Pu\|_0^2 \leqq c\|u\|_0^2$.

On montre, par une variante de Babitch [1], que l'hypothèse 3. 1 a lieu si Ω est notamment un ouvert connexe borné de frontière une variété de dimension $(n-1)$ indéfiniment différentiable.

Proposition 3. 1. *Sous l'hypothèse* 3. 1, *pour tout* $\eta > 0$ *il existe* $c(\eta)$ *telle que* (3, 4) *ait lieu.*

Démonstration.

Il existe une constante c_1 telle que

$$\|Pu\|_k^2 \leqq \eta / c \|Pu\|_m^2 + c_1 \|Pu\|_0^2,$$

donc, grâce à l'hypothèse

$$\|Pu\|_k^2 \leqq \eta \|u\|_m^2 + (c_1 c + \eta) \|u\|_0^2.$$

Comme $\|u\|_k \leqq \|Pu\|_k$ (car $u = Pu$ presque partout dans Ω), on a le résultat.

Remarque 3. 4.

Si l'injection de $W^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ est *complètement continue* alors Ω est un ouvert de Nikodym (Deny Lions, [1]) et l'on montre que la *propiété* (3, 4) *du théorème* 3. 1 *a lieu dans ce cas.*

4. *Une application.*

On supposera dans ce N^0 que

$$(4,1)\quad \left\{\begin{array}{l}\Omega \text{ est un ouvert } m\text{-régulier, et pour tout } \eta > 0 \text{ il existe une constante } c(\eta) \text{ telle que, pour tout } u \in W^m(\Omega), \\ \text{on ait: } \|u\|_k^2 \leqq \eta \|u\|_m^2 + c(\eta)\|u\|_0^2.\end{array}\right.$$

Sur $W^m(\Omega)$ on donne la forme sesquilinéaire

$$(4,2)\qquad (u,v)_g = \sum_{|p|,|q|=m} (g_{pq} D^q u, D^p v)_{L^2(\Omega)}$$

où $g_{p,q} \in L^\infty(\Omega) =$ espace des fonctions mesurables et bornées Ω (plus généralement on peut prendre pour $g_{p,q}$ des applications linéaires continues quelconques de $L^2(\Omega)$ dans lui même). On suppose que cette forme est elliptique au sens suivant:

$$(4,3)\quad \left\{\begin{array}{l}\text{il existe } a_1 > 0 \text{ tel que} \\ (u,u)_g + \overline{(u,u)_g} \geqq 2a_1 \|u\|_m^2, \text{ pour tout } u \in W^m(\Omega).\end{array}\right.$$

Soit maintenant $a_{r,s}$ des fonctions *quelconques* dans $L^\infty(\Omega)$ (plus généralement, des applications linéaires continues quelconques de $L^2(\Omega)$ dans lui même); pour $u, v \in W^m(\Omega)$, posons

$$(4,4)\qquad (u,v)_A = \sum_{\substack{|r|,|s|\leq m \\ |r|+|s|\leq 2m-1}} (a_{r,s} D^s u, D^r v)_{L^2(\Omega)}.$$

Posons ensuite

$$(4,5)\qquad ((u,v)) = (u,v)_g + (u,v)_A,$$

et

$$(4,6) \qquad ((u,v))(s) = ((u,v)) + s(u,v)_{L^2}.$$

On a le

Théorème 4.1. *On suppose que* (4,1) *et* (4,3) *ont lieu. Alors, pour* s *réel assez grand, on a*:

$$(4,7) \qquad ((u,u))(s) + \overline{((u,u))(s)} \geqq a \,|||\, u \,|||_m^2, a > 0,$$

pour tout $u \in W^m(\Omega)$.

Démonstration.

Il résulte de la définition de $(u,v)_A$ par (4,4) que

$$|(u,u)_A| \leqq c_1 \,|||\, u \,|||_m \,|||\, u \,|||_{m-1}, \quad c_1 = \text{constante}.$$

Or de l'hypothèse (4,1) résulte que, pour tout $\eta > 0$, il existe $c_2(\eta) = c_2$ telle que

$$|||\, u \,|||_{m-1} \leqq \eta \,|||\, u \,|||_m + c_2 \|u\|_0.$$

On choisit η de sorte que $a_1 - c_1 \eta = 2a_2 > 0$. On peut alors choisir s_0 tel que

$$(a_1 - c_1 \eta) \,|||\, u \,|||_m^2 - c_1 c_2 \,|||\, u \,|||_m \|u\|_0 + s_0 \|u\|_0^2 \geqq a_2 \,|||\, u \,|||_m^2$$

(il suffit de prendre $s_0 \geqq (c_1 c_2)^2/4a_2$). On vérifie alors tout de suite que pour $s \geqq s_0$, le théorème est vrai avec $a = a_2$.

Le théorème 4.1 permet d'appliquer à la forme $((u,v))$ la théorie développée dans Lions [1] (cf. notamment le Chap. II de cet article).

BIBLIOGRAPHIE

Babitch [1] *A propos du prolongement des fonctions.* Ousp. Mat. Naouk, 1953, VII (54), p. 11-13.

Bourbaki [1] *Espaces vectoriels topologiques.* Paris, Hermann, 1953.

COURANT HILBERT [1] *Methoden der Matematischen Physik*, II, Berlin, 1937.

DENY LIONS [1] *Les espaces du type de Beppo Levi*, Annales de l'Inst. Fourier, V, 1953-54, p. 305-370.

GÅRDING [1] *Dirichlet's problem for linear elliptic partial differential equations*. Math. Scand. 1, 1953, p. 55-72.

(BEPPO) LEVI [1] *Sul principio di Dirichlet*. Rend., Palermo, 22, 1906, p. 293-359.

LIONS [1] *Problèmes aux limites en théorie des distributions*, Acta Math., t. 94, 1955 p. 13-153.

NIKODYM [1] *Sur une classe de fonctions considérées dans le problème de Dirichlet*, Fund. Math. 21, 1933, p. 129-150.

SCHWARTZ [1] *Théorie des distributions* (I), Paris, Hermann, 1950.

— — [2] *Théorie des distributions* (II), Paris, Hermann, 1951.

— — [3] *Séminaire*. Paris (II), 1954-1955.